

El Modelo de Inflación Cosmológica: la solución a los problemas de la Planicie y del Horizonte

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora
para la obtención del Título de
Licenciado en Física

por

Dupret Alberto Santana Bejarano



Departamento de Física
Universidad de Sonora
Febrero de 2009

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Agradecimientos

No sé como empezar a agradecer a todas las personas que han estado conmigo dándome apoyo incondicional a lo largo de mi vida. A todos aquellos que han dejado huella sobre mi persona, les agradezco, y este espacio en mi trabajo de tesis está dedicado a ustedes.

Primeramente agradezco a mi madre, la mejor del mundo, pues sin ella nada de mí podría ser lo que es. Es tu imagen la que he tenido como un ejemplo siempre, la que me ha cuidado, apoyado desde niño, y que nunca me ha dado la espalda, mostrándome en cambio toda la ternura que eres capaz de tener hacia mí. Has juntado tus pasos con los míos, has sido fuerte ante la adversidad para mantenerme en pie, me has mostrado a esa persona recia que busca lo mejor para su familia, pero sobretodo me has enseñado tu cara de mujer sensible, la que sufre y llora como todo ser humano. ¡¡¡TE QUIERO MUCHO MAMÁ!!!, tus enseñanzas son un tesoro que llevaré conmigo siempre.

A mis hermanos, pues la vida nos dejó heridos dándonos una amarga lección que nunca pedimos, pero que nos ha enseñado a ser fuertes y mejores cada día. A mi hermana mayor, Jessica, por guiarnos en un camino rocoso; A mi hermano Vitaliano, por estar allí, eres un ejemplo para mí. A Hildegardo, mi hermano de travesuras, el que me enseñó a ser despierto, hoy que estas en Guanajuato no sabes como te extraño. A mi hermano Uriel, quien me enseñó ser un niño grande cuando yo estaba deshecho, hoy que estas lejos, te extraño demasiado. A Edna, gracias por soportarme, por dejarme ver que esa niña tímida, se ha vuelto toda una señorita alegre. A mi hermana Cinthya, todo de tí me parece tan bueno, eres alegre y simpática, te agradezco por darme una lección nueva cada día. Al pequeño del Jaziel, aquél al que todos cuidamos, sé lo difícil que ha sido para tí, pero hoy que estas creciendo me doy cuenta de todo lo que eres capaz de lograr. Finalmente a la más pequeña de todos, mi hermanita Belem, pude pensar que, por ser la menor, serías la que más sufriría pero en vez de eso me has mostrado que lo bueno de la vida es gracias a tí...A todos ustedes, ¡¡¡los quiero!!!!..

Agradezco también, con todas mis energías a todos los maestros que me han enseñado a ser un mejor alumno. Sobretodo quiero darle las gracias al maestro Calcáneo por su comprensión, por

su apoyo y por su paciencia hacia conmigo. Gracias por introducirme en el maravilloso mundo de la Cosmología, pues ha logrado llenar mi curiosidad con temas tan impresionantes, y que sin ello, este trabajo de tesis jamás habría sido posible. Sus enseñanzas han sido muy válidas para mí y espero poder seguir trabajando con usted. También agradezco a la maestra María Elena Tejeda por estar con nosotros todo el tiempo que necesitamos. Para usted va esta tesis maestra por todas las enseñanzas que tomé de su persona durante los cursos que me impartió. A los dos, ¡¡¡ Muchas Felicidades por la próxima llegada de su hijo!!!

Al maestro Jaureguí y a la maestra Angelina, porque de ellos aprendí muchas cosas. Sus cursos han sido de los mejores que he tomado en toda mi vida. A la maestra Laura, ¡¡¡Gracias por su apoyo y consejo!!!..

A todos mis amigos de Física, a Yofre, a Adrián, a Oscar, la superclicka...además de Mayra, Lupis, Vaniro, las que dan equilibrio...a todos ustedes les agradezco por estar conmigo en todos estos días...Gracias por brindarme su apoyo, su confianza... ¡¡¡Los guardo conmigo siempre!!!...

