

UNIVERSIDAD DE SONORA
DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

SISTEMAS TIPO LORENZ

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:
GUADALUPE MIGUEL MUNGUÍA GÁMEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FERNANDO VERDUZCO GONZÁLEZ

HERMOSILLO, SONORA.

NOVIEMBRE DE 2006.

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Índice general

1. Introducción	5
1.1. La duplicación del período	7
1.2. Intermitencia	7
1.3. Cuasi-periodicidad	8
2. Bifurcaciones horquilla y Hopf	9
2.1. Bifurcación horquilla	9
2.2. Bifurcación de Hopf	10
3. Análisis de bifurcaciones en el sistema de Lorenz	15
3.1. ¿Qué modela el sistema de Lorenz?	15
3.2. Análisis de estabilidad	20
3.2.1. Introducción	20
3.2.2. Puntos de equilibrio	21
3.2.3. Variedad central y bifurcación horquilla en el origen	22
3.2.4. Bifurcación de Hopf	29
4. Familia de Sistemas Tipo Lorenz	45
4.1. Introducción	45
4.2. Sistemas tipo Lorenz	45
4.3. Como encontrar más sistemas tipo Lorenz.	54
5. Sistema de Duffing	57
5.1. Introducción	57
5.2. El Oscilador de Duffing Controlado por el Sistema Unificado	58
6. Conclusiones	63
A. Teorema de Hartman-Grobman	67
B. Teorema de la Variedad Central	69
B.1. La Variedad Estable	69
B.2. Teorema de la Variedad Central	71
C. Formas de Jordan	75

D. Criterio de Routh-Hurwitz	77
D.1. Criterio de Routh	77
D.2. Criterio de Hurwitz	79
E. Cálculo de la velocidad de cruce en la bifurcación de Hopf	81

CAPÍTULO 1

Introducción

El modelo dominante y casi exclusivo en las ciencias desde su surgimiento en el siglo XVII ha sido el modelo determinista según el cual: “Un proceso se dice determinista si todo su futuro y pasado están unívocamente determinados por su estado en el momento presente”, en palabras del matemático ruso, pionero de las ciencias del caos, V. Arnold. El determinismo puede ser subvertido de dos maneras: una, por el azar, es decir, la indeterminación de un estado en relación con los que le han precedido y los que le sucederán; y otra por el caos, es decir el hecho de que a pesar de que un estado esté determinado no pueda ser objeto de predicción por lo que se podría denominar “la sensibilidad a las condiciones iniciales”.

El azar se opone al determinismo por el hecho de que mientras que la información completa acerca de un sistema determinista se reduce a la serie de ecuaciones que definen su evolución y una serie de condiciones iniciales (valores de sus variables de estado en un momento temporal determinado), un proceso aleatorio no admite tal comprensión de la información en una ley general, y la única posibilidad de describirlo es describir todos sus estados o, como mucho, intentar ajustar dichos estados mediante una ley estadística.

Por su parte los sistemas caóticos aunque sean deterministas no permiten la predicción porque trayectorias que surgen juntas divergen rápidamente borrando el recuerdo de dicho inicio común. En estos casos se separa el determinismo de las ecuaciones que expresa la necesidad de las matemáticas y la predictibilidad que es algo físico dependiente de las limitaciones asociadas con nuestra finitud humana. En los sistemas caóticos pequeñas diferencias iniciales se amplifican con el tiempo y dan lugar a diferencias macroscópicas.

En la naturaleza ciertos fenómenos pueden ser modelados por unas estructuras matemáticas que se denominan sistemas dinámicos y cuyo estado viene definido por una serie de variables que dependen del tiempo (variables de estado) y por una serie de leyes, una dinámica, que expresan las variaciones de las variables de estado a lo largo del tiempo, y que en los casos más sencillos suelen ser un sistema de ecuaciones diferenciales.

La representación de los sistemas dinámicos se lleva a cabo en un espacio denominado espacio de fases en el que cada punto define un estado y cada trayectoria una evolución del sistema. Los sistemas dinámicos son conservativos o disipativos según se conserve o no el volumen en el espacio de fases formado por una serie de puntos que evolucionan al mismo tiempo. Los sistemas disipativos suelen contar con atractores que son zonas del espacio de fases que “atraen” las trayectorias que pasan por sus proximidades, contrayendo las áreas

en el espacio de fases y haciendo converger las trayectorias, de forma que dichos atractores representan el comportamiento asintótico del sistema, es decir, cómo se comporta éste a largo plazo. Los atractores clásicos son:

- a) un punto fijo, que señala un estado de equilibrio final del sistema;
- b) una órbita periódica que señala que la configuración del sistema evoluciona de forma periódica repitiendo sus estados;
- c) una órbita cuasi-periódica, que da lugar a un toro en el espacio de fases;
- d) un atractor extraño, atractores muy complejos cuya sensibilidad a las condiciones iniciales impide la predictibilidad a pesar del determinismo riguroso debido a que las trayectorias próximas divergen rápidamente, cuya no periodicidad impide que las curvas se cierren sobre sí mismas y por tanto hace que no se pueda predecir pero sí da información sobre el estado inicial, lo que hace que se puedan distinguir situaciones que en el origen casi se confundían, y cuya fractalidad exhibe una invariancia a través de distintas escalas.

Los atractores extraños son el producto de auto-oscilaciones (perturbaciones que no desaparecen sino que se mantienen una vez aparecidas en sistemas no lineales mediante un mecanismo de retroalimentación) que dan lugar a inestabilidades locales producto de las condiciones de mezcla en que se encuentran los sistemas que presentan dichos atractores.

Un conjunto fractal es un conjunto "muy raro" cuya dimensión es intermedia entre una línea y una superficie o entre una superficie y un volumen. Son volúmenes casi huecos, líneas enmarañadas que casi cubren el conjunto del plano pero sin hacerlo del todo o conjunto de puntos, "polvos", productos de la explosión de la recta. Fractales son las curvas que representan una costa en un plano o la representación geométrica tridimensional de un copo de nieve. Estas extrañas figuras geométricas gozan de una peculiar invariancia a través de las escalas que hace que cada fragmento del fractal sea semejante (autosemejante) a cualquier fragmento más grande e incluso al fractal en su conjunto. La citada autosemejanza es una consecuencia de que el fractal es el resultado de una aplicación continua que pliega una y otra vez sobre sí mismo el espacio de fases, dando lugar a veces a una estructura hojaldrada, en capas, y expresa la continuidad de las fuerzas que producen la dinámica.

Los atractores extraños con estructura de fractal que son ejemplos de caos determinista obedecen a dos constricciones: la divergencia de las trayectorias y su confinamiento en un espacio determinado donde dichas trayectorias se reagrupan constantemente sin cortarse; la sensibilidad a las condiciones iniciales son las responsables del estiramiento del fractal y al confinamiento espacial responde el plegado del mismo. Estas dos condiciones sólo se pueden cumplir en espacios de al menos tres dimensiones.

Orden y caos establecen entre sí un juego complejo más que una simple oposición. El caos surge del orden y un cierto orden puede surgir del caos cuando se dan una serie de circunstancias que analizaremos a continuación. Se puede hablar, por tanto, de un borde del caos ya que el mismo surge cuando la complejidad de un sistema (medida por su capacidad computacional, es decir, su capacidad para almacenar y procesar información) alcanza un máximo, cosa que sucede en una estrecha zona que separa estados altamente ordenados de estados completamente caóticos. Del orden se puede pasar al caos (en sistemas no lineales de al menos tres variables) a través de tres caminos principales que suponen los tres la desestabilización

de regímenes periódicos por perturbaciones que en lugar de amortiguarse y desaparecer se amplifican: por duplicación de período, por intermitencias, o por la cuasi-periodicidad.

1.1. La duplicación del período

Se presenta al variar cierto parámetro y supone que se obtienen en la primera bifurcación dos soluciones estables que alternan entre sí a lo largo del tiempo, luego cuatro, luego ocho y así sucesivamente hasta el caos. Este proceso se ha observado en la evolución de poblaciones en biología.

El doblamiento de período es una bifurcación que se da únicamente en mapas. Por ejemplo, la más conocida "rutas al caos", se da en una secuencia infinita de doblamientos de período y es lo que efectivamente ocurre en el mapeo logístico. En esta bifurcación, cambia la estabilidad de un punto fijo cuando uno de sus autovalores cruza el valor real -1 , y se genera una nueva solución con el doble del período del anterior, mientras que la estabilidad de la solución de período 1 cambia.

La "aplicación logística" está al alcance de cualquiera que posea una calculadora. En ciertos puntos críticos de la evolución de un sistema dinámico generada al iterar la aplicación se produce un mecanismo de cascada de duplicación del período que conduce rápidamente al caos matemático (pérdida del régimen estacionario o periódico). Pero si seguimos la evolución del sistema pueden reaparecer en algunos puntos concretos las trayectorias periódicas (el orden surge espontáneamente del desorden, equivalente al nuevo "orden por fluctuaciones" de la termodinámica del no equilibrio) para a continuación volver a disolverse —en una nueva cascada de duplicación del período— en un completo desorden, y así sucesivamente. Además, este artificio matemático nos permite mostrar la propiedad más característica de la dinámica caótica: la dependencia sensible a las condiciones iniciales. aún cuando empecemos dos series de iteraciones con valores muy próximos, al cabo de unas cuantas operaciones podemos obtener valores numéricos muy alejados entre sí, como si de dos valores tomados al azar se tratara. Lo que es una diferencia que nos parece irrelevante (por pequeña) entre dos estados iniciales, se amplifica progresivamente para acabar evolucionando hacia dos estados completamente diferentes.

1.2. Intermitencia

La transición mediante intermitencias hacia el caos se produce cuando períodos de comportamiento regular del sistema se ven interrumpidos por explosiones caóticas que aparecen a intervalos de tiempo de duración aleatoria, intermitencia es la situación en que lo simple y lo complejo se alternan constantemente. Por ejemplo, incluso en amplificadores electrónicos de gran precisión ocasionalmente se producen cortas descargas de electricidad estática. Eso no se debe a una interferencia externa sino a los resultados de los efectos no lineales dentro del circuito, produciéndose períodos de caos. Con la aparición de relojes atómicos de precisión se descubrió que la Tierra sufría alteraciones en su rotación: el paso del "tiempo" de la tierra no es perfectamente regular porque de vez en cuando aparecen estallidos intermitentes de caos. También el cuerpo humano presenta gran variedad de ejemplos de intermitencia. Uno es que se ha demostrado que un poco de caos es necesario para que el sistema inmunológico funcione de forma eficiente. Intermitencia no sólo significa que el caos surja del orden sino también que el orden puede surgir en el caos. Aquí surgen algunas preguntas interesantes: "¿Aparece el

caos porque la conducta regular se rompe temporalmente? ¿O es el orden regular realmente una ruptura del caos que subyace en la realidad? ¿O bien es esa intermitencia la verdadera manifestación de la complejidad caótica?"

1.3. Cuasi-periodicidad

El caos debido a la quasi-periodicidad se produce por la interacción y el acoplamiento no lineal de dos o más osciladores periódicos que transcurren en el espacio de fase sobre la superficie de un toroide. Este tipo de oscilaciones aparece como resultado de la interacción de dos osciladores que no acoplan de frecuencias diferentes: un oscilador sería el responsable del movimiento periódico a lo largo del toroide, y el otro en la dirección perpendicular al mismo. Cuando las frecuencias de giro y traslación alrededor del toroide toman valores suficientemente distintos (números irracionales no divisibles entre sí) la órbita puede estar dando vueltas alrededor del toroide sin pasar nunca por el mismo punto. Es decir, se obtiene una dinámica aperiódica, donde las órbitas próximas transcurren próximas sin diverger ni converger con el paso del tiempo.

El espectro de potencia para este comportamiento dinámico muestra picos a los valores de frecuencias básicas, los cuales aparecen a números irracionales no divisibles entre sí, y también se observan las combinaciones lineales con números enteros. El exponente máximo de Lyapunov tiene valor cero lo cual indica que órbitas próximas al evolucionar en el tiempo no divergen ni convergen. El mapa estroboscópico de una órbita cuasiperiódica se caracteriza por una curva cerrada. La dimensión de correlación de un atractor toroidal es igual a 2^{65} .

Los procesos vitales también tienen ejemplos de caos determinista, unos favorables y otros desfavorables para la salud. Por ejemplo, un ritmo cardíaco sano implica un cierto carácter errático, signo quizás de la existencia de un atractor extraño, mientras que una periodicidad regular suele preceder a un paro del músculo cardíaco. Pero también hay regímenes caóticos de dicho ritmo que son fatales, como los que acontecen en el fenómeno de la fibrilación ventricular en el que aunque las partes del corazón funcionan correctamente el músculo se retuerce descoordinado e incapaz de bombear la sangre.

CAPÍTULO 2

Bifurcaciones horquilla y Hopf

2.1. Bifurcación horquilla

La bifurcación de horquilla es una bifurcación simétrica, y por ello se observa en muchos sistemas que tienen simetría entre una parte positiva y otra negativa. La bifurcación horquilla consiste en que un único punto fijo se bifurca en tres, uno de los cuales tiene la estabilidad contraria a la del original y los otros dos la misma. Las bifurcaciones horquilla pueden clasificarse en dos grupos importantes: subcríticas y supercríticas. La bifurcación supercrítica es cuando un punto fijo estable se bifurca en dos puntos fijos estables y uno inestable, figura 2.1. Una bifurcación subcrítica es análoga a la anterior pero con las estabilidades y el sentido cambiados: dos puntos fijos inestables y uno estable colapsan en un punto fijo inestable, figura 2.2 .

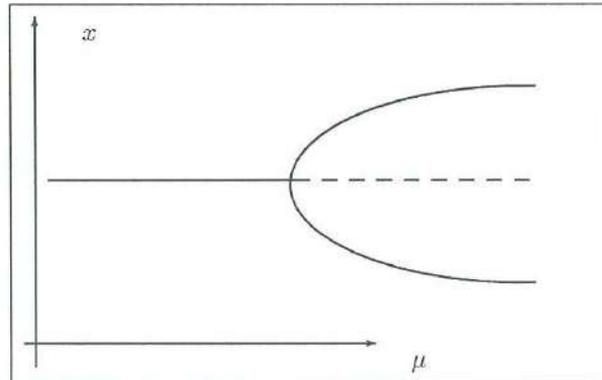


Figura 2.1: Bifurcación horquilla supercrítica, donde la curva continua significa que tiene un comportamiento estable, mientras que la línea punteada indica un comportamiento inestable.

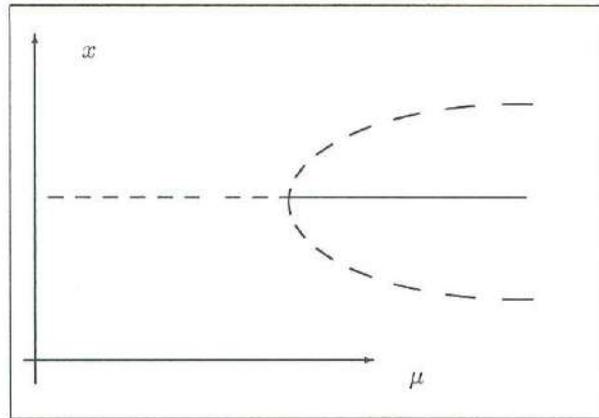


Figura 2.2: Bifurcación horquilla subcrítica.

El siguiente teorema, debido a Sotomayor, da condiciones suficientes pero no necesarias para la bifurcación horquilla.

Teorema 2.1 (Sotomayor). Sea $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, con $f(x_0, \mu_0) = 0$. Supongamos que

i) $\frac{\partial f(x_0, \mu_0)}{\partial x}$ posee un valor propio cero, con v un vector propio por la derecha y w por la izquierda. Además, $\frac{\partial f(x_0, \mu_0)}{\partial x}$ posee k valores propios con parte real negativa y $n - k - 1$ con parte real positiva (contando multiplicidades).

ii)

$$\begin{aligned} w^T \left(\frac{\partial f(x_0, \mu_0)}{\partial \mu} \right) &= 0, & w^T \left(\frac{\partial^2 f(x_0, \mu_0)}{\partial x^2} (v, v) \right) &= 0, \\ w^T \left(\frac{\partial^2 f(x_0, \mu_0)}{\partial x \partial \mu} (v) \right) &\neq 0, & w^T \left(\frac{\partial^3 f(x_0, \mu_0)}{\partial x^3} (v, v, v) \right) &\neq 0 \end{aligned}$$

Entonces el sistema sufre la bifurcación horquilla en el punto (x_0, μ_0) .

2.2. Bifurcación de Hopf

Como los cambios cualitativos a los que se refiere la teoría sobre bifurcaciones locales ocurren en un entorno de un punto fijo u órbita cerrada, nos hemos centrado en el estudio de los puntos de equilibrio no hiperbólicos, es decir, aquellos para los cuales la matriz Jacobiana del sistema posee valores propios nulos o con parte real nula, pues sabemos por el teorema de Hartman-Grobman que los equilibrios hiperbólicos son estructuralmente estables. En este contexto, resulta fundamental el teorema de la variedad central que establece la existencia de una variedad invariante pasando por el punto fijo (no hiperbólico) a la cual puede restringirse el sistema para estudiar la dinámica en un entorno del mismo, análogamente a como ocurre en

los sistemas lineales con el subespacio vectorial generado por los vectores propios asociados a valores propios nulos o con parte real nula. Dicha variedad invariante puede ser representada localmente como la gráfica de una función de clase C^r y para el caso que nos ocupa, una aproximación cuadrática (e incluso lineal a veces) a la misma, es suficiente.

Cuando el punto de equilibrio es no hiperbólico debido a la presencia de al menos un valor propio real simple nulo, la restricción del sistema original a la variedad central es un sistema de dimensión uno en la forma:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in R, \quad \mu \in R^p, \quad (2.1)$$

y si es consecuencia de la presencia de un par de valores propios imaginarios puros, dicha restricción es bidimensional, siendo el estudio de las bifurcaciones en los sistemas resultantes más sencillo que en el de partida, toda vez que los mismos son susceptibles de escribirse bajo cierta forma estándar de expresión (llamada forma normal topológica) común a todos los sistemas que poseen un mismo tipo de bifurcación.

En el caso de que el equilibrio estacionario sea no hiperbólico debido a la presencia de un par de valores propios imaginarios puros para cierto valor del parámetro del sistema, $\mu = \mu_0$, la restricción del sistema original a la variedad central es un sistema bidimensional, el cual presentará una bifurcación de Hopf para $\mu = \mu_0$, si se verifica cierta condición de generacidad, traducible en que los valores propios $\lambda(\mu)$ que son imaginarios puros en μ_0 crucen el eje imaginario con velocidad no nula, esto es:

$$d = \left. \frac{dRe\lambda(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} \neq 0 \quad (2.2)$$

En tales circunstancias, el teorema de Hopf asegura la existencia de algunas soluciones periódicas bifurcándose a partir de μ_0 . La estabilidad de las mismas viene determinada por una segunda condición expresada en términos del llamado primer coeficiente de Lyapunov, l_1 , el cual se deduce en el cálculo de la forma normal topológica correspondiente que, expresada en coordenadas polares, es el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{r} &= (d\mu + l_1 r^2)r \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2 \end{cases}$$

donde d está definido en (2.2), ω es la parte imaginaria de los valores propios complejos que son imaginarios puros en μ_0 , y b y c han de ser calculados a partir de los parámetros del modelo.

En estas circunstancias, una condición suficiente para la existencia de un ciclo límite estable es que $l_1 < 0$, y si $l_1 > 0$, el ciclo límite es inestable. En el primer caso estamos ante una bifurcación de Hopf supercrítica y un ciclo límite estable surge para cada valor del parámetro μ mayor que μ_0 y lo suficientemente próximo a él. En el segundo caso, se trata de una bifurcación de Hopf subcrítica y los ciclos aparecen antes de que el parámetro alcance el valor de bifurcación.

Entonces, dado un sistema n -dimensional con un equilibrio no hiperbólico para cierto valor de un parámetro, podemos encontrar una variedad central pasando por ese punto y restringir el sistema original a la misma, con lo que el estudio de las bifurcaciones en los sistemas resultantes de dimensiones uno o dos es menos complejo, una vez calculadas las formas normales topológicas equivalentes. Ahora bien, la realización de estos cálculos no es

sencilla. En la mayoría de los casos un tratamiento simbólico del problema resulta inabordable y hay que recurrir a técnicas numéricas de resolución.

Formalicemos lo anterior con el siguiente teorema.

Teorema 2.2 (Hopf (1942)). *Considere la familia uni-paramétrica de ecuaciones diferenciales*

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (2.3)$$

con $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ lo suficientemente suave. Con un punto de equilibrio (x_0, μ_0) y $A(\mu) = D_x F(x_0, \mu)$.

(i) Si $A(\mu_0)$ posee un único par de valores propios con parte real cero, entonces existe una curva suave de puntos de equilibrio $(x(\mu), \mu)$ con $x(\mu_0) = x_0$. Además, los valores propios $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ de $A(\mu)$, los cuales se hacen imaginarios en μ_0 , varían suavemente con el parámetro μ .

(ii) Si $d = \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_0} \neq 0$.

Entonces de i) y ii) existe una única variedad central tridimensional, pasando por $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y un sistema de coordenadas suave, cuya expansión en serie de Taylor, hasta grado tres sobre la variedad central, está dado, en forma polar, por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (d\mu + l_1 r^2)r, \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2. \end{aligned}$$

Si $l_1 \neq 0$, entonces existe una superficie de órbitas periódicas en la variedad central, las cuales tienen tangencia cuadrática con el eigenspacio generado por $\lambda(\mu_0)$, $\bar{\lambda}(\mu_0)$. Si $l_1 < 0$ las órbitas periódicas son estables (caso supercrítico) mientras que si $l_1 > 0$ son inestables (caso subcrítico).

Para calcular el coeficiente l_1 , consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega_0 x_2 + f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = \omega_0 x_1 + f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

que se obtiene del sistema (2.3) al hacer $\mu = \mu_0$ y hacer un cambio de coordenadas adecuado.

Sean

$$R_1 = f_{1x_1x_1x_1} + f_{1x_1x_2x_2} + f_{2x_1x_1x_2} + f_{2x_2x_2x_2} \Big|_{x=x_0}$$

$$R_2 = f_{1x_1x_2}(f_{1x_1x_1} + f_{1x_2x_2}) - f_{2x_1x_2}(f_{2x_1x_1} + f_{2x_2x_2})$$

$$-f_{1x_1x_1}f_{2x_1x_1} + f_{1x_2x_2}f_{2x_2x_2} \Big|_{x=x_0}$$

Donde los subíndices de las f_i para $i = 1, 2$ indican derivadas parciales.

Luego

$$l_1 = \frac{1}{16} \left[R_1 + \frac{1}{\omega_0} R_2 \right].$$

Tenemos entonces, los siguientes cuatro escenarios posibles:

- a. Si $d > 0$, $l_1 < 0$. El origen es estable para $\mu < 0$, inestable para $\mu > 0$, y rodeado por una órbita periódica estable para $\mu > 0$. Esta situación es mostrada en la figura (2.3).
- b. Si $d < 0$, $l_1 < 0$. El origen es inestable para $\mu < 0$ y estable para $\mu > 0$. El origen es rodeado por una órbita periódica estable para $\mu < 0$.
- c. Si $d > 0$, $l_1 > 0$. El origen es estable para $\mu < 0$ e inestable para $\mu > 0$. Además, el origen es rodeado por una órbita periódica inestable para $\mu < 0$.
- d. Si $d < 0$, $l_1 > 0$. El origen es inestable para $\mu < 0$, estable para $\mu > 0$, y rodeado por una órbita periódica inestable para $\mu > 0$ esto es mostrado en la figura (2.4).

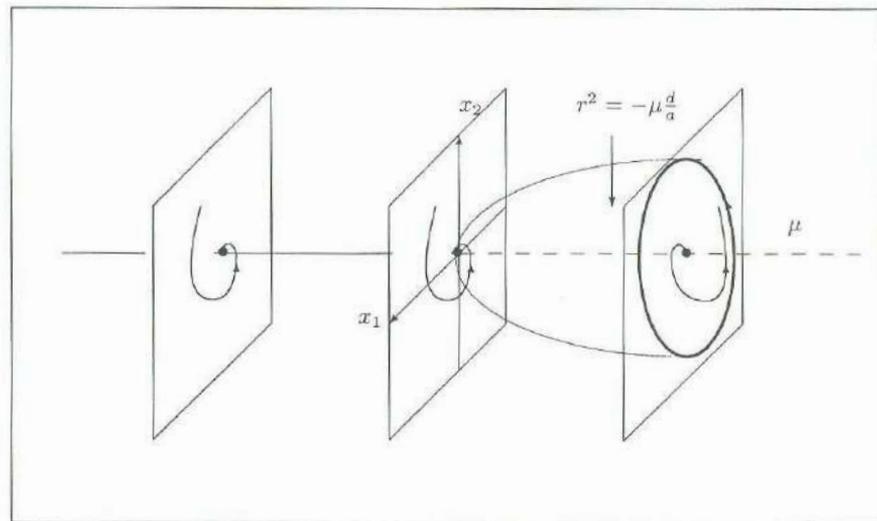


Figura 2.3: Bifurcación de Hopf Supercrítica: Una órbita periódica estable y un punto de equilibrio inestable surgen de un punto de equilibrio estable.

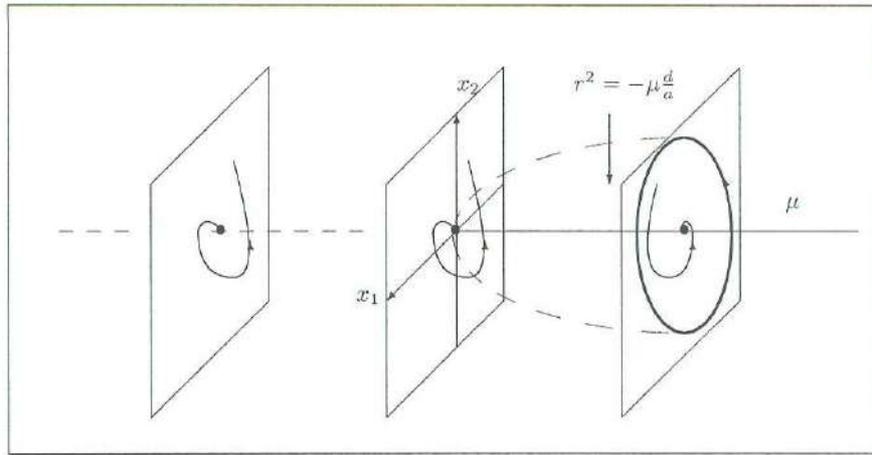


Figura 2.4: Bifurcación de Hopf Subcrítica: Un equilibrio estable y una órbita periódica inestable se funden en un punto de equilibrio inestable.

CAPÍTULO 3

Análisis de bifurcaciones en el sistema de Lorenz

3.1. ¿Qué modela el sistema de Lorenz?

La humanidad y sus civilizaciones han sufrido incontables pérdidas debido a la atmósfera que rodea al planeta, siempre inestable e inquieta. Es por ello que desde los tiempos más remotos, el ser humano ha tratado de predecir el clima con todas las herramientas que ha tenido a su disposición. No fue sino hasta que Von Neumann se interesó por investigar el tema con las primeras computadoras electrónicas, que se pasó de la etapa de tratar de predecir a la de tratar de controlar el clima. La década de los cuarentas y cincuentas fueron de las más fecundas para la ciencia del control atmosférico. Recientemente, sin embargo, se ha llegado a considerar que los cambios climatológicos nocivos para la humanidad podrían resultar ser una parte integral y condición *sine qua non* para la vida y ecología del planeta.

Al introducir intercambios de frío y calor a gran escala entre el Ecuador y los polos, y desde las partes más bajas hasta las más altas de la atmósfera, los fenómenos climatológicos actúan como válvulas de seguridad además de proteger a todas las criaturas vivas formando un escudo gaseoso contra la radiación solar y la energía cósmica.

El conocimiento de los patrones climatológicos está lejos de ser completo y aún cuando son comprendidos, ninguna explicación simplificada o esquematizada puede ofrecerse sin notar que se queda corta en los complejos mecanismos que generan y mantienen la variabilidad meteorológica del planeta. Es por esto que el clima representa el sistema caótico por excelencia en el que los mecanismos de retroalimentación no lineales generan condiciones impredecibles. Sin embargo, los científicos están descubriendo cómo la teoría del caos puede ayudarlos a emitir predicciones más confiables y, sobre todo, a mejorar su comprensión de lo que significa un sistema extremadamente complejo, lo que resulta paradójico en cierto sentido, ya que fue precisamente la meteorología de la década de los sesentas la que aportó gran parte de los fundamentos de esta ciencia.

Gran parte del cuerpo de conocimientos que integra la teoría del caos surgió originalmente del estudio de los cambios climáticos y, de hecho, uno de los primeros descubrimientos que dan sustento teórico a esta área de estudio se debe a Edward Lorenz, quien desarrolló a principios de la década de los sesentas un modelo simplificado del clima basado en ecuaciones

diferenciales.

Para poder comprender este modelo, resulta conveniente imaginar que cualquier condición climática podría ser representada como un punto dentro de un espacio tridimensional. Así, por ejemplo, el eje x podría representar la temperatura mientras que el eje y representaría la humedad y, el eje z podría referirse a la presión barométrica, como se aprecia en la figura (3.1).

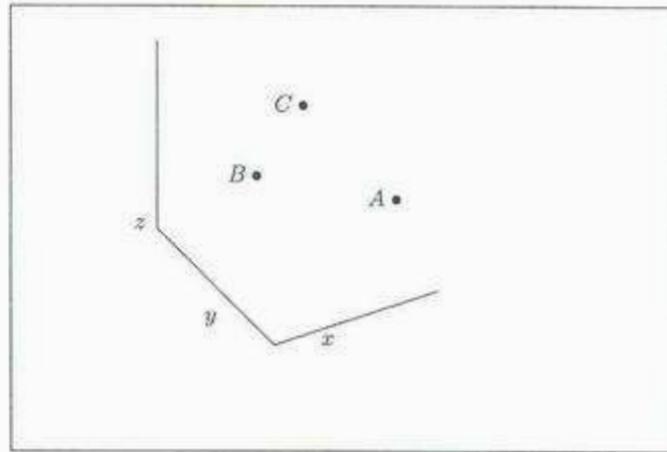


Figura 3.1: Condición climática representada como un punto dentro de un espacio tridimensional.

En este espacio de fases simplificado, un día soleado estaría representado por el punto A, uno lluvioso por el punto B y una nevisca por el punto C. Resulta razonable suponer que el clima de hoy está afectado en gran medida por el clima observado el día de ayer, el de ayer por el del día anterior y así sucesivamente. De acuerdo con esta línea de razonamiento, es evidente que el clima actual influirá en el de mañana y éste en el del día siguiente. Ahora bien, si se van trazando los puntos correspondientes a las condiciones meteorológicas observadas, se obtendría una gráfica mostrando la ruta que sigue el sistema a través del espacio de fases seleccionado y esto, en teoría, permitiría hacer una proyección sobre su comportamiento futuro.

Lorenz llegó básicamente a las mismas conclusiones y al ir ajustando progresivamente la interrelación entre las variables seleccionadas, mejoró substancialmente la capacidad predictiva del modelo que había desarrollado. Durante algún tiempo, los resultados obtenidos fueron iguales a los esperados; es decir, las predicciones climáticas del modelo coincidían con el clima observado. Una mañana, sin embargo, Lorenz decidió redondear los resultados obtenidos de la corrida anterior en lugar de introducir las cifras completas a su computadora Royal McBee. El modelo pareció ignorar dicha falta de precisión al principio pero muy pronto comenzó a trazar una ruta completamente distinta a la que había venido siguiendo, como lo ilustra la figura 3.2.

Luego de haber descartado las causas más obvias de estas diferencias, llegó a la conclusión

de que se debía haber introducido cifras redondeadas al principio de la corrida, cuyo error se había magnificado a tal grado que el diagrama seguía una ruta completamente distinta a la anterior. Esto planteaba una cuestión muy seria sobre la validez de su modelo, pues si una diferencia de pocas milésimas podía causar que se pronosticaran heladas en pleno verano, entonces un error insignificante al momento de establecer las condiciones iniciales podría hacer que el modelo se equivocara completamente, en sus predicciones a corto plazo serían tan confiables como tirar una moneda al aire para determinar si el clima del día siguiente sería soleado o lluvioso.

Para trazar las tres ecuaciones diferenciales se requiere de una computadora que simule tres planos y en donde aparece la figura ya mostrada. En lugar de una simple estructura geométrica o curva compleja, la estructura conocida como *atractor de Lorenz* va emergiendo conforme se iteran las ecuaciones.

Al proyectarla sobre el plano $x - z$, este atractor se asemeja a una mariposa, como se muestra a continuación en la figura 3.2.

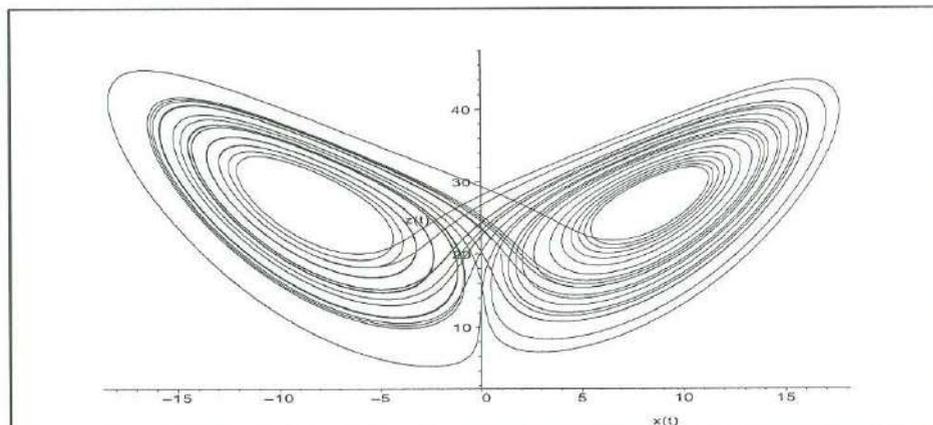


Figura 3.2: Mariposa de Lorenz.

Una proyección sobre el plano $y - z$ parece una máscara de búho, como se ve en la figura 3.4.

Finalmente, la proyección sobre el plano $x - y$ se utiliza principalmente para vislumbrar la tridimensionalidad de la curva, pues parece dos platos de papel sobre planos diferentes pero paralelos que se conectan a través de una cadena. Conforme se va trazando el atractor de Lorenz, una cadena se va dibujando desde uno de los platos y comienza a trazar el contorno de una de las alas de la mariposa, luego se lanza hacia el extremo opuesto y dibuja el centro para continuar repitiendo este proceso infinitamente. Esto se ilustró en la figura 3.2.

En teoría, el trazado de la curva debería continuar infinitamente pero en la práctica, la longitud de dígitos que es capaz de manejar con exactitud determinada computadora es lo que limita su definición y, por lo mismo, su exactitud.

Cuando Lorenz intentaba modelar el comportamiento del clima mediante la conducta caótica de los gases, tomó unas cuantas de las ecuaciones conocidas como el *sistema de Navier-Stokes* del campo de la dinámica de fluidos y, al simplificarlas, obtuvo el siguiente sistema tridimensional:

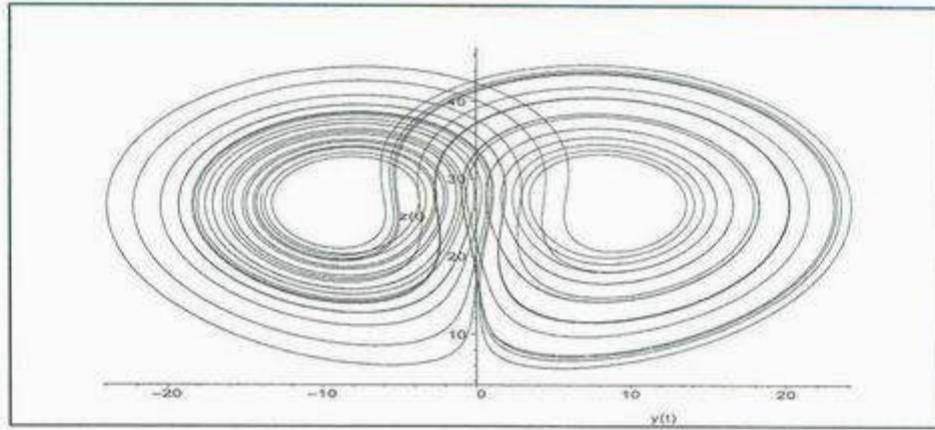


Figura 3.3: Perspectiva bidimensional del atractor de Lorenz.

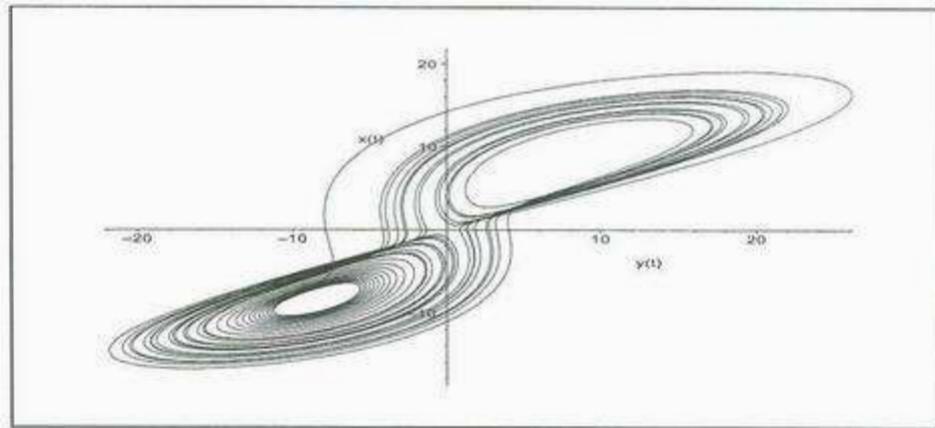


Figura 3.4: Mariposa de Lorenz.

$$\dot{x} = \delta(y - x) \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = \mu x - y - xz \quad (3.2)$$

$$\dot{z} = xy - bz \quad (3.3)$$

En estas ecuaciones, δ representa el *número de Prandtl*, que es la relación entre la viscosidad de un fluido y su conductividad térmica, con un valor de 10. El parámetro μ representa el *número de Raleigh*, que es la diferencia de temperaturas entre la parte inferior y la superior del sistema, con un valor de 28. La variable b representa la relación entre la longitud y la altura de la caja que se emplea para contener el gas, con un valor de $8/3$. La x resultante de esta ecuación representa la razón de rotación del cilindro, y señala la diferencia entre temperaturas en los lados opuestos del cilindro, mientras que z representa la desviación del sistema de la línea vertical graficada correspondiente a la temperatura.

Para enlazar el atractor de Lorenz con la realidad se podría argumentar que cada lóbulo representa uno de los regímenes climáticos identificados como *estable e inestable*. Al seleccionar un punto cualquiera sobre la gráfica del atractor, se estaría seleccionando un clima instantáneo que tiene tanto un pasado como un futuro estrictamente determinista. Sin embargo, al magnificar arbitrariamente cualquier sección de la gráfica se descubrirá que la trayectoria que sigue el sistema por su espacio de fases es una, sólo que nunca se cruza o se encina, aunque definitivamente llena el plano sobre el que se le traza. Esto significa que se pueden seleccionar dos puntos arbitrariamente cercanos a uno de los lóbulos del atractor y al recorrer sus trayectorias respectivas, se puede observar cualquiera de los tres comportamientos siguientes, ilustrados en la figura 3.5.

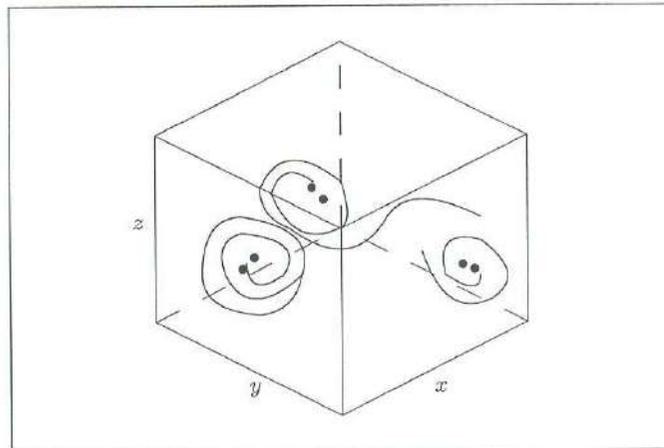


Figura 3.5: Diferencias entre un comportamiento impredecible, debido a la rápida divergencia de rutas, y uno pronosticable, por existir un miniatractor dentro del espacio de fase.

Del lado izquierdo se presenta el caso en el que ambos puntos evolucionan de manera similar y permanecen dentro del mismo lóbulo; al centro se encuentra una evolución parecida que traslada los puntos hacia el lóbulo opuesto y, finalmente, del lado derecho, se ilustra el caso en el que los puntos evolucionan de manera diferente: mientras que un punto permanece en el mismo lóbulo, el otro se traslada hacia el lóbulo opuesto. Sin importar qué tanto se magnifique la gráfica, la incertidumbre sobre qué trayectoria habrá de seguir el punto seleccionado permanecerá.

La figura 3.6 muestra estos dos casos: el primero le permitiría a los meteorólogos realizar un pronóstico climático confiable, mientras que el segundo sería totalmente incierto, resultando nuevamente el efecto que puede tener un pequeño error de medición en las condiciones iniciales.