Al resto de los físicos contemporáneos nuestros, a todas las fisikitas que de una u otra forma se han hecho mis kamaradas, a todos los demás que no menciono porque el espacio es corto y ustedes tantos...Gracias...A tí lector, al que le dejo un poco de lo que la Cosmología me ha dejado a mí...Espero que este trabajo te agrade y sirva de motivación hacia estos increíbles y a la vez espectaculares temas...A aquél que quizá no debiera mencionar, pero que me aseguró que jamás lo lograría sólo...para tí esta muestra de que luchando se alcanza todo...

Grandes amigos, buenos maestros y querida familia, sin ustedes este Dupret no sería nada...soy sólo un reflejo de lo que han logrado crear en mí corazón. Un saludo...y como siempre...¡¡¡Cúdense y descancen!!!...

D.A.S.B

Contenido

Lista de Figuras	III
Introducción	1
1 Principios de Cosmología	4
1.1. Radiación	6
1.1.1. Radiación de Cuerpo Negro	6
1.1.2. Radiación C3smica de Fondo	7
1.1.3. Anisotropías en la CMBR	9
1.2. Expansi3n	13
1.2.1. Corrimiento al Rojo	13
1.2.2. El Universo en Expansi3n	16
1.2.3. Ley de Hubble	19
1.2.4. Edad y Tama3o del Universo	21
1.2.5. Radiaci3n y Expansi3n	22
1.3. Materia	24
1.3.1. Densidad Crítica	24
1.3.2. El Parámetro de Densidad	25
2 Teoría FLRW	27
2.1. La Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	28
2.2. Ecuaciones de Campo	31
2.3. Ecuaci3n de Estado	39
2.4. El Universo de Materia y de Radiaci3n	40

3	Dos Problemas del Big Bang	44
3.1.	La Singularidad llamada Big Bang	45
3.2.	El Problema del Horizonte	46
3.2.1.	Distancia Propia y Distancia Comóvil	46
3.2.2.	La Esfera de Hubble	48
3.2.3.	El Horizonte de Partículas	51
3.2.4.	Descripción del Problema	53
3.3.	El Problema de la Planicie	57
3.3.1.	Descripción del Problema	57
4	Soluciones con Inflación	60
4.1.	La Idea de Inflación	61
4.1.1.	Inflación en los Problemas del Horizonte y de la Planicie	61
4.1.2.	Ecuaciones de Movimiento para el Campo Inflacionario	63
4.1.3.	La Aproximación de Slow Roll	66
4.2.	La Solución Inflacionaria	68
4.2.1.	La Cantidad de Inflación	68
4.2.2.	El Problema del Horizonte y el Problema de la Planicie	69
4.2.3.	Inflación Producida por un Potencial Constante	73
4.2.4.	Inflación Caótica Polinomial	73
	Conclusiones	78
	Bibliografía	81

Lista de Figuras

1.1. Espectro de cuerpo negro	7
1.2. La radiación cósmica de fondo tomado por el satélite COBE	9
1.3. Mapa del dipolo obtenido por el COBE	10
1.4. La radiación generada por nuestra galaxia	11
1.5. CMBR con el dipolo y la radiación de nuestra galaxia sustraídos	12
1.6. Distribución de las fluctuaciones de temperatura en la CMBR	12
1.7. Tres galaxias A, B y C	16
1.8. Vista del plano en que se encuentran las galaxias A y B.	17
3.1. El análisis de la singularidad del Big Bang	47
3.2. El cono de luz en el pasado de nuestro observador.	49
3.3. La línea mundo de la galaxia	50
3.4. La esfera de Hubble (hs)	52
3.5. La esfera de Hubble (hs) y el horizonte de partículas (ph)	54
4.1. La evolución de una región comóvil	62

Introducción

El presente trabajo es la presentación de un tema de actualidad, pero que pocas veces es considerado como atractivo para enseñarse a alumnos de licenciatura. Probablemente esto se deba a que la gran cantidad de temas que se deben abarcar a lo largo del período que comprende una carrera como la licenciatura en Física es tan grande y exigente, que no queda tiempo suficiente para explorar más. Sin embargo, conforme uno se desenvuelve en sus estudios empieza a tomar afecto hacia ciertos temas que son diferentes de lo que se cursa de manera general. Es por eso que cada alumno busca satisfacer sus inquietudes e intereses personales a la hora de realizar su trabajo de tesis. Es muy satisfactorio para mí haber tenido una experiencia tan cercana, si bien apenas una primera exploración, al tema de este trabajo: La Inflación Cósmica.