Quizá parecería que lo más obvio para reducir o eliminar este problema consistiría en aumentar la precisión de nuestros instrumentos de medición, lo que en teoría podría incrementar la capacidad predictiva de los modelos elaborados. Sin embargo, los efectos de la no linealidad y

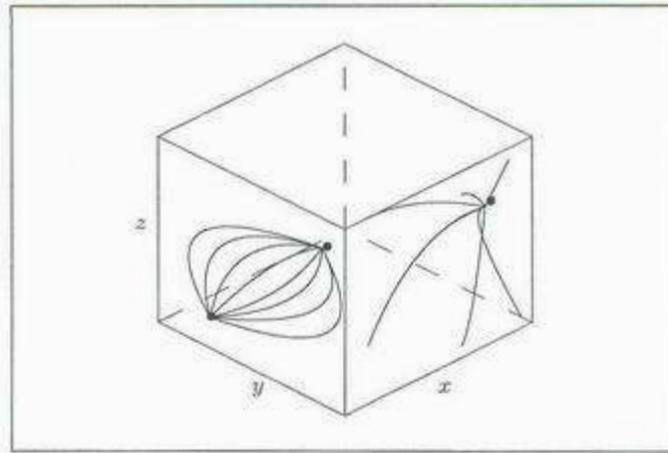


Figura 3.6: Distintos comportamientos posibles de dos puntos arbitrariamente cercanos entre sí.

de la retroalimentación frustrarían todo intento por aumentar significativamente el horizonte de predictibilidad. El modelo de Lorenz únicamente considera tres variables, por lo que se dice que tiene tres grados de libertad, mientras que los modelos climáticos actuales poseen hasta un millón de grados de libertad y, sin embargo, su capacidad predictiva tiene un horizonte de poco más o menos una semana.

Curiosamente, el comportamiento generado por el modelo de Lorenz es virtualmente indistinguible de los patrones observados en la naturaleza. Si un especialista revisara ambas gráficas, sería incapaz de reconocer cuál de ellas es la real y cuál la simulada.

El término *sensibilidad a las condiciones iniciales* es el concepto que normalmente se emplea para explicar este tipo de conducta irregular. Fue acuñado para describir el fenómeno que hace que pequeños cambios en un sistema recursivo se magnifiquen hasta alternar drásticamente los resultados esperados. El mismo Lorenz ideó una analogía que ilustra perfectamente este concepto: el *efecto Mariposa*. Si existiera otro planeta idéntico a la Tierra y una mariposa decidiera batir sus alas en uno mientras que en el otro permaneciera quieta, las fluctuaciones creadas se irían magnificando exponencialmente hasta que, eventualmente, los patrones climáticos fueran distintos en ambos planetas. De esta analogía nació la idea de que una mariposa en Hong Kong podría causar un tornado en Kansas. Parece ilógico que un efecto tan pequeño pudiera tener consecuencias tan dramáticas pero esto es precisamente lo que pretende establecer la teoría del caos.

3.2. Análisis de estabilidad

3.2.1. Introducción

Iniciamos esta sección con el cálculo de los puntos de equilibrio en el sistema de Lorenz. Para $0 < \mu \leq 1$, se observa que el conjunto de puntos de equilibrio consiste en el origen, cuando $\mu > 1$ surgen otros dos puntos de equilibrio, aparte del origen, lo cual sugiere que para $\mu = 1$ ocurre una bifurcación horquilla. No es posible utilizar el teorema de Sotomayor para

comprobar dicha conjetura ya que el sistema de Lorenz no cuenta con términos de orden tres. Es por ello que dividimos el estudio de los puntos de equilibrio en tres casos, para valores del parámetro μ :

1. Cuando $0 < \mu < 1$, el origen es el único equilibrio y es estable.
2. Para $\mu = 1$ sigue habiendo un punto de equilibrio, el cual es no-hiperbólico y se tiene que calcular la variedad central, demostrándose que el origen es estable.
3. Y por último, si $\mu > 1$, gráficamente se observa que el $(0, 0, 0)$ es inestable, mientras surgen otros dos puntos de equilibrio $C_{1,2} = \left(\pm 2\sqrt{\frac{2(\mu-1)}{3}}, \pm 2\sqrt{\frac{2(\mu-1)}{3}}, \mu - 1 \right)$. Para $1 < \mu < \frac{470}{19}$ se prueba, utilizando el criterio de Routh, que los valores propios son complejos con parte real negativa por lo cual $C_{1,2}$ son estables.

Por tanto, del pasado análisis y de la observación de que los otros dos equilibrios se colapsan al $(0, 0, 0)$, se concluye que en $\mu = 1$ ocurre una bifurcación horquilla, con lo cual se termina el análisis del origen. Posteriormente pasamos a estudiar los otros puntos de equilibrio, de donde sólo es suficiente estudiar uno de ellos ya que el sistema de Lorenz bajo la transformación $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ es simétrico. Se utiliza el criterio de Routh para obtener exactamente los valores dónde cambia de signo la parte real de los valores propios, se ubica el caso para el cual los valores propios pasan de ser reales a complejos. Para la bifurcación tipo Hopf se encuentra el valor del parámetro para el cual ocurra ésta, para lo cual también se verifica cuándo los valores propios atraviesan el eje imaginario, después se calcula la variedad central para encontrar el coeficiente de Lyapunov, y se concluye que la órbita periódica es inestable, y ocurre una bifurcación de Hopf subcrítica.

3.2.2. Puntos de equilibrio

Para el análisis de estabilidad del sistema de Lorenz empecemos por encontrar los puntos de equilibrio de dicho sistema, igualando el campo a cero, recordemos estas ecuaciones.

$$\dot{x} = 10(y - x) \quad (3.4)$$

$$\dot{y} = \mu x - y - xz \quad (3.5)$$

$$\dot{z} = xy - \frac{8z}{3} \quad (3.6)$$

De (3.4) obtenemos que $y = x$, sustituyendo este resultado en (3.5) obtenemos por un lado que $x = 0$ y por otro $z = \mu - 1$. Ahora si sustituímos esto en (3.6), obtendríamos para $x = 0$, $z = 0$. Por lo tanto tendríamos que $(0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio. Si sustituímos $z = \mu - 1$ y $x = y$ en (3.6), encontramos que $x = \pm 2\sqrt{\frac{2(\mu-1)}{3}}$, entonces tendríamos que existen otros dos puntos de equilibrios que son:

$$C_{1,2} = \left(\pm 2\sqrt{\frac{2(\mu-1)}{3}}, \pm 2\sqrt{\frac{2(\mu-1)}{3}}, \mu - 1 \right)$$

3.2.3. Variedad central y bifurcación horquilla en el origen

Si observamos $C_{1,2}$ en el valor de $\mu = 1$ se colapsan al origen, quedando un único punto de equilibrio: $(0, 0, 0)$. De donde se puede asumir que ocurre una bifurcación horquilla. Esto no se puede comprobar con el teorema de Sotomayor, ya que el sistema de Lorenz no cuenta con términos de orden tres, por lo cual se encontrarán los valores propios, y se hará variar el parámetro de bifurcación μ , y observemos qué pasa con la estabilidad de dicho equilibrio. Para analizar el origen, tendremos que calcular la matriz Jacobiana del sistema y evaluarla en el origen, por lo cual obtenemos:

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ \mu - z & -1 & -x \\ y & x & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ \mu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Calculemos los valores propios, encontrando la ecuación característica, de la siguiente forma

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda + \frac{8}{3}\right) (\lambda^2 + 11\lambda + 10 - 10\mu) = 0$$

Entonces, los valores propios son, $\lambda_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 40(1-\mu)}}{2}$ y $\lambda_3 = -\frac{8}{3}$. Pasemos a estudiar los valores propios $\lambda_{1,2}$ para el caso en que $0 < \mu < 1$. Observe que,

$$\lambda^2 + 11\lambda + 10 - 10\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1}{10}(\lambda + 1)(\lambda + 10).$$

Observando la figura 3.7 es fácil concluir que si $0 < \mu < 1$ entonces $\lambda_{1,2} < 0$. Concluimos entonces que

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \\ \lambda_3 = -\frac{8}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow E^s = \mathbb{R}^3$$

Bajo estos argumentos podemos concluir que $(0, 0, 0)$ es un nodo estable para $0 < \mu < 1$.

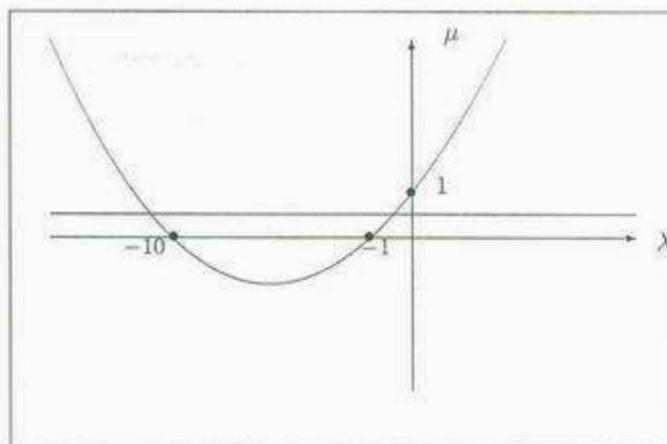


Figura 3.7: $\mu = \frac{1}{10}(\lambda + 1)(\lambda + 10)$

Ahora bien, si $\mu = 1$, de nuevo por la figura 3.7, concluimos que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 < 0$, por lo tanto,

$$\lambda_1 = 0 \} \Rightarrow E^c = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_2 < -\frac{11}{3} \\ \lambda_3 = -\frac{8}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow E^s = \mathbb{R}^2$$

Entonces, para $\mu = 1$ el origen es un punto de equilibrio no-hiperbólico, por lo tanto no se puede utilizar el teorema de Hartman-Grobman (Apéndice A). Por tanto, para conocer la estabilidad de $(0, 0, 0)$ tendremos que calcular la variedad central, lo que nos ocupará más tiempo, por lo cual haremos un paréntesis antes de calcular dicha variedad. Para ver qué ocurre cuando $\mu > 1$, observemos la figura 3.8 y concluyamos que

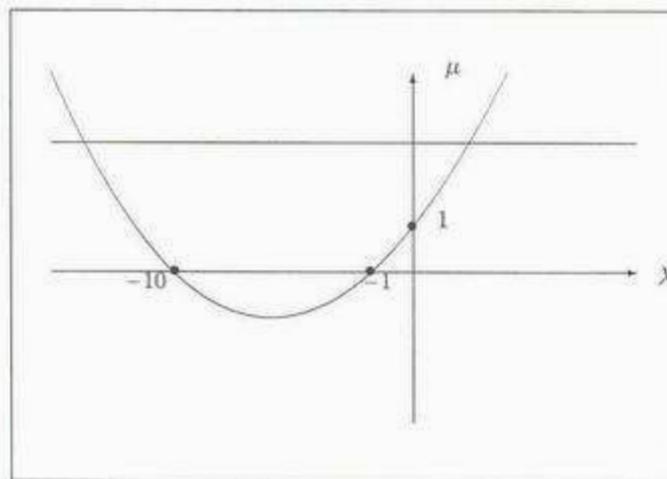


Figura 3.8: $\mu = \frac{1}{10}(\lambda + 1)(\lambda + 10)$

$$\lambda_1 > 0 \} \Rightarrow E^u = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_2 < 0 \\ \lambda_3 = -\frac{8}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow E^s = \mathbb{R}^2$$

Entonces, para $\mu > 1$ tenemos que el origen es un punto de equilibrio tipo silla.

Ahora regresemos al caso $\mu = 1$, y encontremos la variedad central $W_{loc}^c(0)$ apéndice (B), para terminar con el análisis del origen, dar una conclusión a cerca de su estabilidad y si ocurre alguna bifurcación. Empezaremos encontrando los vectores propios, para $\lambda_1 = 0$ tenemos $Av_1 = 0$ de donde,

$$\begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = 0$$

Desarrollando lo anterior tenemos el siguiente sistema de donde obtendremos el vector propio v_1

$$-10v_{11} + 10v_{12} = 0 \quad (3.7)$$

$$v_{11} - v_{12} = 0 \quad (3.8)$$

$$-\frac{8v_{13}}{3} = 0 \quad (3.9)$$

de donde se observa rápidamente que el primer vector propio es

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el siguiente vector tomemos en cuenta el siguiente valor propio $\lambda_2 = -11$, de aquí que de $(A - \lambda_2 I)v_2 = 0$ obtenemos,

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix} = 0$$

de donde se obtiene el sistema siguiente

$$v_{21} + 10v_{22} = 0 \quad (3.10)$$

$$v_{21} + 10v_{22} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{25v_{23}}{3} = 0 \quad (3.12)$$

Como (3.10) y (3.11) son la misma ecuación y $v_{23} = 0$, otro vector propio sería

$$v_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para tener la matriz P , la cual será nuestra matriz cambio de base, sólo nos falta v_3 , el que obtendremos del valor propio $\lambda_3 = -\frac{8}{3}$. Entonces, si desarrollamos $(A - \lambda_3 I)v_3 = 0$ tenemos,

$$\begin{pmatrix} -\frac{22}{3} & 10 & 0 \\ 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{pmatrix} = 0$$

lo cual nos genera el siguiente sistema,

$$-\frac{22v_{31}}{3} + 10v_{32} = 0 \quad (3.13)$$

$$v_{31} + \frac{5v_{32}}{3} = 0 \quad (3.14)$$

de donde, v_{33} es libre, escojamos $v_{33} = 1$, de (3.14) $v_{31} = -\frac{5v_{32}}{3}$, sustituímos en (3.13) y haciendo unos cálculos sencillos tenemos,

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz cambio de base es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{10}{11} & 0 \\ -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y es tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

El siguiente cambio de coordenadas nos permitirá rotar los espacios E^s y E^c ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 - 10w_2 \\ w_1 + w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Ahora, por otra parte, tenemos

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{10}{11} & 0 \\ -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11}x + \frac{10}{11}y \\ -\frac{1}{11}x + \frac{1}{11}y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces, de lo anterior tenemos el sistema siguiente,

$$\begin{aligned}w_1 &= \frac{1}{11}x + \frac{10}{11}y \\w_2 &= -\frac{1}{11}x + \frac{1}{11}y \\w_3 &= z\end{aligned}$$

si y sólo si tenemos el sistema,

$$\begin{aligned}x &= w_1 - 10w_2 \\y &= w_1 + w_2 \\z &= w_3\end{aligned}$$

Ahora derivemos w_1 , w_2 y w_3 , para obtener el sistema en las nuevas coordenadas, sustituyamos primero las derivadas en x, y, z del sistema de Lorenz y de las ecuaciones anteriores para obtener el sistema deseado. Empecemos por derivar w_1 , de donde obtenemos.

$$\begin{aligned}w_1 &= \frac{1}{11}x + \frac{10}{11}y \\ \frac{dw_1}{dt} &= \frac{1}{11} \frac{dx}{dt} + \frac{10}{11} \frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ del sistema de Lorenz en la ecuación anterior y después sustituimos los valores de x, y, z del cambio de coordenadas junto con un poco de álgebra llegamos al siguiente valor de \dot{w}_1 ,

$$\dot{w}_1 = -\frac{10}{11}w_1w_3 + \frac{100}{11}w_2w_3$$

Si realizamos el mismo procedimiento pero ahora para w_2 tenemos que

$$\dot{w}_2 = -\frac{121}{11}w_2 - \frac{1}{11}w_1w_3 + \frac{10}{11}w_2w_3$$

Entonces, para w_3 tendríamos

$$w_3 = z$$

$$\frac{dw_3}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

de donde si sustituimos \dot{z} del sistema de Lorenz y simplificamos obtenemos

$$\dot{w}_3 = w_1^2 - 9w_1w_2 - \frac{8}{3}w_3 - 10w_2^2$$

Por lo tanto tenemos el nuevo sistema en términos de la matriz cambio de base,

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= -\frac{10}{11}w_1w_3 + \frac{100}{11}w_2w_3 \\ \dot{w}_2 &= -11w_2 - \frac{1}{11}w_1w_3 + \frac{10}{11}w_2w_3 \\ \dot{w}_3 &= -\frac{8}{3}w_3 + w_1^2 - 9w_1w_2 - 10w_2^2\end{aligned}$$

Entonces, el sistema anterior lo podemos reescribir de la siguiente manera

$$\dot{w}_1 = 0w_1 - \frac{10}{11}w_1w_3 + \frac{100}{11}w_2w_3 \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{11}w_1w_3 + \frac{10}{11}w_2w_3 \\ w_1^2 - 9w_1w_2 - 10w_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Entonces, para el sistema anterior definimos la variedad central como:

$$W_{loc}^c(0) = \{(w_1, w_2, w_3) : w_2 = h_1(w_1) \text{ y } w_3 = h_2(w_1) \text{ para } |w_1| < \delta\}$$

Para $\delta > 0$ donde $h_1(0) = 0$, $h_2(0) = 0$, $Dh_1(0) = 0$, $Dh_2(0) = 0$. Hagamos

$$A = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$f(w_1, w_2, w_3) = -\frac{10}{11}w_1w_3 + \frac{100}{11}w_2w_3$$

$$g(w_1, w_2, w_3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11}w_1w_3 + \frac{10}{11}w_2w_3 \\ w_1^2 - 9w_1w_2 - 10w_2^2 \end{bmatrix},$$

$$h_1(w_1) = a_1w_1^2 + a_2w_1^3 + \dots$$

$$h_2(w_1) = b_1w_1^2 + b_2w_1^3 + \dots$$

Ahora sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales para $h_1(w_1)$ y $h_2(w_1)$ dada por la ecuación homológica

$$Dh(w_1)[Aw_1 + f(w_1, h(w_1))] - Bh(w_1) - g(w_1, h(w_1)) \equiv 0$$

$$\begin{bmatrix} Dh_1(w_1) \\ Dh_2(w_1) \end{bmatrix} [Aw_1 + f(w_1, w_2, w_3)] - B \begin{bmatrix} h_1(w_1) \\ h_2(w_1) \end{bmatrix} - g(w_1, w_2, w_3) \equiv 0$$

$$\begin{bmatrix} 2a_1w_1 + \dots \\ 2b_1w_1 + \dots \end{bmatrix} \left[-\frac{10}{11}w_1(b_1w_1^2 + \dots) + \frac{100}{11}(b_1w_1^2 + \dots)(a_1w_1^2 + \dots) \right] -$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1w_1^2 + \dots \\ b_1w_1^2 + \dots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{11}w_1(b_1w_1^2 + \dots) + \frac{10}{11}(a_1w_1^2 + \dots)(b_1w_1^2 + \dots) \\ w_1^2 - 9w_1(a_1w_1^2 + \dots) - 10(a_1w_1^2 + \dots)^2 \end{bmatrix} \equiv 0$$

Desarrollando lo anterior y tomando en cuenta sólo los términos de orden tres llegamos a

$$\begin{pmatrix} 11a_1w_1^2 + 11a_2w_1^3 + \frac{1}{11}b_1w_1^3 + \mathcal{O} + \dots \\ \frac{8}{3}b_1w_1^2 + \frac{8}{3}b_2w_1^3 - w_1^2 - 9a_1w_1^3 + \mathcal{O} + \dots \end{pmatrix} \equiv 0$$

Entonces, si resolvemos el sistema para a_1 , a_2 y b_1 , b_2 tenemos que

$$11a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \tag{3.18}$$

$$11a_2 + \frac{1}{11}b_1 = 0 \Rightarrow 11a_2 = -\frac{1}{11}b_1 \tag{3.19}$$

$$\tag{3.20}$$

$$\frac{8}{3}b_1 - 1 = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{3}{8} \tag{3.21}$$

$$\frac{8}{3}b_2 + 9a_1 = 0 \Rightarrow b_2 = 0$$

de (3.19)

$$11a_2 = -\frac{1}{11}b_1 \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{968}$$

por tanto, concluimos lo siguiente

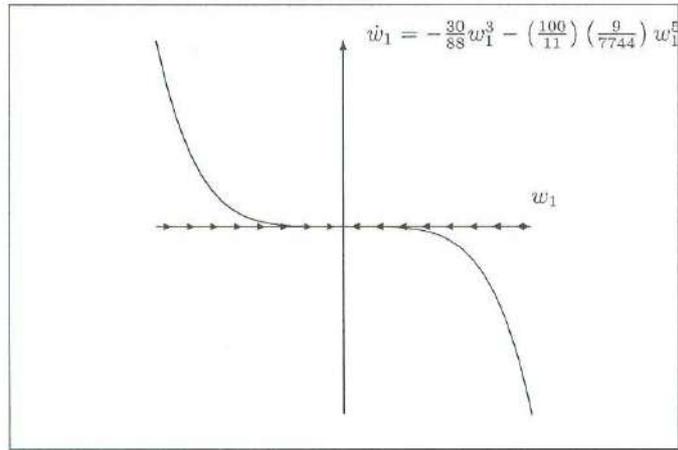
$$\begin{aligned} w_2 &= h_1(w_1) = a_1w_1^2 + a_2w_1^3 + \dots = -\frac{3}{968}w_1^3 + \mathcal{O}(w_1^4) \\ w_3 &= h_2(w_1) = b_1w_1^2 + b_2w_1^3 + \dots = \frac{3}{8}w_1^2 + \mathcal{O}(w_1^3) \end{aligned}$$

Ahora el comportamiento de las soluciones sobre $W_{loc}^c(0)$ del sistema dado por (3.15) y (3.17) está determinada por la ecuación diferencial sobre E^c .

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= Aw_1 + f(w_1, h_1(w_1), h_2(w_2)), \quad w_1 \in E^c, \quad |w_1| < \varepsilon. \\ &= -\frac{10}{11}w_1h_2(w_1) + \frac{100}{11}h_1(w_1)h_2(w_1) \\ &= -\frac{10}{11}w_1\left(\frac{3}{8}w_1^2\right) + \frac{100}{11}\left(-\frac{3}{968}w_1^3\right)\left(\frac{3}{8}w_1^2\right) + \dots \\ &= -\frac{30}{88}w_1^3 - \left(\frac{100}{11}\right)\left(\frac{9}{7744}\right)w_1^5 + \dots \end{aligned}$$

Entonces, gráficamente se representaría como en la figura 3.9. Entonces, concluimos que las soluciones sobre la variedad central son estables, por lo tanto, el origen para el valor de $\mu = 1$ es estable.