Naturalmente, la primera dificultad que surge es entender lo que esto significa. A lo largo del trabajo tratamos de presentar en una secuencia ordenada los elementos más básicos que se deben tener para ir moldeando por sí mismo la idea de Inflación. En este punto debo remarcar que el desarrollo del trabajo está pensado para alumnos de licenciatura que hayan tomado un curso de Mecánica Teórica. Primero hacemos una introducción a los elementos de Cosmología que son necesarios para una mejor comprensión del panorama general.

Los elementos de Cosmología que se presentan van desde una breve descripción de la Radiación Cósmica de Fondo hasta un desarrollo de cómo el concepto de Inflación complementa una teoría más grande: la del Big Bang. Introduciremos desde la primera sección la posibilidad de un Universo con expansión acelerada en alguna época de la vida del mismo; ésto, como una manera de explicar la distribución de temperaturas que se observa de la Radiación Cósmica de Fondo. Sin embargo, empezamos a tratar de manera más específica esta idea en el capítulo tres, donde se presentan dos fallas del Modelo Cosmológico Estándar, y posteriormente la consideramos completamente en el capítulo cuatro. Es importante mencionar que toda la teoría presentada se basa en un principio muy importante: El Principio Cosmológico. Éste nos brinda una imagen del Universo, pues se basa en la idea de que todo en él está distribuido de manera homogénea y, por lo tanto, no hay regiones privilegiadas.

En el capítulo dos, hacemos un breve recorrido por las ecuaciones que nos serán útiles para describir la dinámica del Universo y de la Inflación.

El objetivo principal que buscamos en esta Tesis es usar el concepto de Inflación Cósmica para resolver los problemas del horizonte y de la planicie. ¿En qué consisten estos problemas? El Modelo Cosmológico Estándar se basa en el principio Cosmológico; para satisfacer las condiciones impuestas por dicho principio, se modela el comportamiento del Universo como el de un fluido perfecto. Además, como consecuencia de nuestro modelo, es necesario dar una descripción de la densidad, la presión y la expansión. Esto se hace mediante un sistema de tres ecuaciones, las cuales dan la dinámica del Universo: La ecuación de Friedmann, la ecuación de Conservación Local de la Energía y una ecuación de Estado.

En el caso de la Expansión, debemos mencionar que está gobernada por el factor de escala; éste es una función que depende del tiempo, y es gracias a él que gran parte del desarrollo de la teoría es posible. El factor de escala nos dice cuál es la razón de expansión del Universo. La ecuación de Friedmann relaciona a este factor de escala y su derivada con el contenido energético del Universo. Esto es, relaciona la forma geométrica del Universo con dicho contenido.

Para hacer una descripción del Universo, seguiremos la práctica común de dividir su historia en eras, cada una de las cuales está determinada por un período de tiempo durante el cual una de las componentes del Universo (radiación, materia, curvatura, etc.) prevalece sobre las otras.

La ecuación de estado que se utiliza es de una forma particular $P = \omega\rho$, donde ω es un factor que está relacionado con el período de interés. Debido a la forma de la ecuación de estado, los modelos que satisfacen el Principio Cosmológico tienen una singularidad correspondiente al momento en que se dio origen al Universo; dicha singularidad recibe el nombre de Big Bang. Un Universo modelado con estas características tiene horizontes, se le llama así a la distancia máxima de donde puede llegarnos información. Las regiones que se encuentran más allá de esa distancia se dice que están causalmente desconectadas de nosotros ya que no ha habido tiempo para que puedan influenciarnos directamente de alguna manera. La existencia de horizontes vuelve imposible explicar la homogeneidad del Universo. Por otra parte, las mediciones más recientes indican que la densidad del Universo debe tener un valor crítico en la etapa actual. En el modelo estándar la única forma de lograr este valor para la densidad es mediante una sintonización fina de dicho parámetro, lo cual es indeseable en una teoría completa.

Estas inconsistencias del modelo se conocen respectivamente como: el problema del horizonte y el problema de la planicie. Como veremos en el desarrollo de este trabajo, estos problemas se

pueden resolver si el Universo atraviesa por un periodo de expansión exponencial llamado Inflación Cosmológica. En el capítulo cuatro desarrollaremos la solución asumiendo este período de expansión acelerada, en particular veremos como ésta puede ser producida por campos escalares y encontraremos soluciones para algunas formas de estos campos.

Un reporte de los principales resultados obtenidos en el presente trabajo fue presentado en el evento "Essential Cosmology for the Next Generation", la primera escuela internacional del Instituto Avanzado de Cosmología (México).

La Cosmología actual intenta escribir la biografía del Universo. Lograr semejante objetivo puede representar una hazaña muy dura de conquistar, ya que es difícil reconstruir la historia de algo que existe mucho tiempo antes de que nuestra civilización (incluso la Tierra y el Sistema Solar) existiera.

Normalmente, cuando alguien desea plasmar la vida y obra de un personaje ilustre, se busca información en todo aquello que ha influido durante su vida: fecha y lugar de nacimiento, quienes fueron sus padres, etc; incluso hay quienes optan por entrevistar a dicha persona y, de sus respuestas, hacernos retroceder a lo largo del tiempo. Un sistema parecido a este es el que podemos usar para describir la evolución del Universo; si bien es cierto que el grado de dificultad aumenta, es mediante las reliquias que nos ha dejado el proceso de evolución, que podemos decir muchas cosas de él.

Al hablar de reliquias, estamos haciendo referencia a varios objetos que se pueden observar y analizar:

- Reliquias Estructurales.

La aglomeración de estrellas en galaxias es una reliquia estructural. Los cosmólogos no están interesados en objetos individuales, si no más bien en los cálculos estadísticos que conjuntos grandes de ellos nos proporcionan. Este tipo de reliquias son estructuras generadas por los cuerpos ya existentes en el Universo, lo cual nos permite analizar desde una perspectiva más general. Una de las principales cuestiones abiertas de la Cosmología moderna es cómo y cuándo se formaron y evolucionaron las estructuras. Esto da lugar a un proceso que se conoce como formación jerárquica de estructuras. Primero se formarán estructuras pequeñas y poco masivas del tamaño de cúmulos globulares, las cuales se irán uniendo las unas a las otras para ir formando gradualmente estructuras mayores hasta las galaxias, y, más tarde, los cúmulos galácticos. En Cosmología, éstas últimas son las

estructuras por excelencia, ya que nos proporcionan un volumen considerable del Universo y por ello constituyen una muestra representativa del mismo.

- Reliquias Materiales.

En una escala mayor que la de los cúmulos, el Universo es homogéneo e isotrópico. Así como la aglomeración de materia en estrellas nos dice mucho en la historia de la galaxia, a escalas más grandes, su aglomeración en cúmulos nos brinda información sobre la historia del Universo temprano. La composición de la materia es una reliquia muy importante. Los constituyentes materiales pueden dividirse en categorías tales como materia, antimateria, e incluso en reliquias aún más exóticas como la materia oscura, pero para nuestra discusión esto no es lo esencial: Nos interesa toda la información que el conjunto total, sin distinción entre ellas, puede brindarnos.

- Reliquias Etéreas.

Es a la radiación a lo que le llamamos reliquia etérea. Es evidente que nuestro planeta es bombardeado por la radiación proveniente del Sol y otras estrellas lejanas, mismas que mantienen al Universo lleno de fotones. Sin embargo, nosotros solamente estamos interesados en aquellos que son de origen cosmológico, es decir, los fotones producidos en épocas muy tempranas en la edad del Universo y que aún nos llegan en nuestros días como Radiación Cósmica de Fondo (CMBR por su nombre en inglés). Podemos argumentar que tal radiación es universal y su fuente emisora no puede ser nada de nuestro entorno local, debido a que su distribución es homogénea, por ello creemos que la CMBR es de origen cosmológico.

Los diferentes tipos de reliquias brindan una amplia gama de información sobre el Universo temprano. Desafortunadamente, hay al menos dos razones por las que no podemos reconstruir la historia sólo mediante el análisis de la evolución de dichas reliquias en el tiempo. Una es la termodinámica que durante la evolución del pasado hacia el presente, involucra procesos disipativos que destruyen información irreversiblemente. Tenemos entonces que ser ingeniosos para dar un punto de partida que, al evolucionarlo en el tiempo, nos brinde una estructura semejante a la de la actualidad. Es aquí donde surge el segundo problema: poder decir cuales eran las características iniciales de dicho punto. Aún así, la información recopilada en observaciones de las diferentes reliquias permiten dar una descripción muy buena sobre el Universo. La Cosmología se encarga de eso, y es una ciencia en constante

renovación.