Hagamos un recuento de lo que se hizo en esta sección para poder dar una conclusión. Para $0 < \mu \leq 1$ el origen es un equilibrio estable, pero cuando $\mu > 1$ el $(0, 0, 0)$ es inestable. Al mismo tiempo que los equilibrios $\mathcal{C}_{1,2}$, antes de colapsarse al origen, para $1 < \mu < \frac{470}{19}$ generan valores propios que tienen parte real negativa por lo cual estos equilibrios son estables. Este último argumento es hecho basándose en el criterio de Routh, el cual se desarrolla en la siguiente sección. Entonces de lo anterior podemos concluir que en el valor de $\mu = 1$ ocurre una bifurcación horquilla, la cual se muestra en la figura 3.10.

Figura 3.9: Comportamiento de las soluciones sobre $W_{loc}^c(0)$

3.2.4. Bifurcación de Hopf

Ahora pasaremos a estudiar la estabilidad de \mathcal{C}_1 , el estudio de \mathcal{C}_2 se omitirá ya que, como probaremos líneas abajo, el sistema de Lorenz es simétrico bajo la transformación $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$, entonces sólo bastará estudiar \mathcal{C}_1 .

Considere la transformación $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (-x, -y, z)$, y el sistema de Lorenz

$$\dot{w} = f(w),$$

donde $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $f(w) = \begin{pmatrix} f_1(w) \\ f_2(w) \\ f_3(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10(y-x) \\ \mu x - y - xz \\ xy - \frac{8z}{3} \end{pmatrix}$. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$

solución del sistema de Lorenz, entonces debemos probar que $T(\alpha(t))$ también es solución del sistema de Lorenz, es decir, debemos probar que

$$\frac{d}{dt}(T(\alpha(t))) = f(T(\alpha(t))).$$

Observe que

$$\frac{d}{dt}(T(\alpha(t))) = DT(\alpha(t))\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{x} \\ -\dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(\alpha(t)) \\ -f_2(\alpha(t)) \\ f_3(\alpha(t)) \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, observe ahora que

$$f(T(\alpha(t))) = \begin{pmatrix} f_1(T(\alpha(t))) \\ f_2(T(\alpha(t))) \\ f_3(T(\alpha(t))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(-x(t), -y(t), z(t)) \\ f_2(-x(t), -y(t), z(t)) \\ f_3(-x(t), -y(t), z(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(\alpha(t)) \\ -f_2(\alpha(t)) \\ f_3(\alpha(t)) \end{pmatrix}.$$

concluimos entonces que el sistema de Lorenz posee la simetría dada por la transformación T .

Observe que el equilibrio $\mathcal{C}_1 = \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{-1+\mu}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{-1+\mu}, -1+\mu\right)$ sólo está definido para

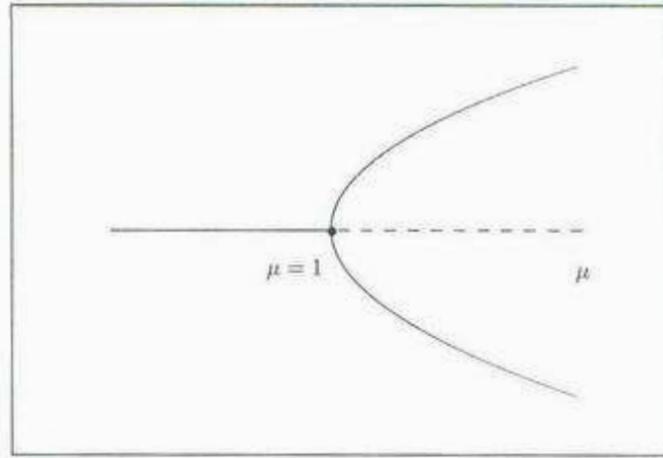


Figura 3.10: Bifurcación tipo horquilla

valores de $\mu > 1$. Utilizando el paquete Mathematica se encontró numéricamente que para $\mu > 1$ pasaba de tener valores propios reales negativos a complejos con parte real negativa y posteriormente complejos con parte real positiva. De lo anterior se sospecha que pudiera tener una bifurcación tipo Hopf; para obtener exactamente los valores dónde cambia de signo la parte real de los valores propios utilizamos el criterio de Routh Apéndice (D). Encontramos $P(\lambda)$ para \mathcal{C}_1 . Empecemos el análisis evaluando la Jacobiana

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ \mu - z & -1 & -x \\ y & x & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

en \mathcal{C}_1

$$S = Df(\mathcal{C}_1) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{-1+\mu} \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{-1+\mu} & 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{-1+\mu} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Entonces desarrollando $|S - \lambda I| = 0$, se tendría que:

$$\begin{vmatrix} -10 - \lambda & 10 & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & -2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{-1+\mu} \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{-1+\mu} & 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{-1+\mu} & -\frac{8}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante y con un poco de álgebra obtenemos la ecuación característica siguiente,

$$\lambda^3 + \frac{41}{3}\lambda^2 + \lambda\left(\frac{80}{3} + \frac{8\mu}{3}\right) + \frac{160}{3}(\mu - 1) = 0$$

De lo cual tenemos que $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{41}{3}$, $a_2 = \frac{80}{3} + \frac{8\mu}{3}$, $a_3 = \frac{160}{3}(\mu - 1)$ y como $\mu > 1$ tenemos que $a_i > 0$, para $i = 0, \dots, 3$, y sólo nos faltaría verificar que $b_1, c_1 > 0$. Para lo cual

es suficiente mostrar que $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$, para entender mejor el criterio observe el apéndice D. Entonces $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$, lo cual se ve rápidamente del siguiente desarrollo

$$\frac{41}{3}\left(\frac{80}{3} + \frac{8\mu}{3}\right) - \frac{160}{3}(\mu - 1) > 0$$

aplicando una álgebra adecuada obtenemos que para los valores de $\mu < \frac{470}{19}$ cumplen con que $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$. Entonces con el criterio de Routh encontramos que para $1 < \mu < \frac{470}{19}$ los valores propios tienen parte real negativa, por lo tanto podemos decir que \mathcal{C}_1 es estable para estos valores de μ .

Como $P(\lambda)$ es de orden tres tenemos tres raíces, pero nos interesa saber cuándo este polinomio pasa de tener todas sus raíces reales a tener una real y dos complejas. Para esto tenemos que hacer $P'(\lambda) = 0$ y encontrar sus dos raíces, que será donde $P(\lambda)$ alcanza un mínimo o un máximo. Aunque sólo nos interesa donde alcance el mínimo ya que como $P(\lambda)$ es una cúbica, el mínimo es el candidato para que toque primero el eje λ , por el hecho de que utilizando el paquete Mathematica 4.1 se encontró el resultado anterior, que a continuación se verificará geométrica y analíticamente. Empecemos con el análisis, entonces tenemos

$$P'(\lambda) = 3\lambda^2 + \frac{82}{3}\lambda + \frac{8}{3}(\mu + 10)$$

Ahora, teniendo en cuenta el discriminante, comencemos con el análisis geométrico.

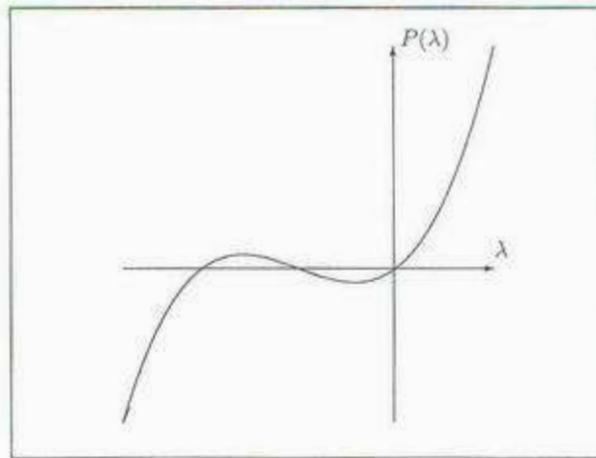
$$b^2 - 4ac$$

Como los valores propios están dados por

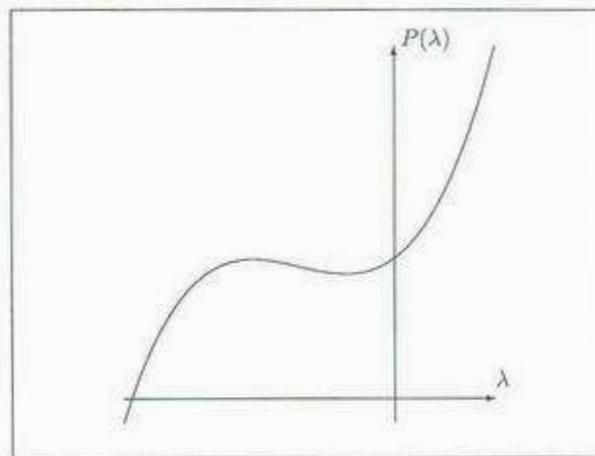
$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

tenemos que

1. Si $b^2 - 4ac > 0$ $P'(\lambda)$ tiene dos raíces reales, lo cual significa que $P(\lambda)$ tiene dos puntos críticos, un máximo y un mínimo que, gráficamente, tendríamos lo que se observa en la figura 3.11.

Figura 3.11: λ contra $P(\lambda)$

2. Si $b^2 - 4ac = 0$ $P'(\lambda)$ tiene una raíz real por lo cual podemos decir que $P(\lambda)$ tiene sólo un punto crítico, véase la figura 3.12.

Figura 3.12: λ contra $P(\lambda)$

3. Si $b^2 - 4ac < 0$ no tiene ninguna raíz real, obsérvese la figura 3.

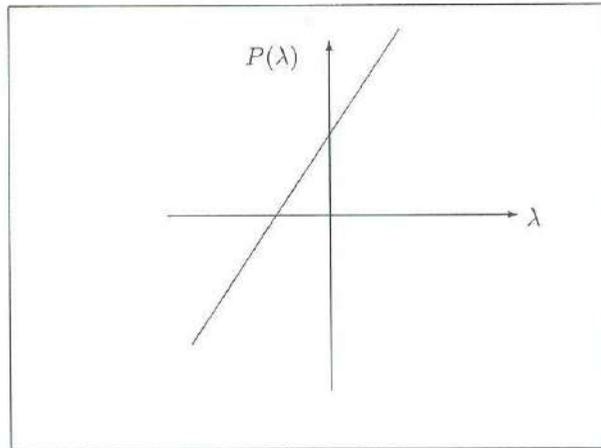


Figura 3.13: Ninguna raíz

Como nos interesa averiguar cuándo el polinomio pasa de tener tres raíces reales a tener una real y dos complejas, gráficamente lo que quisiéramos encontrar es cuándo λ_2 está sobre el eje λ , véase la figura 3.14.

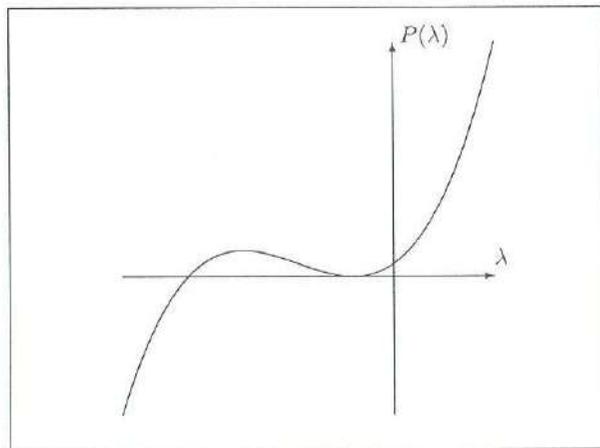


Figura 3.14: λ contra $P(\lambda)$

Como λ_2 es donde $P'(\lambda) = 0$, y alcanza un mínimo $P(\lambda)$, evaluemos $P(\lambda_2)$, pero antes calculemos λ_2 .

Como

$$P'(\lambda) = 3\lambda^2 + \frac{82}{3}\lambda + \frac{8}{3}(\mu + 10)$$

tenemos que

$$a = 3, \quad b = \frac{82}{3}, \quad c = \frac{8}{3}(\mu + 10)$$

entonces

$$\lambda_2 = \frac{\frac{82}{3} + \sqrt{\frac{4}{9}(41)^2 - 32(\mu + 10)}}{6}$$

de donde obtenemos

$$\lambda_2 = -\frac{41}{9} + \frac{1}{9}\sqrt{961 - 72\mu}$$

Ahora, calculemos $P(\lambda_2)$, entonces tendríamos

$$P(\lambda_2) = \lambda_2^3 + \frac{41}{3}\lambda_2^2 + \frac{8}{3}(\mu + 10)\lambda_2 + \frac{160}{3}(\mu - 1)$$

igualamos $P(\lambda_2) = 0$ y resolvemos para μ , y obtenemos $\mu = 1,34562$, que es precisamente el valor de μ a partir de el cual los valores propios son uno real y dos complejos.

Como lo habíamos dicho anteriormente, los valores propios complejos pasaban de tener parte real negativa a tener parte real positiva, entonces podía ocurrir una bifurcación tipo Hopf, lo cual pasaremos a analizar.

Ya conocemos el polinomio característico de $Df(\mathcal{C}_1)$:

$$\lambda^3 + \frac{41}{3}\lambda^2 + \lambda\left(\frac{80}{3} + \frac{8\mu}{3}\right) + \frac{160}{3}(\mu - 1) = 0$$

Del cual nos interesa averiguar el valor del parámetro μ para el cual ocurra la bifurcación tipo Hopf, es decir, cuando un par de valores propios tengan la forma $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Es decir, los valores propios estén colocados en el eje imaginario como se muestra a continuación en la figura (3.15).

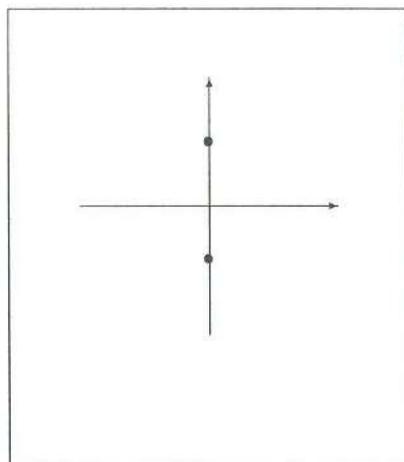


Figura 3.15: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$

Entonces tendríamos que

$$\lambda = i\omega_0 \Leftrightarrow C = AB, \quad B > 0$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{41}{3} \\ B &= \frac{80}{3} + \frac{8\mu}{3} \\ C &= \frac{160}{3}(\mu - 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto de $C - AB = 0$ con un desarrollo algebraico sencillo obtenemos $\mu = \frac{470}{19}$, entonces para los valores de $1,34562 < \mu < \frac{470}{19}$ un par de valores propios aún no atraviesan el eje imaginario, pero justo en el valor de $\mu = \frac{470}{19}$ un par de valores propios están en el eje imaginario, y para valores de μ mayores un par de valores propios atraviesan el eje imaginario, lo que se había observado numéricamente. A continuación se verificará analíticamente que, en efecto, atraviesan el eje imaginario. Con la fórmula para la derivada en los sistemas en \mathbb{R}^3 , $\alpha'(\mu_0)$ la cual nos dirá si los valores propios atraviesan el eje imaginario y en que dirección lo hacen, sólo tendremos que ver si $\alpha'(\mu_0) \neq 0$. Véase en el Apéndice E y la ecuación E.5 para el cálculo de la velocidad de cruce, para más claridad del siguiente desarrollo.

Utilicemos en el sistema de *Lorenz* dicha fórmula.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10y - 10x \\ \mu x - y - xz \\ -\frac{8}{3}z + xy \end{pmatrix}$$

Ya sabemos que los otros dos puntos de equilibrio son

$$C_{1,2} = \left(\pm\sqrt{\frac{8}{3}(\mu - 1)}, \pm\sqrt{\frac{8}{3}(\mu - 1)}, \mu - 1 \right)$$

Si recordamos la matriz de derivadas parciales y la evaluamos en C_1 , recordemos que sólo se hará para este punto de equilibrio ya que es simétrico al punto C_2 , entonces tenemos

$$\begin{aligned} Df(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ \mu - z & -1 & -x \\ y & x & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \\ A(\mu) = Df(P_1, \mu) &= \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\frac{8}{3}(\mu - 1)} \\ \sqrt{\frac{8}{3}(\mu - 1)} & \sqrt{\frac{8}{3}(\mu - 1)} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora definamos

$$\begin{aligned} a(\mu) &= -\text{tr}(A(\mu)) \\ b(\mu) &= C(\mu) \\ c(\mu) &= -\det(A(\mu)) \end{aligned}$$

donde

$$|A(\mu)| = -10 \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3}(\mu - 1) \right) - 10 \left(-\frac{8}{3} + \frac{8}{3}(\mu - 1) \right)$$

$$|A(\mu)| = -10 \left(\frac{8}{3}\mu \right) - 10 \left(-\frac{16}{3} + \frac{8}{3}\mu \right)$$

$$|A(\mu)| = \frac{160}{3} - 20 \left(\frac{8}{3} \right) \mu$$

Por lo tanto $c'(\mu) = \frac{160}{3}$.

$$b(\mu) = \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3}(\mu - 1) \right) + \frac{80}{3}$$

$$b(\mu) = \frac{8}{3}\mu + \frac{8}{3}$$

Entonces $b'(\mu) = \frac{8}{3}$, de aquí que

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{\frac{160}{3} + \lambda_0 \left(\frac{8}{3} \right)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)} = \frac{\frac{8}{3}(\lambda_0 + 20)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)}$$

Recuerde el polinomio característico siguiente

$$\lambda^3 + \frac{41}{3}\lambda^2 + \lambda \left(\frac{80}{3} + \frac{8\mu}{3} \right) + \frac{160}{3}(\mu - 1) = 0$$

Entonces $\lambda_0 = -\frac{41}{3}$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{80}{3} + \frac{8\mu}{3}}$, por lo tanto si $\mu = 1$ tendríamos:

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{\frac{8}{3} \left(-\frac{41}{3} + 20 \right)}{2 \left(\left(-\frac{41}{3} \right)^2 + \left(\frac{80}{3} + \frac{8\mu}{3} \right) \right)} = \frac{\frac{152}{9}}{\frac{3410}{9}} = \frac{76}{1956}$$

Entonces si $\mu \geq 1$ tenemos que $\alpha'(\mu_0) > 0$, por lo tanto los valores propios atraviesan el eje imaginario de izquierda a derecha, como se muestra gráficamente a continuación:

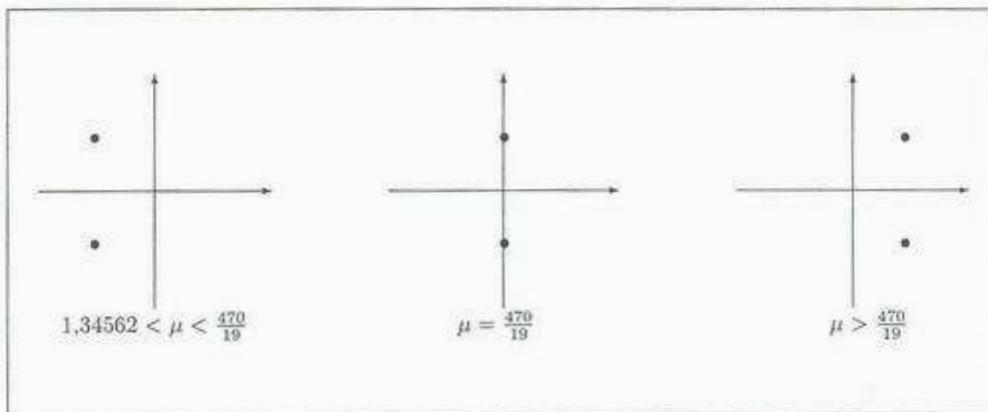


Figura 3.16: Seguimiento de los valores propios cuando atraviesan el eje imaginario

Ahora, si evaluamos $Df(C_1, \mu)$ donde $\mu = \frac{470}{19}$ tendríamos

$$Df(C_1, \mu) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -2\sqrt{\frac{902}{57}} \\ 2\sqrt{\frac{902}{57}} & 2\sqrt{\frac{902}{57}} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

De aquí que los valores propios estarían dados por

$$|Df(C_1, \mu) - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -10 - \lambda & 10 & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & -2\sqrt{\frac{902}{57}} \\ 2\sqrt{\frac{902}{57}} & 2\sqrt{\frac{902}{57}} & -\frac{8}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Entonces, los valores propios serían uno real y dos imaginarios puros, de donde se verifica el hecho de que el valor de $\mu = \frac{470}{19}$ coloca los valores propios en el eje imaginario. Donde dichos valores son $\lambda_1 = -\frac{41}{3}$ y $\lambda_{2,3} = \pm 4\sqrt{\frac{110}{19}}i$. Encontramos la variedad central para calcular el coeficiente de Lyapunov, para esto traslademos el punto de equilibrio al origen con el siguiente cambio de coordenadas.

$$x = x_1 + 2\sqrt{\frac{902}{57}}$$

$$y = x_2 + 2\sqrt{\frac{902}{57}}$$

$$z = x_3 + \frac{451}{19}$$

entonces el nuevo sistema está dado por

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = -10 \left(2\sqrt{\frac{902}{57}} + x_1 \right) + 10 \left(2\sqrt{\frac{902}{57}} + x_2 \right)$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = -2\sqrt{\frac{902}{57}} + \frac{470}{19} \left(2\sqrt{\frac{902}{57}} + x_1 \right) - x_2 - \left(2\sqrt{\frac{902}{57}} + x_1 \right) \left(\frac{451}{19} + x_3 \right)$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = \left(2\sqrt{\frac{902}{57}} + x_1 \right) \left(2\sqrt{\frac{902}{57}} + x_2 \right) - \frac{8}{3} \left(\frac{451}{19} + x_3 \right)$$

Del campo anterior tenemos la matriz de derivadas parciales siguiente,

$$B = Dg(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 - x_3 & -1 & -2\sqrt{\frac{902}{57}} - x_1 \\ 2\sqrt{\frac{902}{57}} + x_2 & 2\sqrt{\frac{902}{57}} + x_1 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Ahora evaluemos B en $(0, 0, 0)$

$$B(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -2\sqrt{\frac{902}{57}} \\ 2\sqrt{\frac{902}{57}} & 2\sqrt{\frac{902}{57}} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Entonces los valores propios son

$$\lambda_1 = -\frac{41}{3}, \quad \lambda_2 = 4i\sqrt{\frac{110}{19}}, \quad \lambda_3 = -4i\sqrt{\frac{110}{19}}$$

de lo anterior tenemos que los vectores propios son los siguientes. Para $\lambda = -\frac{41}{3}$ sería

$$v_1 = \begin{pmatrix} -15\sqrt{\frac{33}{1558}} \\ \frac{11\sqrt{\frac{33}{1558}}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

de la misma manera para $\lambda_2 = 4\sqrt{\frac{110}{19}}i$ nos quedaría

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-380\sqrt{123}-11i\sqrt{257070}}{123(44i\sqrt{5}+\sqrt{418})} \\ \frac{-\sqrt{\frac{3}{41}}(288-i\sqrt{2090})}{44i\sqrt{5}+\sqrt{418}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_3 = -4\sqrt{\frac{110}{19}}i$ tendríamos

$$v_3 = \begin{pmatrix} \frac{-380\sqrt{123}+11i\sqrt{257070}}{123(-44i\sqrt{5}+\sqrt{418})} \\ \frac{-\sqrt{\frac{3}{41}}(288+i\sqrt{2090})}{-44i\sqrt{5}+\sqrt{418}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora sea

$$P = (Im(v_3) \quad Re(v_3) \quad v_1)$$

Entonces tenemos que P sería

$$P = \begin{pmatrix} \frac{19\sqrt{\frac{5}{123}}}{9} & -\frac{190\sqrt{\frac{38}{1353}}}{459} + \frac{110\sqrt{\frac{418}{123}}}{459} & -15\sqrt{\frac{33}{1558}} \\ \frac{35\sqrt{\frac{5}{123}}}{9} & -\frac{16\sqrt{\frac{38}{1353}}}{17} + 10\sqrt{\frac{418}{123}} & \frac{11\sqrt{\frac{33}{1558}}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y $Q = P^{-1}$ quedaría de la siguiente forma

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3419\sqrt{\frac{123}{5}}}{47779} & \frac{2086\sqrt{615}}{47779} & -\frac{96\sqrt{2090}}{47779} \\ \frac{70\sqrt{51414}}{47779} & -\frac{38\sqrt{51414}}{47779} & \frac{41547}{47779} \\ -\frac{70\sqrt{51414}}{47779} & \frac{38\sqrt{51414}}{47779} & \frac{6232}{47779} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $Q.B.P$ sería la matriz por bloques siguiente

$$Q.B.P = \begin{pmatrix} 0 & -4\sqrt{\frac{110}{19}} & 0 \\ 4\sqrt{\frac{110}{19}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{41}{3} \end{pmatrix}$$

Como el coeficiente de Lyapunov está dado por:

$$a = \frac{1}{16\omega_0} (R_1 + \omega_2 R_2)$$

de donde ω_0 es el número que acompaña a la parte imaginaria, R_1, R_2 son las derivadas parciales de $g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3), g_3(x_1, x_2, x_3)$. La variedad central está dada por la siguiente forma

$$\omega(t) = h(z_1(t), z_2(t))$$

y por lo tanto

$$\dot{\omega} = \frac{\partial h}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2} \dot{z}_2$$

donde

$$\omega = h(z_1, z_2) = a_1 z_1^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_2^2 + \dots, \quad (3.22)$$

de los cuales sólo escogemos los términos de orden 2.
Ahora sea el cambio de base

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix}$$

Calculemos

$$P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{pmatrix}$$

$$PZ = \begin{pmatrix} -15\sqrt{\frac{33}{1558}}w + \frac{19}{9}\sqrt{\frac{5}{123}}z_1 + \left(-\frac{190\sqrt{\frac{38}{1353}}}{459} + \frac{110\sqrt{\frac{418}{123}}}{459}\right)z_2 \\ \frac{11}{2}\sqrt{\frac{33}{1558}}w + \frac{35}{9}\sqrt{\frac{5}{123}}z_1 + \left(-\frac{16\sqrt{\frac{38}{1353}}}{17} + \frac{10\sqrt{\frac{418}{123}}}{153}\right)z_2 \\ w + z_2 \end{pmatrix}$$

De lo anterior obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}
 y_1 &= -15\sqrt{\frac{33}{1558}}w + \frac{19}{9}\sqrt{\frac{5}{123}}z_1 + \left(-\frac{190\sqrt{\frac{38}{1353}}}{459} + \frac{110\sqrt{\frac{418}{123}}}{459}\right)z_2 \\
 y_2 &= \frac{11}{2}\sqrt{\frac{33}{1558}}w + \frac{35}{9}\sqrt{\frac{5}{123}}z_1 + \left(-\frac{16\sqrt{\frac{38}{1353}}}{17} + \frac{10\sqrt{\frac{418}{123}}}{153}\right)z_2 \\
 y_3 &= w + z_2
 \end{aligned}$$

Ahora, multipliquemos la matriz inversa por nuestro campo

$$Q \cdot \begin{pmatrix} g_1(y_1, y_2, y_3) \\ g_2(y_1, y_2, y_3) \\ g_3(y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix}$$

esto, para definir las funciones, en términos de nuestras nuevas variables, que nos ayudarán a encontrar la variedad central:

$$f_{11}(z_1, z_2, w)$$

$$f_{22}(z_1, z_2, w)$$

$$f_{33}(z_1, z_2, w)$$

de donde con un desarrollo algebraico obtenemos

$$f_{11}(z_1, z_2, w) = \frac{2055015\sqrt{\frac{110}{19}}w^2}{1958939} - \frac{5904730wz_1}{17630451} - \frac{106400\sqrt{2090}z_1^2}{158674059}$$

$$+ \frac{155200325\sqrt{\frac{10}{209}}wz_2}{17630451} - \frac{77149690z_1z_2}{158674059} - \frac{\sqrt{\frac{190}{11}}z_2^2}{158674059}$$

$$f_{22}(z_1, z_2, w) = -\frac{284835375w^2}{148879364} - \frac{32691275\sqrt{\frac{55}{38}}wz_1}{35260902} + \frac{46047925z_1^2}{158674059}$$

$$+ \frac{59770wz_2}{17630451} + \frac{1099876\sqrt{2090}z_1z_2}{158674059} + \frac{8743040z_2^2}{158674059}$$

$$f_{33}(z_1, z_2, w) = \frac{7920w^2}{47779} - \frac{2404\sqrt{2090}wz_1}{430011} + \frac{505400z_1^2}{11610297} + \frac{161690wz_2}{430011}$$

$$- \frac{113810\sqrt{\frac{190}{11}}z_1z_2}{11610297} - \frac{8808400z_2^2}{127713267}$$

sustituimos lo anterior en la ecuación $w = h(z_1, z_2) = a_1z_1^2 + a_2z_1z_2 + a_3z_2^2 + \dots$, y factorizamos el resultado obteniendo

$$\left(-\frac{505400}{11610297} + \frac{41a_1}{3} + 4\sqrt{\frac{110}{19}}a_2\right)z_1^2 + \left(\frac{8808400}{127713267} - 4\sqrt{\frac{110}{19}}a_2 + \frac{41a_3}{3}\right)z_1z_2$$

$$+ \left(-\frac{113810\sqrt{\frac{190}{11}}}{11610297} - 8\sqrt{\frac{110}{19}}a_1 + \frac{41a_2}{3} - 8\sqrt{\frac{110}{19}}a_3\right)z_2^2$$

Si resolvemos, obtenemos los valores de a_1, a_2, a_3

$$a_1 = -\frac{3854108200}{15121479148641}$$

$$a_2 = \frac{433485190\sqrt{\frac{190}{11}}}{368816564601}$$

$$a_3 = -\frac{267231260800}{166336270635051}$$

Por lo tanto tenemos que la ecuación de la variedad central es

$$h(z_1, z_2) = -\frac{3854108200}{15121479148641}z_1^2 + \frac{433485190\sqrt{\frac{190}{11}}}{368816564601}z_1z_2 - \frac{267231260800}{166336270635051}z_2^2$$

Ahora definimos

$$G_1 = f_{11}(z_1, z_2, h(z_1, z_2))$$

$$G_2 = f_{22}(z_1, z_2, h(z_1, z_2))$$

para obtener el coeficiente de Lyapunov, recordemos que R_1 y R_2 se expresan de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\partial^3 G_1}{\partial z_1^3}(z_1, z_2) + \frac{\partial^3 G_1}{\partial z_2^3}(z_1, z_2) + \frac{\partial^3 G_2}{\partial z_2 \partial z_1^2}(z_1, z_2) + \frac{\partial^3 G_2}{\partial z_2^3}(z_1, z_2) \\ R_2 &= \frac{\partial^2 G_1}{\partial z_2^2} \partial z_1(z_1, z_2) \frac{\partial^2 G_1}{\partial z_1^2}(z_1, z_2) + \frac{\partial^2 G_1}{\partial z_2^2}(z_1, z_2) - \frac{\partial^2 G_2}{\partial z_2 \partial z_1}(z_1, z_2) \frac{\partial^2 G_2}{\partial z_1^2}(z_1, z_2) \\ &\quad - \frac{\partial^2 G_1}{\partial z_1^2}(z_1, z_2) \frac{\partial^2 G_2}{\partial z_1^2}(z_1, z_2) + \frac{\partial^2 G_1}{\partial z_1^2}(z_1, z_2) \frac{\partial^2 G_2}{\partial z_2^2}(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Sustituyendo $z_1 = 0, z_2 = 0, R_1, R_2$ en la ecuación

$$a = \frac{1}{16\omega_0} (R_1 + \omega_2 R_2)$$

tenemos que

$$a = \frac{1}{16 * 4 \sqrt{\frac{110}{19}}} (R_1 + 4 \sqrt{\frac{110}{19}} R_2)$$

$$a = 0,00936297$$

Entonces por lo anterior concluimos que la órbita periódica es inestable, y ocurre una bifurcación de Hopf Subcrítica, la cual se muestra en el diagrama de la figura 3.17.

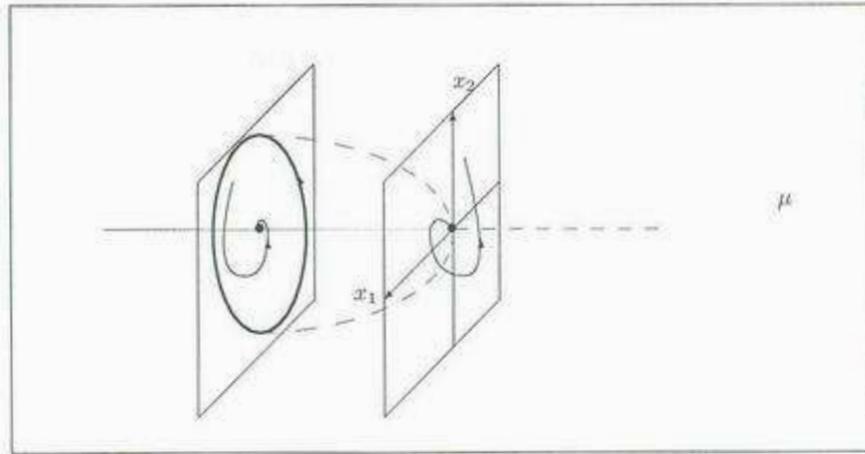


Figura 3.17: Bifurcación de Hopf Subcrítica: Un equilibrio estable y una órbita periódica inestable se funden en un punto de equilibrio inestable.

CAPÍTULO 4

Familia de Sistemas Tipo Lorenz

4.1. Introducción

Motivados por la frecuencia con que aparecen los sistemas no lineales en la naturaleza así como en los procesos industriales se empezaron a estudiar dichos sistemas, en un principio eran pocos los sistemas no lineales conocidos pero fueron surgiendo sistemas tales como el de Duffing, Lorenz, etc. los cuales en lugar de servir para entender el comportamiento de los sistemas no lineales dejaron más dudas de estos, por lo cual era importante tener un repertorio más amplio en el cual apoyarse, así que los investigadores, en su afán de entender a los sistemas no lineales, empezaron a modificar los sistemas ya conocidos para tratar de descubrir otros, tal es el caso del sistema de Lorenz, para el cual daremos una familia de sistemas, a la cual llamaremos *Familia de sistemas tipo Lorenz*, motivados en la aparición de los sistemas de *Chen y Lü*.

En el siguiente capítulo obviamente se tendrá que dar la definición de sistemas tipo Lorenz, se verificara que efectivamente el sistema de *Lorenz* cumple con esta definición así como también el de *Chen*. Se dará una definición para la *Forma canónica de los sistemas de Lorenz generalizados*. Cuatro lemas con el fin de demostrar que existe un cambio de coordenadas lineal que transforma el sistema generalizado en una forma canónica. Y por último se buscarán más sistemas tipo Lorenz uniendo con una recta el sistema anterior con el de *Chen*.

4.2. Sistemas tipo Lorenz

Sería raro empezar la presente sección sin antes dar la definición de *Sistemas tipo Lorenz* por lo cual se dará a continuación

Definición 4.1. Diremos que el siguiente sistema en \mathbb{R}^3 ,

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} x + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad (4.1)$$

con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, con valores propios $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0,$$

es un sistema tipo Lorenz.

Observe que el sistema (4.1) se puede reescribir como

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \lambda_3x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= \lambda_3x_3 + x_1x_2 \end{aligned}$$

Estaríamos algo mal si habláramos de *Sistemas tipo Lorenz* y el sistema de Lorenz no cumpliera con esta definición, por lo tanto, verifiquemos que efectivamente el sistema de Lorenz cumple con lo anterior, así como el de *Chen*, el desarrollo para el sistema de *Lü* se omitirá. Consideremos los siguientes sistemas.

Edward Lorenz(1962)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= cx - xz - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

Con los siguientes parámetros: $a = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $c = 28$

Guanrong Chen(1999)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz - cy \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

$$a = 35, \quad b = 3, \quad c = 28$$

Jinhu Lü(2002)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= -xz - cy \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

$$a = 36, \quad b = 3, \quad c = 15$$

Recuerde que estos valores de los parámetros son los clásicos donde ocurre el atractor extraño.

Entonces para los sistemas anteriores verifiquemos que $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$, en nuestro sistema de Lorenz la matriz A sería:

$$A = \begin{pmatrix} -a & a \\ c & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos los valores propios, para esto encontremos el discriminante ayudados de $\text{tr}(A)$, $|A|$ y usemóslas en la fórmula general.

$$\text{tr}(A) = -(a+1), \quad |A| = a-ac$$

Entonces el polinomio característico es:

$$\lambda^2 + (a+1)\lambda + (a-ac) = 0$$

Y el discriminante nos queda:

$$D = (a+1)^2 - 4(a-ac)$$

De donde con un simple desarrollo obtenemos

$$D = (a-1)^2 + 4ac > 0$$

Por lo tanto los valores propios quedarían:

$$\lambda_1 = \frac{-(a+1) + \sqrt{(a-1)^2 + 4ac}}{2} > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-(a+1) - \sqrt{(a-1)^2 + 4ac}}{2} < 0$$

y

$$\lambda_3 = -b = -\frac{8}{3} < 0$$

Y así el sistema de Lorenz cumple con la definición. En el sistema de Chen la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} -a & a \\ c-a & c \end{pmatrix}$$

Encontremos los valores propios, para esto calculemos el discriminante ayudados de $\text{tr}(A)$, $|A|$ y usemoslo en la fórmula general.

$$\text{tr}(A) = c-a, \quad |A| = -ac - a(c-a) = a^2 - 2ac$$

Entonces el polinomio característico es:

$$\lambda^2 - (c-a)\lambda + (a^2 - 2ac) = 0$$

Y el discriminante nos queda:

$$D = (c-a)^2 - 4(a^2 - 2ac)$$

desarrollando obtenemos

$$D = c^2 + a(6c - 3a) > 0$$

Por lo tanto los valores propios son de la forma:

$$\lambda_1 = \frac{(c-a) + \sqrt{(c-a)^2 - 4(a^2 - 2ac)}}{2} > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{(c-a) - \sqrt{(c-a)^2 - 4(a^2 - 2ac)}}{2} < 0$$

y

$$\lambda_3 = -b = -3 < 0$$

De esta manera el sistema de *Chen* cumple con la definición de *sistemas tipo lorenz* así como también el sistema de *Lü*. A continuación se da una definición más para la *Familia de sistemas tipo Lorenz*, la cual se presenta enseguida.

Definición 4.2 (Forma canónica de los sistemas de Lorenz generalizados).

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} z + ((1, -1, 0)z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & \tau & 0 \end{pmatrix} z$$

donde $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ y $\tau \in (-1, \infty)$

Diremos que un sistema de Lorenz generalizado es no trivial si tiene al menos una solución que no converge al origen, ni al infinito ni tampoco a algún ciclo límite.

En el camino que seguimos para encontrar un cambio de coordenadas lineal que transforme el sistema generalizado en una forma canónica, con la suposición de que $a_{12}a_{21} > 0$ (los coeficientes a_{12} , a_{21} recuerde que corresponden al bloque A dado en la ecuación (4.1), cuando dicha ecuación representa al sistema de Lorenz), por el hecho de tratarse de los sistemas tipo Lorenz, porque por ejemplo si tuviéramos $a_{12}a_{21} < 0$ tendríamos que decir sistemas *Tipo Chen*. Tendremos que dar los siguientes cuatro lemas para lograr nuestro cometido. Este primer lema es la vía para encontrar la parte lineal del sistema canónico, aunque será indispensable dar un segundo lema para este propósito.

Lema 4.1. Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. si v_1 y v_2 son vectores propios de A , con sus respectivos valores propios λ_1, λ_2 , entonces $u_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ son vectores propios de \bar{A} con sus respectivos valores propios λ_1, λ_2 .

Demostración. Sabemos que $Av_i = \lambda_i v_i$ para $i = 1, 2$, por demostrar que

$$\bar{A}u_i = \lambda_i u_i \text{ para } i = 1, 2$$

Ahora como

$$\bar{A}u_i = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i v_i \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i u_i$$

■

Con el lema siguiente, como se dijo anteriormente, es suficiente para lograr la forma canónica de los *Sistemas de Lorenz generalizados* en su parte lineal.

Lema 4.2. Sea $P = (v_1, v_2)$ tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ entonces

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es tal que

$$\bar{P}^{-1}\bar{A}\bar{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Demostración. Como $\bar{P}^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que,

$$\begin{aligned} \bar{P}^{-1}\bar{A}\bar{P} &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1}A & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1}AP & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

El siguiente lema será el que nos ayude a encontrar la forma canónica de la parte no lineal.

Lema 4.3. Considere el sistema

$$\dot{z} = Jz + k_0 c_0 z M z \quad (4.2)$$

$z \in \mathbb{R}^3$, $J, M \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, $c_0^T \in \mathbb{R}^3$, $k_0 \in \mathbb{R}$, entonces, el cambio de coordenadas $w = k_0 z$ transforma (4.2) en

$$\dot{w} = Jw + (c_0 w) M w$$

Demostración. Sea

$$w = k_0 z$$

Si derivamos lo anterior y sustituimos (4.2) obtenemos

$$\dot{w} = Jw + c_0 w M w$$

■

Este es el último lema que se dará para lograr la demostración del teorema que se enunciará al final de la demostración de este lema.

Lema 4.4. Si $a_{12}a_{21} > 0$, entonces $\lambda_1 - a_{11} > 0$

Demostración. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Calculemos los valores propios, para esto ayudémonos de $\text{tr}(A)$, $|A|$, D

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Entonces el discriminante se puede encontrar desarrollando

$$D = (\text{tr}(A))^2 - 4|A|$$

de donde se obtiene

$$D = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21}$$

por lo tanto los valores propios son

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22})}{2} \pm \frac{\sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}$$

De aquí que

$$\lambda_1 - a_{11} = \frac{(a_{22} - a_{11}) + \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} > 0$$

■

Recuerde el siguiente sistema generalizado:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} x + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad \text{con } \lambda_3 \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

Enseguida se enunciará el teorema que se ha venido mencionando a lo largo de esta sección

Teorema 4.5. *Considere el sistema no trivial de Lorenz generalizado (4.3), tal que si $a_{12}a_{21} > 0$ entonces existe un cambio de coordenadas lineal $z = Tx$ que transforma (4.3) en la siguiente forma canónica.*

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} z + ((1, -1, 0) z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & \tau & 0 \end{pmatrix} z$$

donde $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ y $\tau \in (-1, \infty)$

Demostración. Sea el cambio de coordenadas

$$z = \bar{P}^{-1}x, \quad x = \bar{P}z$$

Derivando el cambio de coordenadas obtenemos.

$$\dot{z} = \bar{P}^{-1}\dot{x}$$

Si sustituimos \dot{x} dado en (4.3) y usamos \bar{A} y \bar{B} para facilitar los cálculos obtenemos

$$\dot{z} = \bar{P}^{-1}\bar{A}\bar{P}z + \bar{P}^{-1}x_1\bar{B}\bar{P}z$$

Ahora de los lemas (4.1) y (4.2) tenemos que

$$\bar{P}^{-1}\bar{A}\bar{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Encontremos $P = (v_1, v_2)$ tal que

$$x_1\bar{P}^{-1}\bar{B}\bar{P}z = (1, -1, 0)z \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & \tau & 0 \end{pmatrix} z \quad (4.4)$$

Como buscamos una matriz P entonces

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_{11} \\ \lambda_1 v_{12} \end{pmatrix}$$

Entonces desarrollando tenemos

$$a_{12}v_{12} = (\lambda_1 - a_{11})v_{11}$$

De aquí que

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos el otro vector propio.

$$Av_2 = \lambda_2 v_2, \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 v_{21} \\ \lambda_2 v_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces, de lo anterior tenemos

$$a_{12}v_{22} = (\lambda_2 - a_{11})v_{21}$$

y el vector propio es

$$v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix} \quad a_{12} \neq 0$$

De aquí que la matriz P es,

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{12} & \alpha_2 a_{12} \\ \alpha_1 (\lambda_1 - a_{11}) & \alpha_2 (\lambda_2 - a_{11}) \end{pmatrix}$$

Donde α_1 y α_2 son constantes que habremos de determinar para que se cumpla (4.4)
 Definamos \overline{B} , \overline{P} y \overline{P}^{-1} .

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{b}_2 = (0 \ 1)$. Sea

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\overline{P}^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\overline{P}^{-1}\overline{B}\overline{P} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de lo cual se obtiene

$$\overline{P}^{-1}\overline{B}\overline{P} = \begin{pmatrix} 0 & P^{-1}\overline{b}_1 \\ \overline{b}_2P & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora usaremos el hecho de que $x = \overline{P}z$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{12} & \alpha_2 a_{12} & 0 \\ \alpha_1(\lambda_1 - a_{11}) & \alpha_2(\lambda_2 - a_{11}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

De lo cual sólo nos interesa x_1 .

$$x_1 = \alpha_1 a_{12} z_1 + \alpha_2 a_{12} z_2 = (\alpha_1 a_{12}, \alpha_2 a_{12}, 0)z$$

De lo anterior se puede observar que $\alpha_2 = -\alpha_1$, esto para que vaya adquiriendo la forma de (4.4).

Dejemos lo anterior por un momento, veamos que pasa con $P^{-1}\overline{b}_1$ y \overline{b}_2P . Primero determinemos el $|P|$, P^{-1} .

$$|P| = \alpha_1 \alpha_2 a_{12} (\lambda_2 - a_{11}) - \alpha_1 \alpha_2 a_{12} (\lambda_1 - a_{11})$$

De donde se tiene

$$|P| = \alpha_1 \alpha_2 a_{12} (\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} \alpha_2 (\lambda_2 - a_{11}) & -\alpha_2 a_{12} \\ -\alpha_1 (\lambda_1 - a_{11}) & \alpha_1 a_{12} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$P^{-1}\overline{b}_1 = \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} \alpha_2 (\lambda_2 - a_{11}) & -\alpha_2 a_{12} \\ -\alpha_1 (\lambda_1 - a_{11}) & \alpha_1 a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} \alpha_2 a_{12} \\ -\alpha_1 a_{12} \end{pmatrix}$$

Ahora

$$\bar{b}_2 P = (0, 1) \begin{pmatrix} \alpha_2(\lambda_2 - a_{11}) & -\alpha_2 a_{12} \\ -\alpha_1(\lambda_1 - a_{11}) & \alpha_1 a_{12} \end{pmatrix} = (\alpha_1(\lambda_1 - a_{11}), \alpha_2(\lambda_2 - a_{11}))$$

de aquí que

$$x_1 \bar{P}^{-1} \bar{B} \bar{P} = (\alpha_1 a_{12}, \alpha_2 a_{12}, 0) z \begin{pmatrix} 0 & P^{-1} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 P & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \bar{P}^{-1} \bar{B} \bar{P} = (\alpha_1 a_{12}, \alpha_2 a_{12}, 0) z \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha_2 a_{12}}{|P|} \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_1 a_{12}}{|P|} \\ \alpha_1(\lambda_1 - a_{11}) & \alpha_2(\lambda_2 - a_{11}) & 0 \end{pmatrix}$$

Como anteriormente también se observa que $\alpha_2 = -\alpha_1$, y entonces podemos factorizar de la siguiente manera.

$$x_1 \bar{P}^{-1} \bar{B} \bar{P} = \frac{\alpha_1^2 a_{12}^2}{|P|} (1, -1, 0) z \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1(\lambda_1 - a_{11})}{\frac{\alpha_1^2 a_{12}^2}{|P|}} = \frac{|P|(\lambda_1 - a_{11})}{\alpha_1 a_{12}} = -\frac{\alpha_1^2 a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 - a_{11})}{\alpha_{12}}$$

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_1(\lambda_2 - a_{11})}{\frac{\alpha_1^2 a_{12}^2}{|P|}} = -\frac{|P|(\lambda_2 - a_{11})}{\alpha_1 a_{12}} = \frac{\alpha_1^2 a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - a_{11})}{\alpha_{12}}$$

Entonces necesitamos que

$$\beta_1 = -\alpha_1^2(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 - a_{11}) = 1$$

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - a_{11})} \quad (4.5)$$

La ecuación (4.5) está bien definida ya que $(\lambda_1 - \lambda_2) > 0$ por la definición (4.3), $(\lambda_1 - a_{11}) > 0$ por el lema (4.4).

$$\beta_2 = \alpha_1^2(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - a_{11}) = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - a_{11})} (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - a_{11})$$

$$= -\frac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_1 - a_{11}}$$

Tomemos $\lambda_1 - \lambda_2 = \epsilon > 0$, entonces

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \epsilon \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.6) en $\tau = -\frac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_1 - a_{11}}$ tenemos:

$$\tau = -\frac{\lambda_1 - a_{11} - \epsilon}{\lambda_1 - a_{11}}$$

$$\tau = -1 + \frac{\epsilon}{\lambda_1 - a_{11}}$$

Como $\lambda_1 - a_{11} > 0$ por el lema (4.4), de aquí que $\tau > -1$. ■

4.3. Como encontrar más sistemas tipo Lorenz.

La motivación para esta sección como se dijo en la introducción de este capítulo es tener más sistemas no lineales que fuesen caóticos. Volvamos a considerar de nueva cuenta los sistemas de *Lorenz*, *Chen* y *Lü* que ya fueron mencionados anteriormente.

Edward Lorenz(1962)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= cx - xz - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

Con los siguientes parámetros $a = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $c = 28$.

Guanrong Chen(1999)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz - cy \\ \dot{z} &= xy - bz \\ a &= 35, \quad b = 3, \quad c = 28\end{aligned}$$

Jinhu Lü(2002)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= -xz - cy \\ \dot{z} &= xy - bz \\ a &= 36, \quad b = 3, \quad c = 15\end{aligned}$$

Trataremos de encontrar una recta que una el sistema de *Lorenz* (p_0) con el sistema de *Chen* (p_1), gráficamente esto se ve de la siguiente manera.

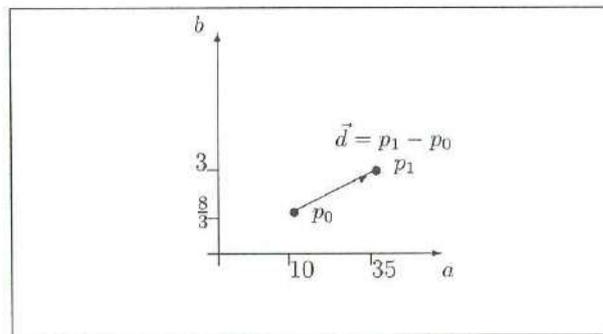


Figura 4.1: Recta que une al sistema de *Lorenz* y *Chen*

Entonces la parametrización de la recta es

$$\begin{aligned}q(\alpha) &= p_0 + \alpha(p_1 - p_0) \\ q(\alpha) &= (10, \frac{8}{3}) + \alpha(25, \frac{1}{3})\end{aligned}$$

Cuando estamos en el sistema de *Lorenz* tenemos $p_0 = q(0) = (10, \frac{8}{3})$ y cuando estamos en el sistema de *Chen* tenemos $p_1 = q(1) = (35, 3)$ entonces $q(\alpha) = (10 + 25\alpha, \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\alpha)$

Ahora los coeficientes en \dot{y} de x, y para el sistema de *Lorenz* son $(c, -1)$, entonces $(28, -1)$, para *Chen* son $(c - 35, c)$, $(-7, 28)$. Entonces

$$\begin{aligned}x(\alpha) &= p_0 + \alpha(p_1 - p_0) \\x(\alpha) &= (28 - 35\alpha, -1 + 29\alpha)\end{aligned}$$

Sistema en general

$$\dot{x} = (10 + 25\alpha)(y - x) \quad (4.7)$$

$$\dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (-1 + 29\alpha)y \quad (4.8)$$

$$\dot{z} = xy - \left(\frac{8 + \alpha}{3}\right)z \quad (4.9)$$

y $\alpha \in [0, 1]$

Ahora verifiquemos que el sistema dado por (4.7), (4.8) y (4.9) cumple con la definición, es decir cumple que es un *Sistema tipo Lorenz*, además observe que éste se puede reescribir como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(10 + 25\alpha) & (10 + 25\alpha) & 0 \\ (28 - 35\alpha) & (-1 + 29\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{8 + \alpha}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Para que lo anterior cumpla con la definición 4.3 solo falta verificar que $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$, para lo cual haremos uso del paquete *Mathematica*, el cual se usará para dar una conclusión geométrica. De la ecuación anterior se observa rápidamente que la matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} -(10 + 25\alpha) & (10 + 25\alpha) \\ (28 - 35\alpha) & (-1 + 29\alpha) \end{pmatrix}$$

Para la cual los valores propios son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-11 + 4\alpha \pm \sqrt{1201 + 2372\alpha - 584\alpha^2} \right)$$

Grafiquemos $-\lambda_2, \lambda_1$ y $-\lambda_3$, lo cual se observa en la figura 4.2

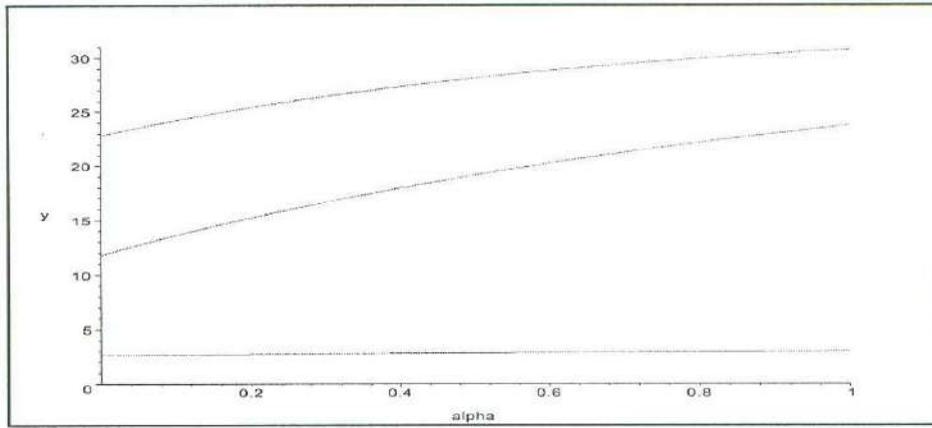


Figura 4.2: Gráficas de $-\lambda_2$, λ_1 y $-\lambda_3$, los cuales aparecen en el mismo orden, de arriba hacia abajo.

Entonces gráficamente se observa que para $\alpha \in [0, 1]$ los valores propios son positivos. Con lo cual se concluye que el sistema en general dado por (4.7), (4.8) y (4.9) es un sistema tipo Lorenz. Lo cual nos lleva a la siguiente pregunta, ¿para toda α , es posible llevar el sistema antes mencionado a la forma canónica?. La respuesta es dada por la figura 4.3 De la figura anterior se observa que para $\alpha \in [0, .8)$ el sistema puede ser llevado a la forma

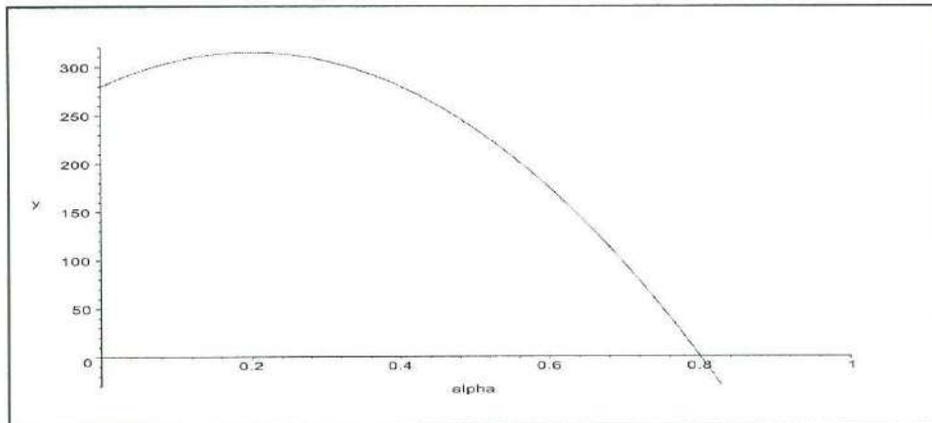


Figura 4.3: α contra $(10 + 25\alpha)(28 - 35\alpha)$.

canónica, mientras que para los valores de $\alpha \in [.8, 1]$ esto no es posible.

CAPÍTULO 5

Sistema de Duffing

5.1. Introducción

La ecuación de duffing es una ecuación diferencial para modelar un oscilador de doble pozo tal como el sistema mecánico magneto-elástico. Este sistema consiste en una viga colocada verticalmente entre dos imanes, con el extremo superior fijo, y el extremo inferior libre para oscilar.

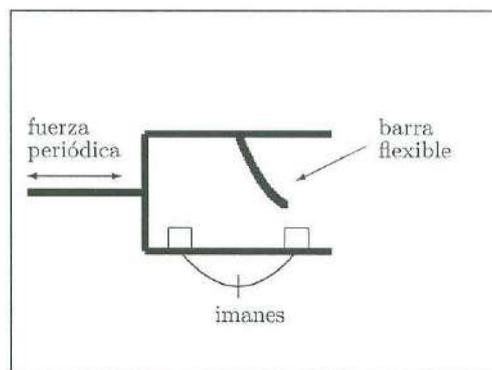


Figura 5.1: Oscilador mecánico de Duffing

La viga, será atraída a uno de los dos imanes, y dada una cierta velocidad oscilará sobre ese imán hasta que la fricción lo pare. Cada uno de los imanes crea un punto fijo donde la viga puede venir a parar sobre ese imán y permanecer en equilibrio. Sin embargo, cuando el sistema entero es sacudido por una fuerza periódica, la viga puede saltar hacia atrás de un imán a otro de una manera aparentemente al azar. Dependiendo de que tan grande sea la fuerza que sacude, no puede haber puntos fijos estables y ningún ciclo fijo estable en el

sistema. Este sistema se puede modelar matemáticamente por la ecuación,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} - x + x^3 = F \cos(\omega t)$$

Según lo demostrado por Moon y Colmes (1979). Esta ecuación se conoce como la ecuación de Duffing.

5.2. El Oscilador de Duffing Controlado por el Sistema Unificado

El título de la presente sección sugiere una forma de controlar el sistema de Duffing, eso significaría que se pudiera manipular un sistema caótico, pero realmente lo que se tiene es una forma de pasar del sistema de Duffing al sistema unificado (que por supuesto es caótico) y viceversa, ya con esta aclaración pareciera que no se avanza mucho, pero si se quisiera que el sistema de Duffing tuviera cierta propiedad del sistema unificado, se pudiera obtener vía una transformación lineal, lo que se pudiera tomar como un cierto tipo de control hacia el sistema de Duffing.

El familiar oscilador de Duffing puede ser controlado por el sistema canónico de Lorenz y Chen. Aquí, una similar conexión entre el oscilador de Duffing y el sistema unificado puede ser encontrado.

Teorema 5.1. *El oscilador de Duffing puede ser controlado*

$$\frac{d^2x_d}{dt^2} + \mu \frac{dx_d}{dt} + (\epsilon x_d^2 - 1)x_d = -ux_d \quad (5.1)$$

con el parámetro $\mu = 11 - 4\alpha$ y el controlador dinámico retroalimentado u (ecuación (5.7)) satisfactorio

$$\frac{du}{dt} = \lambda_3 u + \epsilon(\lambda_3 + 50\alpha + 20)x_d^2 - \lambda_3(150\alpha^2 - 615\alpha - 269) \quad (5.2)$$

es un difeomorfismo con el sistema unificado, vía la siguiente transformación lineal:

$$x_d = \frac{x}{\sqrt{2\epsilon}} \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

$$\frac{dx_d}{dt} = \frac{(25\alpha + 10)(y - x)}{\sqrt{2\epsilon}} \quad (5.5)$$

$$(5.6)$$

$$u = (25\alpha + 10)z - \frac{x^2}{2} + 150\alpha^2 - 615\alpha - 269 \quad (5.7)$$

Alternativamente, el sistema (5.1) puede ser transformado en el sistema unificado usando el parámetro $\mu = \frac{11-4\alpha}{\sqrt{-150\alpha^2+615\alpha+270}}$ y el control dinámico retroalimentado

$$\frac{du}{dt} = \frac{\lambda_3 u + \epsilon(\lambda_3 + 50\alpha + 20)x_d^2}{\sqrt{-150\alpha^2 + 615\alpha + 270}}, \quad (5.8)$$

con la siguiente transformación lineal:

$$x_d = \frac{x}{\sqrt{2\epsilon(-150\alpha^2 + 615\alpha + 270)}} \quad (5.9)$$

(5.10)

$$\frac{dx_d}{dt} = \frac{(25\alpha + 10)(y - x)}{(-150\alpha^2 + 615\alpha + 270)\sqrt{2\epsilon}} \quad (5.11)$$

(5.12)

$$u = \frac{(25\alpha + 10)z - \frac{x^2}{2}}{-150\alpha^2 + 615\alpha + 270}, \quad (5.13)$$

y con el siguiente reescalamiento del tiempo:

$$t = \theta\sqrt{-150\alpha^2 + 615\alpha + 270}, \quad (5.14)$$

Demostración. Lo que haremos para la demostración de este teorema será pasar del sistema de Duffing al sistema canónico de Lorenz, es decir, encontrar \dot{x} , \dot{y} y \dot{z} del sistema mencionado al último. Entonces de (5.3) tenemos

$$x = \sqrt{2\epsilon}x_d$$

de aquí que

$$\dot{x} = \sqrt{2\epsilon}\dot{x}_d$$

$$\dot{x} = \sqrt{2\epsilon} \frac{(25\alpha + 10)(y - x)}{\sqrt{2\epsilon}} = (25\alpha + 10)(y - x)$$

Ahora de (5.5) tenemos

$$y = \frac{\sqrt{2\epsilon} \frac{dx_d}{dt}}{25\alpha + 10} + x$$

de donde tenemos derivando

$$\dot{y} = \frac{\sqrt{2\epsilon} \frac{d^2x_d}{dt^2}}{25\alpha + 10} + \dot{x}$$

Para simplificar las operaciones hagamos el cambio de variables $w = -150\alpha^2 + 615\alpha + 269$ y $a = 25\alpha + 10$ entonces de la ecuación anterior tenemos

$$\dot{y} = \frac{1}{a} \left(\sqrt{2\epsilon} \left(-ux_d - \mu \frac{dx_d}{dt} - (\epsilon x_d^2 - 1)x_d \right) \right) + a(y - x)$$

Sustituyendo u , μ , w , a y x_d obtenemos

$$\dot{y} = \frac{\sqrt{2\epsilon}}{a} \left(-\left(az - \frac{x^2}{2} - w\right) \frac{x}{\sqrt{2\epsilon}} - \frac{(11-4\alpha)a(y-x)}{\sqrt{2\epsilon}} - \left(\epsilon \frac{x^2}{2\epsilon} - 1\right) \frac{x}{\sqrt{2\epsilon}} \right) + a(y - x)$$

$$\dot{y} = \frac{\sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{2\epsilon}} \left(-\left(zx - \frac{x^3}{2a} - \frac{wx}{a} - (11-4\alpha)(y-x) - \frac{x^3}{2a} + \frac{x}{a} \right) \right) + a(y - x)$$

$$\dot{y} = -xz + \frac{x^3}{2a} + \frac{wx}{a} - (11-4\alpha)y + (11-4\alpha)x - \frac{x^3}{2a} + \frac{x}{a} + (25\alpha+10)y - (25\alpha+10)x$$

De la ecuación anterior, podemos llegar a \dot{y} del sistema unificado

$$\dot{y} = -xz + (28 - 35\alpha)x + (29\alpha - 1)y$$

Por último de (5.7) tenemos

$$z = \frac{u + \frac{x^2}{2} + w}{a}$$

de donde derivando obtenemos

$$\dot{z} = \frac{\frac{du}{dt} + \frac{xdx}{dt}}{a}$$

Si sustituimos 5.2 y \dot{x} del sistema de Lorenz en la ecuación anterior se tiene

$$\dot{z} = \frac{1}{a} (\lambda_3 u + \epsilon(\lambda_3 + 50\alpha + 20)x_d^2 - \lambda_3(-w) + xa(y - x))$$

Ahora si en lo anterior sustituimos u , x_d^2 tenemos

$$\dot{z} = \frac{1}{a} \left(\lambda_3 \left(az - \frac{x^2}{2} - w \right) + \epsilon(\lambda_3 + 50\alpha + 20) \frac{x^2}{2\epsilon} + w + xa(y - x) \right)$$

de la ecuación obtenida se tiene desarrollando

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \frac{1}{a} \left(a\lambda_3 z - \lambda_3 \frac{x^2}{2} + 150\alpha^2 \lambda_3 - 615\alpha \lambda_3 - 269\lambda_3 + \frac{\lambda_3 x^2}{2} + 25\alpha x^2 \right. \\ & \left. + 10x^2 - 150\lambda_3 \alpha^2 + 615\alpha \lambda_3 + 269\lambda_3 + xa(y - x) \right) \end{aligned}$$

De donde se obtiene la última ecuación

$$\dot{z} = \lambda_3 z + xy$$

Ahora como las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2\epsilon} x_d \\ y &= \frac{\sqrt{2\epsilon} \frac{dx_d}{dt}}{25\alpha + 10} + x \\ z &= \frac{u + \frac{x^2}{2} + w}{a} \end{aligned}$$

son la inversa, además es suave y diferenciable concluimos que existe un difeomorfismo entre el oscilador de Duffing y el sistema canónico de Lorenz y Chen.

Otra manera de demostrar el teorema es la siguiente. Hagamos el mismo cambio de variables.

$$w = -150\alpha^2 + 615\alpha + 270$$

$$a = 25\alpha + 10$$

Ahora de la ecuación (5.9) tenemos

$$x = x_d \sqrt{2\epsilon w}$$

a la cual si tomamos la derivada con respecto a θ obtenemos

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx_d}{d\theta} \sqrt{2\epsilon w}$$

donde

$$\frac{x_d}{d\theta} = \frac{\frac{dx_d}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\frac{a(y-x)}{w\sqrt{2\epsilon}}}{\frac{1}{\sqrt{w}}} = \frac{a\sqrt{w}(y-x)}{w\sqrt{2\epsilon}}$$

de aquí que

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{a\sqrt{w}(y-x)}{w\sqrt{2\epsilon}} \sqrt{2\epsilon w} = a(y-x) = (25\alpha + 10)(y-x)$$

De la ecuación (5.11) tenemos

$$y = \frac{1}{a} \left(\frac{dx_d}{dt} w\sqrt{2\epsilon} \right) + x$$

derivando lo anterior con respecto a θ tendríamos

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{w\sqrt{2\epsilon}}{a} \frac{d\left(\frac{dx_d}{dt}\right)}{d\theta} + \frac{dx}{d\theta}$$

Para simplificar el desarrollo calculemos por separado $\frac{d\left(\frac{dx_d}{dt}\right)}{d\theta}$

$$\frac{d\left(\frac{dx_d}{dt}\right)}{d\theta} = \frac{-ux_d - \mu \frac{dx_d}{dt} - (\epsilon x_d^2 - 1)x_d}{\frac{1}{\sqrt{w}}}$$

Ahora si lo sustituimos en $\frac{dy}{d\theta}$ obtenemos

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{w\sqrt{w}\sqrt{2\epsilon}}{a} \left[-ux_d - \mu \frac{dx_d}{dt} - (\epsilon x_d^2 - 1)x_d \right] + \frac{dx}{d\theta}$$

para facilitar los cálculos desarrollemos lo anterior por partes

$$ux_d = \left(\frac{az - \frac{x^2}{2}}{w} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{2\epsilon w}} \right) = \frac{azx}{w\sqrt{2\epsilon w}} - \frac{x^3}{2w\sqrt{2\epsilon w}}$$

$$\mu \frac{dx_d}{dt} = \left(\frac{11 - 4\alpha}{\sqrt{w}} \right) \left(\frac{a(y-x)}{w\sqrt{2\epsilon}} \right) = \frac{a(11 - 4\alpha)(y-x)}{w\sqrt{w}\sqrt{2\epsilon}}$$

$$(\epsilon x_d^2 - 1)x_d = \left(\epsilon \frac{x^2}{2\epsilon w} - 1 \right) \frac{x}{\sqrt{2\epsilon w}} = \frac{x^3}{2w\sqrt{2\epsilon w}} - \frac{x}{\sqrt{2\epsilon w}}$$

Entonces tendríamos que

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{w\sqrt{w}\sqrt{2\epsilon}}{a\sqrt{w}\sqrt{2\epsilon}} \left[-\frac{azx}{w} + x - \frac{a(11 - 4\alpha)(y-x)}{w} \right] + \frac{dx}{d\theta}$$

de aquí se tendría sustituyendo w y a ,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= -zx + \frac{w}{a}x - (11 - 4\alpha)(y-x) + (25\alpha + 10)(y-x) \\ &= -zx + 28x + 35\alpha x - y + 29\alpha y \\ &= -zx + (35\alpha + 28)x + (29\alpha - 1)y \end{aligned}$$

Ahora despejando z de la ecuación (5.13) nos queda

$$z = \frac{1}{a} \left(uw + \frac{x^2}{2} \right)$$

Si derivamos obtenemos

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{a} \left(\frac{du}{d\theta} w + \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{d\theta} \right)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} = \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\lambda_3 u + \epsilon(\lambda_3 + 50\alpha + 20)x_d^2}{\sqrt{w}} \\ &= \lambda_3 u + \epsilon(\lambda_3 + 50\alpha + 20)x_d^2 \end{aligned}$$

Si lo multiplicamos por w tenemos

$$\frac{du}{d\theta} w = w \left[\lambda_3 \frac{1}{w} \left(az - \frac{x^2}{2} \right) + \epsilon(\lambda_3 + 50\alpha + 20) \frac{x^2}{2\epsilon w} \right]$$

lo cual nos lleva a

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} w &= \lambda_3 az + 50\alpha \frac{x^2}{2} + \frac{20}{2} x^2 \\ \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{d\theta} &= x \frac{dx}{d\theta} = xa(y - x) \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{a} \left(\lambda_3 az + 50\alpha \frac{x^2}{2} + 10x^2 + xa(y - x) \right)$$

De donde con un simple desarrollo se obtiene

$$\frac{dz}{d\theta} = \lambda_3 z + xy$$

De la misma manera que la demostración análoga tenemos

$$\begin{aligned} x &= x_d \sqrt{2\epsilon w} \\ y &= \frac{1}{a} \left(\frac{dx_d}{dt} w \sqrt{2\epsilon} \right) + x \\ z &= \frac{1}{a} \left(uw + \frac{x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

el cual es un campo suave y diferenciable, por lo tanto el difeomorfismo se dá. ■

CAPÍTULO 6

Conclusiones

Como este trabajo es un poco extenso hay que tener en cuenta que la conclusión se hará por capítulos. El primer capítulo se toma como introducción del presente trabajo de el cual se desprende que el modelo dominante y casi exclusivo en la ciencias desde su surgimiento en el siglo XVII ha sido el modelo mecanicista y determinista. El determinismo puede ser subvertido de dos maneras: una, por el azar, y la otra por el caos. Por su parte los sistemas caóticos aunque sean deterministas no permiten la predicción por que trayectorias que surgen juntas divergen rápidamente borrando el recuerdo de dicho inicio común. En la naturaleza ciertos fenómenos pueden ser modelados por unas estructuras matemáticas que se denominan sistemas dinámicos y cuyo estado viene definido por una serie de variables que dependen del tiempo (variables de estado) y por una serie de leyes, una dinámica. La representación de los sistemas dinámicos se lleva a cabo en un espacio denominado espacio de fases en el que cada punto define un estado y cada trayectoria una evolución del sistema. Los sistemas dinámicos son conservativos o disipativos, los sistemas disipativos suelen contar con atractores. Los atractores clásicos son:

- a) Un punto fijo.
- b) Una órbita periódica.
- c) Una órbita cuasi-periodica.
- d) Un atractor extraño.

Un conjunto fractal es un conjunto "muy raro" cuya dimensión es intermedia entre una línea y una superficie o entre una superficie y un volumen. Los atractores extraños con estructura fractal que son ejemplos de caos determinista obedecen a dos construcciones: La divergencia de las trayectorias y su confinamiento en un espacio determinado, la sensibilidad de las condiciones iniciales son las responsables del estiramiento del fractal y el confinamiento especial responde el plegado del mismo. El caos surge del orden y un cierto orden puede surgir del caos. Del orden se puede pasar al caos a través de tres caminos principales que suponen los tres la desestabilización de regímenes periódicos por perturbaciones que en lugar de amortiguarse y desaparecer se amplifican: Por duplicación de periodo, por intermitencias, o por la cuasi-periodicidad. En el segundo capítulo se abordan los tipos de bifurcaciones que serán utilizadas. La bifurcación hoquilla es una bifurcación simétrica, la cual consiste en que un único punto fijo se bifurca en tres, las bifurcaciones horquilla pueden clasificarse en dos

grupos importantes: Subcríticas y supercríticas. Se enuncio un teorema debido a Sotomayor, el cual dá condiciones suficientes pero no necesarias para la bifurcación horquilla.

Teorema 6.1 (Sotomayor). *Sea $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, con $f(x_0, \mu_0) = 0$. Supongamos que*

- i) $\frac{\partial f(x_0, \mu_0)}{\partial x}$ posee un valor propio cero, con v un vector propio por la derecha y w por la izquierda. Además, $\frac{\partial f(x_0, \mu_0)}{\partial x}$ posee k valores propios con parte real negativa y $n - k - 1$ con parte real positiva (contando multiplicidades).

ii)

$$\begin{aligned} w^T \left(\frac{\partial f(x_0, \mu_0)}{\partial \mu} \right) &= 0, & w^T \left(\frac{\partial^2 f(x_0, \mu_0)}{\partial x^2} (v, v) \right) &= 0, \\ w^T \left(\frac{\partial^2 f(x_0, \mu_0)}{\partial x \partial \mu} (v) \right) &\neq 0, & w^T \left(\frac{\partial^3 f(x_0, \mu_0)}{\partial x^3} (v, v, v) \right) &\neq 0 \end{aligned}$$

Entonces el sistema sufre la bifurcación horquilla en el punto (x_0, μ_0) .

No es posible utilizar el teorema de Sotomayor para comprobar dicha conjetura ya que el sistema de Lorenz no cuenta con términos de orden tres. Por lo cual se hace un análisis Geométrico y algebraico, para concluir que ocurre una bifurcación horquilla.

Posteriormente se aborda la bifurcación Hopf para lo cual nos hemos centrado en el estudio de los puntos de equilibrio no hiperbólicos. En este contexto, resulta fundamental el teorema de la variedad central, dicha variedad invariante puede ser representada localmente como la gráfica de una función de clase C^r . Cuando el punto de equilibrio es no hiperbólico debido a la presencia de al menos un valor propio real simple nulo, la restricción del sistema original a la variedad central es un sistema de dimensión uno, y si es consecuencia de la presencia de un par de valores propios imaginarios puros, dicha restricción es bidimensional, en el caso de que el equilibrio estacionario sea no hiperbólico debido a la presencia de un par de valores propios imaginarios puros para cierto valor del parámetro del sistema, $\mu = \mu_0$, si se verifica cierta condición de generalidad, traducible en que los valores propios $\lambda(\mu)$ que son imaginarios puros en μ_0 crucen el eje imaginario con velocidad no nula, esto es:

$$d = \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_0} \neq 0 \quad (6.1)$$

En tales circunstancias, el teorema de Hopf asegura la existencia de algunas soluciones periódicas bifurcándose a partir de μ_0 . La estabilidad de las mismas viene determinado por una segunda condición expresada en términos del llamado primer coeficiente de Liapunov, l_1 , una condición suficiente para la existencia de un ciclo límite estable es que $l_1 < 0$, y si $l_1 > 0$, el ciclo límite es inestable. En el primer caso estamos ante una bifurcación de Hopf supercrítica, en el segundo caso, se trata de una bifurcación de Hopf subcrítica, formalicemos lo anterior con el siguiente teorema:

Teorema 6.2 (Hopf (1942)). *Considere la familia uni-paramétrica de ecuaciones diferenciales*

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (6.2)$$

con $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ lo suficientemente suave. Con un punto de equilibrio (x_0, μ_0) y $A(\mu) = D_x F(x_0, \mu)$.

- (i) Si $A(\mu_0)$ posee un único par de valores propios con parte real cero, entonces existe una curva suave de puntos de equilibrio $(x(\mu), \mu)$ con $x(\mu_0) = x_0$. Además, los valores propios $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$ de $A(\mu)$, los cuales se hacen imaginarios en μ_0 , varían suavemente con el parámetro μ .
- (ii) Si $d = \left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} \neq 0$, entonces existe una única variedad central tridimensional, pasando por $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y un sistema de coordenadas suave, cuya expansión en serie de Taylor, hasta grado tres sobre la variedad central, está dado, en forma polar, por la siguiente expresión

$$\dot{r} = (d\mu + l_1 r^2)r, \quad \dot{\theta} = \omega + c\mu + br^2.$$

Si $l_1 \neq 0$ entonces existe una superficie de órbitas periódicas en la variedad central, las cuales tienen tangencia cuadrática con el eigenespacio generado por $\lambda(\mu_0), \bar{\lambda}(\mu_0)$. Si $l_1 < 0$ las órbitas periódicas son estables (caso supercrítico) mientras que si $l_1 > 0$ son inestables (caso subcrítico).

En el tercer capítulo se inicia con el cálculo de los puntos de equilibrio, dado por resultado tres equilibrios. Se divide el estudio del punto en tres casos, para valores del parámetro μ .

1. Cuando $0 < \mu < 1$, y se tiene que es un equilibrio estable.
2. Para $\mu = 1$ el punto de equilibrio es no-hiperbólico y se tiene que calcular la variedad central. Y se obtiene que el origen es estable.
3. Y por último, si $\mu > 1$, gráficamente se observa que el equilibrio es silla-nodo.

Se observó que el sistema de Lorenz bajo la transformación $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ es simétrico, se utiliza el criterio de Routh para obtener exactamente los valores donde cambia de signo la parte real de los valores propios, se ubica el caso para el cual los valores propios pasan de ser reales a complejos. Para la bifurcación tipo Hopf se encuentra el valor del parámetro para el cual ocurra ésta, se calcula la variedad central para encontrar el coeficiente de Liapunov, y se concluye que la órbita periódica es inestable, y ocurre una bifurcación de Hopf subcrítica.

Gran parte del cuerpo de conocimientos que integra la teoría del caos surgió originalmente del estudio de los cambios climáticos y, de hecho, uno de los primeros descubrimientos que dan sustento teórico a esta área de estudio se debe a Edward Lorenz. Cuando Lorenz intentaba modelar el comportamiento del clima mediante la conducta caótica de los gases, tomó unas cuantas de las ecuaciones conocidas como el sistema de Navier-Stokes del campo de la dinámica de fluidos y, al simplificarlas, obtuvo el siguiente sistema tridimensional:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \delta(y - x) \\ \dot{y} &= \mu x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

En estas ecuaciones, δ representa el número de Prandtl, con valor de 10. El parámetro μ representa la diferencia de temperaturas entre la parte inferior y la superior del sistema, con un valor de 28. La variable b representa la relación entre la longitud y la altura de la caja que se emplea para contener el gas, con una diferencia entre temperaturas en los lados opuestos del cilindro, mientras que z representa la desviación del sistema de la línea vertical

graficada correspondiente a la temperatura. En esta primer subsección aparte de la pasada introducción se calcularan los puntos de equilibrios, se estudia la estabilidad del origen como lo sugiere el nombre de la subsección, para esto se recurrirá a argumentos tanto gráficos como algebraicos. Después de todo el análisis se llegó a la conclusión de que las soluciones sobre la variedad central son estables, en la última subsección sólo se analizó el punto de equilibrio C_1 ya que previamente se verificó la simetría del sistema de Lorenz. El análisis de dicho punto de equilibrio nos hará recurrir al uso de el paquete Mathematica 4.1, para tener una idea numérica acerca de los valores propios, de nueva cuenta recurriremos tanto a lo Geométrico como a lo algebraico así como a los criterios de Routh y de la derivada (velocidad de cruce en la bifurcación Hopf). Se calculó el coeficiente de Lyapunov de donde se concluirá que la órbita periódica es inestable, y ocurre una bifurcación de Hopf Subcrítica.

En el capítulo cuatro motivados por la frecuencia con que aparecen los sistemas no lineales en la naturaleza así como en los procesos industriales se empezaron a estudiar dichos sistemas, los investigadores, en su afán de entender a los sistemas no lineales, empezaron a modificar los sistemas ya conocidos para tratar de descubrir otros, tal es el caso del sistema de Lorenz, para el cual dimos una familia de sistemas, a la cual llamamos *Familia de sistemas tipo Lorenz*.

Resumiendo brevemente el último capítulo, se dijo que la ecuación de Duffing es una ecuación diferencial para modelar un oscilador de doble pozo tal como el sistema mecánico magneto-elástico. Este sistema consiste en una viga colocada verticalmente entre dos imanes, con el extremo superior fijo, y el extremo inferior libre para oscilar. Se demostro que oscilador de Duffing puede ser controlado por el sistema canónico de Lorenz y Chen, para éste teorema se dieron dos demostraciones. Al fin y al cabo este trabajo sólo aborda una parte de todo lo que se puede estudiar acerca de este sistema (Sistema de Lorenz), que es muy estudiado en mucha de la bibliografía existente, por lo que invito a los compañeros lectores a complementar el presente trabajo.

APÉNDICE A

Teorema de Hartman-Grobman

Un buen inicio en el análisis de sistemas no lineales es encontrar sus puntos de equilibrio e investigar el comportamiento de las soluciones que inician cercanas a cada uno de ellos. Sea x_0 un punto de equilibrio del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$. Expandiendo en series de Taylor alrededor de x_0 el campo vectorial f , obtenemos

$$\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T D^2 f(x_0)(x - x_0) + \dots$$

Luego, se sigue que el sistema lineal

$$\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0) \tag{A.1}$$

es una buena aproximación del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{A.2}$$

alrededor de $x = x_0$. Haciendo el cambio de variables $\xi = x - x_0$, (A.1) se transforma en

$$\dot{\xi} = Df(x_0)\xi \tag{A.3}$$

Diremos que (A.3) es la *linealización* de (A.2).

¿Qué podemos establecer acerca de las soluciones de (A.2) basados en nuestro conocimiento de las soluciones de (A.3)? Los teoremas de Hartman-Grobman y el de la variedad estable, dos de los resultados más importantes en la teoría local de sistemas dinámicos, responden dicha pregunta.

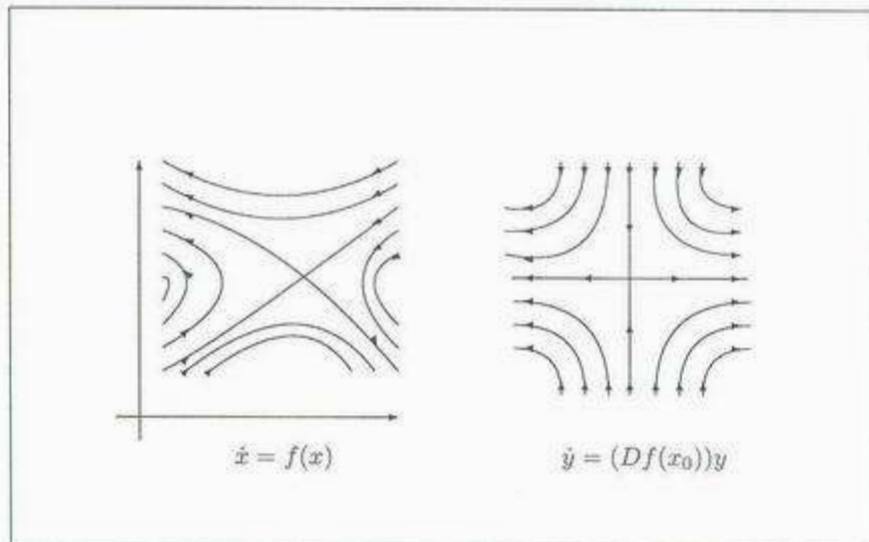
El teorema de Hartman-Grobman es un resultado muy importante en la teoría cualitativa local de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Establece que, bajo ciertas condiciones, en la vecindad de un punto de equilibrio x_0 , el sistema no lineal (A.2) tiene la misma estructura cualitativa que su linealización (A.3).

Diremos que un punto de equilibrio x_0 del campo vectorial f es *hiperbólico* si $Df(x_0)$ no

tiene valores propios con parte real cero.

Considere los sistemas no lineales $\dot{x} = f(x)$ y $\dot{x} = g(x)$. Diremos que son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo que manda órbitas de un sistema en el otro, y es tal que preserva el sentido de las mismas. Si además es tal que preserva la parametrización del tiempo, entonces diremos que son *topológicamente conjugados*.

Teorema A.1 (Hartman-Grobman). *Sea x_0 un punto de equilibrio hiperbólico del campo vectorial f . Entonces el sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ y su linealización $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ son topológicamente conjugados.*



APÉNDICE B

Teorema de la Variedad Central

B.1. La Variedad Estable

Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{B.1}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo suave. Sea $x_0 \in U$ un punto de equilibrio de (B.1). Si el equilibrio es hiperbólico, el teorema de Hartman-Grobman nos resuelve el problema, ya que el comportamiento de las soluciones cercanas a X_0 es topológicamente equivalente a las del sistema lineal.

$$\dot{y} = [Df(x_0)]y \tag{B.2}$$

Sea $A = Df(x_0)_{n \times n}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sus valores propios (pueden ser reales, complejos y estar repetidos).

Teorema B.1. 1) Si $Re(\lambda_i) < 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ entonces el equilibrio x_0 es asintóticamente estable en forma local. Es tipo atractor local (Sumidero).

2) Si $Re(\lambda_i) > 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ entonces el equilibrio x_0 es inestable. Es tipo repulsor local (Fuente).

3) Si $Re(\lambda_i) > 0$ para algún j , y $Re(\lambda_k) < 0$ para algún $k \neq j$ entonces el equilibrio x_0 es inestable. Es un punto tipo silla.

Clasifiquemos ahora los n vectores propios de A , $\{v_1, v_2, \dots, v_{n1}\}$ son vectores propios (inclusive, generalizados) tales que sus respectivos valores propios tienen parte real negativa, mientras que $\{u_1, u_2, \dots, u_{n2}\}$ son vectores propios inclusive generalizados, tales que sus

respectivos valores propios tienen parte real positiva. Observe que $n_1 + n_2 = n$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n_1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Sean $E^s = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n_1} \rangle = \{s_1 v_1 + s_2 v_2, \dots, s_{n_1} v_{n_1} \mid s_1, s_2, \dots, s_{n_1} \in \mathbb{R}\}$, el espacio generado por $\{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$.

$E^u = \langle u_1, u_2, \dots, u_{n_2} \rangle = \{s_1 u_1 + s_2 u_2 + \dots + s_{n_2} u_{n_2} \mid s_1, s_2, \dots, s_{n_2} \in \mathbb{R}\}$ es el espacio generado por $\{u_1, u_2, \dots, u_{n_2}\}$.

Teorema B.2. 1) E^s y E^u son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^n .

2) E^s y E^u son invariantes bajo el flujo de

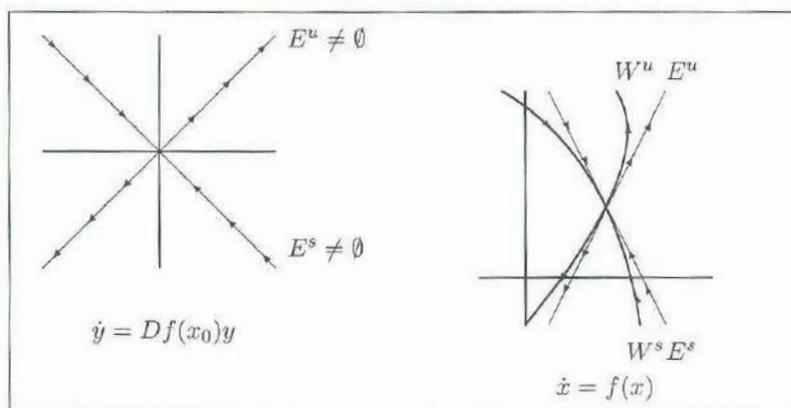
$$\dot{y} = Df(x_0)y \tag{B.3}$$

Es decir, si $z \in E^a$, $a = s$ ó u , entonces la solución de (B.3) $\varphi(t; z)$ es tal que $\varphi(t; z) \in E^a$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

3) Si $z \in E^s \Rightarrow \varphi(t; z) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

4) Si $t \in E^u \Rightarrow \varphi(t; z) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

E^s y E^u son llamados espacios estable e inestable respectivamente.

Figura B.1: E^s y E^u

Analizaremos el caso en el que el punto de equilibrio es no-hiperbólico. En este caso las cosas se complican pues aparece un nuevo subespacio vectorial invariante en el sistema linealizado $\dot{y} = Df(x_0)y$, llamado espacio central, E^c , en donde de entrada, no se sabe cómo es el comportamiento de las soluciones que nacen en E^c .

Asociado al espacio central existe, para el sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ una variedad invariante, llamada la variedad central, donde el comportamiento de las soluciones que nacen en ella, no es conocido *a priori*.

B.2. Teorema de la Variedad Central

Teorema B.3. *Considere la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = f(x)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, y x_0 un punto de equilibrio no-hiperbólico. Entonces existen variedades invariantes, estable e inestable, $W_{loc}^s(x_0)$ y $W_{loc}^u(x_0)$ tangentes a E^s y E^u en x_0 , respectivamente. Además existe una variedad invariante central, $W_{loc}^c(x_0)$, tangente a E^c en x_0 . $W_{loc}^s(x_0)$ y $W_{loc}^u(x_0)$ son únicas, mientras que $W_{loc}^c(x_0)$ no necesariamente es única. $\dim(E^a) = \dim(W^a)$, donde $a = s, u, c$.

El teorema de la variedad central nos garantiza la existencia de la variedad central, pero no nos dice como calcularla.

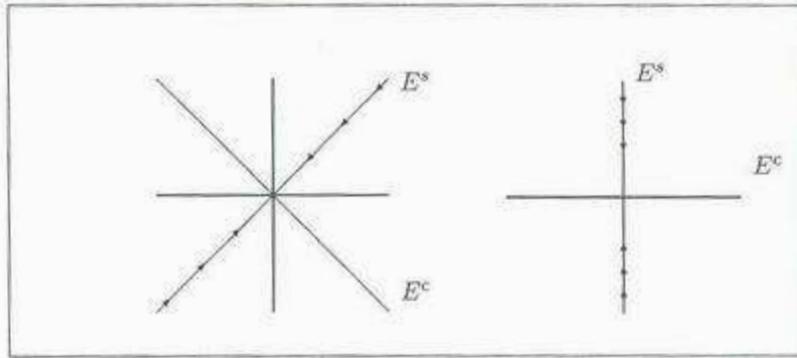
Además no sabemos cómo determinar el comportamiento de las soluciones sobre la variedad central.

Para el cálculo de la variedad central considere la ecuación diferencial:

$$\dot{z} = F(z)$$

$z \in \mathbb{R}^n$, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $z = 0$ un punto de equilibrio no hiperbólico y $E^u = \emptyset$ ($\Leftrightarrow W^u(z_0) = \emptyset$). Sean $E^s = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n_1} \rangle$ y $E^c = \langle w_1, w_2, \dots, w_{n_2} \rangle$ donde v_1, v_2, \dots, v_{n_1} son asociados a

valores propios con parte real negativa, mientras que a w_1, w_2, \dots, w_{n_2} , los asociados a valores propios con parte real cero.



Sea $P = (w_1, w_2, \dots, w_{n_2}, v_1, v_2, \dots, v_{n_1})$ la matriz cambio de base.
Sea $Q = DF(0)$, luego

$$P^{-1}QP = \begin{pmatrix} (A)_{n_2 \times n_2} & 0 \\ 0 & (B)_{n_1 \times n_1} \end{pmatrix}$$

donde $A_{n_2 \times n_2}$ posee los valores propios con parte real negativo y $B_{n_1 \times n_1}$ posee los valores propios con parte real cero. $z \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^{n_2}$ $y \in \mathbb{R}^{n_1}$.

$$P^{-1}z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} (P^{-1}z(t))$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= P^{-1}\dot{z} = P^{-1}(Qz + F_2(z) + \dots) \\ &= P^{-1}Qz + P^{-1}F_2(z) + \dots \\ &= P^{-1}QP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + P^{-1}F_2 \left(P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \dots \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \tilde{F}_2(x, y) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax \\ by \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y) \end{aligned}$$

Definición B.1. Para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

definimos la variedad central como

$$W_{loc}^c = \{(x, y) \mid y = h(x), h(0) = 0, Dh(0) = 0, |x| < \epsilon\}$$

con ϵ pequeño.

El problema ahora es como calcular la función $h(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y(t)) &= \frac{d}{dt}(h(x(t))) \\ \dot{y} &= Dh(x)\dot{x} \\ By + g(x, y) &= Dh(x)[Ax + f(x, y)] \text{ pero } y = h(x) \\ Bh(x) + g(x, h(x)) &= Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] \\ Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

La ecuación anterior también es conocida como ecuación homológica. El siguiente teorema establece condiciones para determinar la estabilidad sobre la variedad central.

Teorema B.4. El comportamiento de las soluciones sobre $W_{loc}^c(0)$ del sistema (B.4) está determinado por la ecuación diferencial sobre E^c

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x)), \quad x \in E^c, \quad |x| < \epsilon$$

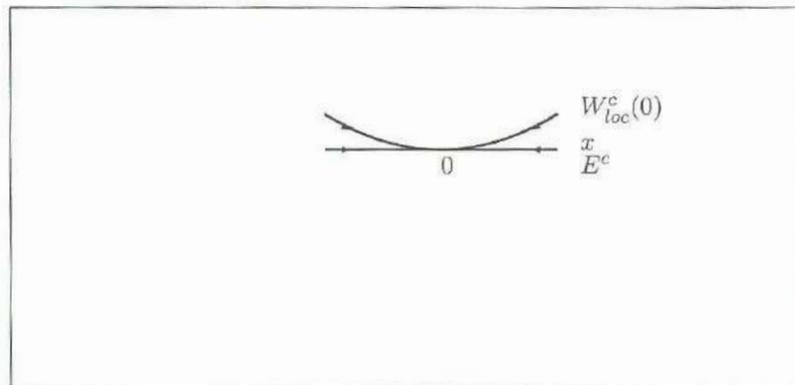


Figura B.2: Comportamiento sobre $W_{loc}^c(0)$

APÉNDICE C

Formas de Jordan

¿Qué ocurre si una matriz no es diagonalizable?. Es decir, si no es semejante a ninguna matriz diagonal. La idea es buscar una matriz semejante “lo más diagonal posible”. Justamente la forma de Jordan representa dicha matriz.

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$, con $\sum_{j=1}^m r_j = n$, su polinomio característico con r_j la multiplicidad del valor propio λ_j . Sea s_j el número de vectores propios que aporta el valor propio $\lambda_j : 1 \leq s_j \leq r_j$ (s_j es llamada *multiplicidad geométrica* del valor propio λ_j). si λ_j es real, entonces aparecen en la forma de Jordan bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

donde el tamaño del bloque depende de la multiplicidad geométrica s_j . Por otro lado, si $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, entonces aparecen en la forma de Jordan bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} D_j & I & & & \\ & D_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & D_j & I \\ & & & & D_j \end{pmatrix}$$

donde $D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\beta_j > 0$, y de nuevo, el tamaño del bloque dependerá de s_j .

Diremos que $v \neq 0$ es un *vector propio generalizado* de A correspondiente a λ_j si, para algún valor de k , con $k = 1, 2, \dots, r_j$, se satisface

$$(A - \lambda_j I)^k v = 0$$

Proposición C.1. Si $A \in M_2(\mathbb{R})$, entonces existe una matriz P no-singular tal que $J = P^{-1}AP$ tiene uno de los siguientes tipos

$$i) J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$ii) J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$iii) J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$iv) J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \beta > 0$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposición C.2. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$, entonces existe una matriz P no-singular tal que $J = P^{-1}AP$ tiene uno de los siguientes tipos

$$i) J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$ii) J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$iii) J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$iv) J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$v) J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$vi) J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$vii) J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \beta > 0$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

El método antes descrito puede generalizarse para obtener la forma canónica de Jordan de cada matriz. Nosotros no haremos esto, pero sugerimos una generalización. Aunque no demostraremos este resultado siempre es posible determinar el número de unos arriba de la diagonal en la forma canónica de Jordan de una matriz de A de $n \times n$.

APÉNDICE D

Criterio de Routh-Hurwitz

D.1. Criterio de Routh

Considere el polinomio

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

Formemos el siguiente arreglo con los coeficientes de $P(x)$

$$\begin{array}{rcccc} 1^\circ & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \cdots \\ 2^\circ & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \cdots \\ 3^\circ & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \cdots \\ 4^\circ & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \cdots \\ 5^\circ & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \cdots \\ & \vdots & & & \\ n-1^\circ & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \cdots \\ n^\circ & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \cdots \\ n+1^\circ & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \cdots \end{array}$$

Donde

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} \\ b_2 &= \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} \\ b_3 &= \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}, \text{ etc.} \\ c_1 &= \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1} \\ c_2 &= \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}, \text{ etc.} \\ d_1 &= \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Teorema D.1. El polinomio $P(x)$ tiene todas sus raíces con parte real negativa si y sólo si $a_i > 0$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$. y $b_1 > 0, c_1 > 0, \dots, a_1 > 0$.

Ejemplo D.1.

$$P(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$$

$$1^\circ \quad a_0 \quad a_2$$

$$2^\circ \quad a_1 \quad 0$$

$$3^\circ \quad b_1$$

$$b_1 = \frac{a_1a_2}{a_1} = a_2$$

Condiciones:

$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$$

Ejemplo D.2.

$$P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

$$1^\circ \quad a_0 \quad a_2 \quad 0$$

$$2^\circ \quad a_1 \quad a_3 \quad 0$$

$$3^\circ \quad b_1 \quad b_2$$

$$4^\circ \quad c_1$$

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1},$$

$$b_2 = 0,$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3}{b_1}$$

Condiciones:

$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \\ a_3 > 0 \\ a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \end{cases}$$

Ejemplo D.3.

$$P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

$$1^\circ \quad a_0 \quad a_2 \quad a_4$$

$$2^\circ \quad a_1 \quad a_3 \quad 0$$

$$3^\circ \quad b_1 \quad b_2 \quad 0$$

$$4^\circ \quad c_1 \quad 0$$

$$5^\circ \quad d_1$$

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1},$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4}{a_1} = a_4,$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1},$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2}{c_1} = b_2 = a_4$$

Condiciones:

$$\begin{cases} a_i > 0, & i = 1, \dots, 4 \\ b_1 > & 0 \\ c_1 > & 0 \\ a_4 > & 0 \end{cases}$$

D.2. Criterio de Hurwitz

Considere el polinomio

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Construyamos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{n-1} & 0 \\ & & & & & & a_n \end{pmatrix}$$

Sea Λ_i el menor principal de A , de orden i , es decir,

$$\Lambda_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ & & & \ddots & a_{i-1} \\ & & \dots & a_{i-2} & a_i \end{vmatrix}_{i \times i}$$

Teorema D.2. *El polinomio $P(x)$ tiene todas sus raíces con parte real negativa si y sólo si $a_i > 0$ $i = 0, 1, \dots, n$ y $\Lambda_i > 0$ $i = 1, 2, \dots, n - 1$.*

Observación: Los dos criterios son equivalentes.

APÉNDICE E

Cálculo de la velocidad de cruce en la bifurcación de Hopf

Daremos una fórmula para cálculo de la velocidad de cruce en los sistemas en \mathbb{R}^3 , la cual nos dirá si los valores propios atraviesan el eje imaginario y en que dirección lo hacen, sólo tendremos que ver si $\alpha'(\mu_0) \neq 0$.

Consideremos $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $Df(P(\mu_0))$, donde $P = P(\mu)$ es un equilibrio, tiene un par de valores propios en el eje imaginario. Entonces

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + b_0\lambda + c_0$$

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda^2 + \omega_0^2)$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda_0\lambda^2 + \omega_0^2\lambda - \lambda_0\omega_0^2$$

Donde $a_0 = -\lambda_0$, $b_0 = \omega_0^2$, $c_0 = -\lambda_0\omega_0^2$. Entonces

$$\begin{cases} \lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu) \\ \lambda(\mu_0) = \pm i\omega_0 \end{cases}$$

Tal que

$$\begin{cases} \alpha(\mu_0) = 0 \\ \beta(\mu_0) = \omega_0 \end{cases}$$

Ahora

$$P(\lambda(\mu)) = \lambda^3 - \text{tr}(A(\mu))\lambda^2 + C(\mu)\lambda - \det(A(\mu))$$

Hagamos

$$a(\mu) = -\text{tr}(A(\mu))$$

$$b(\mu) = C(\mu)$$

$$c(\mu) = -\det(A(\mu))$$

Donde

$$\operatorname{tr}(A(\mu_0)) = \lambda_0$$

$$|A(\mu_0)| = \lambda_0 \omega_0^2$$

entonces $P(\lambda(\mu)) = \lambda^3 + a(\mu)\lambda^2 + b(\mu)\lambda + c(\mu)$, y así tenemos

$$(\alpha(\mu) + i\beta(\mu))^3 + a(\mu)(\alpha(\mu) + i\beta(\mu))^2 + b(\mu)(\alpha(\mu) + i\beta(\mu)) + c(\mu) = 0$$

donde

$$a(\mu_0) = -\lambda_0$$

$$b(\mu_0) = \omega_0^2$$

$$c(\mu_0) = -\lambda_0 \omega_0^2$$

Derivando con respecto a μ tenemos

$$3(\alpha + i\beta)^2(\alpha' + i\beta') + a'(\alpha + i\beta)^2 + 2a(\alpha + i\beta)(\alpha' + i\beta') + b'(\alpha + i\beta) + b(\alpha' + i\beta') + c' = 0$$

si $\mu = \mu_0$, μ_0 coloca los valores propios en el eje imaginario.

$$\alpha = 0, \quad c = -\lambda_0 \omega_0^2$$

$$\beta = \omega_0, \quad a' = ?$$

$$a = -\lambda_0, \quad b' = ?$$

$$b = \omega_0^2, \quad c' = ?$$

Entonces

$$3(-\omega_0^2)(\alpha' + i\beta') + a'(-\omega_0^2) + 2(-\lambda_0)(i\omega_0)(\alpha' + i\beta') + b'(i\omega_0) + (\omega_0^2)(\alpha' + i\beta') + c' = 0$$

$$\begin{cases} -3\omega_0^2\alpha' - \omega_0^2a' + 2\lambda_0\omega_0\beta' + \omega_0^2\alpha' + c' = 0 \\ -3\omega_0^2\beta' - 2\lambda_0\omega_0\alpha' + b'\omega_0 + \omega_0^2\beta' = 0 \end{cases}$$

$$-2\omega_0^2\alpha' + 2\lambda_0\omega_0\beta' = \omega_0^2\alpha' - c'$$

$$2\lambda_0\omega_0\alpha' + 2\omega_0^2\beta' = b'\omega_0$$

Ahora utilizando la regla de cramer obtenemos

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{\begin{vmatrix} \omega_0^2 a' - c' & 2\lambda_0 \omega_0 \\ b' & 2\omega_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2\omega_0^2 & 2\lambda_0 \omega_0 \\ 2\lambda_0 & 2\omega_0 \end{vmatrix}} \quad (\text{E.1})$$

(E.2)

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{2\omega_0(\omega_0^2 a' - c') - 2\lambda_0 \omega_0 b'}{-4\omega_0^2 - 4\omega_0 \lambda_0^2} \quad (\text{E.3})$$

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{2\omega_0(\omega_0^2 a' - c' - \lambda_0 b')}{-4\omega_0(\omega_0^2 + \lambda_0^2)} \quad (\text{E.4})$$

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{c'(\mu_0) + \lambda_0 b'(\mu_0) - \omega_0^2 a'(\mu_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)} \quad (\text{E.5})$$

Ahora ya tenemos una fórmula para calcular la derivada en sistemas de tres dimensiones que nos permitirá saber cuándo los valores propios atraviesan el eje imaginario.

Bibliografía

- [1] T. Kapitaniak, *Chaos for Engineers, Theory, Applications, and Control*, Springer, Second, Revised Edition.
- [2] Pierre Bergé, Yves Pomeau, Christian Vidal, *Order Within Chaos*, A Wiley-Interscience Publication JOHN WILEY & SONS.
- [3] Guanrong Chen, *On a Generalized Lorenz Canonical Form of Chaotic Systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol 12, No. 8 (2002) 1789-1812.
- [4] Jinhu Lu, Guanrong Chen, *Bridge the Gap Between the Lorenz System and Chen System*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol 12, No. 12 (2002) 2917-2926.
- [5] Jinhu Lu, Guanrong Chen, *A New Chaotic Attractor Coined*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol 12, No.3(2002) 659-661.
- [6] J.E.Marsden, M.McCracken, *The Hopf Bifurcation and it Applications*, Springer-Verlag New York 1976.
- [7] Carmen Chicone, *Ordinary Differential Ecuations with Applications*, Springer.
- [8] Shankar Sastry, *Nonlinear Systems Analysis, Stability, and Control*, Springer.
- [9] Lawrence Perko, *Differentisl Ecuations and Dynamical systems*, Second Edition Springer.