- Principios Cosmológicos.

Para concluir esta sección haremos hincapié en los principios que son fundamentales para la Cosmología. Observacionalmente tenemos que a escalas de 10^3 Mpc hay una gran uniformidad en el Universo*. No nos referimos sólo a una uniformidad en la densidad media, sino a algunas otras propiedades: los tipos de galaxias, su composición química y estelar, etc. Se puede concluir que, a gran escala, el Universo es homogéneo, y además parece ser isotrópico. Lo que esto significa es que no es posible distinguir, por medio de observaciones locales, una dirección del Universo de otra. Esto se conoce como **Principio Cosmológico**.

Es importante recalcar también el **Principio de Copérnico**, el cual nos dice que las Leyes Físicas que aplican en la Tierra, son válidas para todo el Universo.

Estos dos principios son fundamentales para el análisis del Universo, y son la base para la Cosmología moderna.

1.1. Radiación

1.1.1. Radiación de Cuerpo Negro

Todos los cuerpos emiten radiación al medio que los rodea, y la absorben, también, de éste. La diferencia de temperaturas entre el cuerpo y su medio son la principal causa de este fenómeno al cual se le conoce como radiación térmica. La materia en su fase sólida o líquida emite en un espectro continuo de energías, que depende casi exclusivamente de la temperatura del cuerpo; sin embargo, si éste es un cuerpo muy caliente, el espectro de radiación térmica que emite también depende de la composición del mismo. Idealmente se tiene que sólo hay un tipo de cuerpo cuyo espectro térmico emitido posee características universales: el cuerpo negro.

Un cuerpo negro es aquél que posee una superficie capaz de absorber toda la radiación térmica que incide sobre ella y que además no refleja luz, por lo que se ve negro. Lo que distingue a estos

*La unidad de distancia que se ha introducido aquí, que se denota Mpc, es el *megapársec*. Común en mediciones astronómicas (sobre todo a las escalas interesantes para la Cosmología) corresponde a una distancia 3.26×10^6 años-luz ó 3.09×10^{22} m.

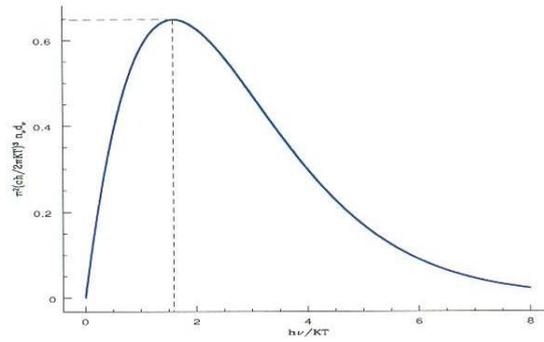


Figura 1.1: El espectro producido por la radiación de cuerpo negro tiene la forma característica que se muestra en la figura.

cuerpos de los demás (aparte de sus características ya descritas) y que los hacen objeto de interés especial para los físicos es que todos ellos a la misma temperatura emiten radiación térmica con el mismo espectro. La explicación a las características específicas de éste fue dada por Max Planck en 1900 con una expresión que describe muy bien el comportamiento del espectro de cuerpo negro.

La función de Planck nos dice cuántos fotones, $n_\nu d_\nu$ por unidad de volumen de espacio, ocupan un intervalo de frecuencias dado d_ν con frecuencia ν en equilibrio térmico a la temperatura T . De esta manera:

$$n_\nu d_\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d_\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \quad (1.1)$$

Para obtener su resultado, Planck tuvo que introducir la idea de que el intercambio de energía en la naturaleza se hace en paquetes con cantidades discretas, lo cual dio principio a la mecánica cuántica.

Un hecho importante, para la discusión en este trabajo, es que el espectro generado por la radiación de origen cosmológico (nuestra reliquia etérea de la que hablamos en la sección anterior) corresponde al espectro de cuerpo negro de Planck mostrado en la figura 1.1, lo cual es una ventaja en el estudio de la radiación que nos interesa pues, al coincidir con una teoría bien conocida, la descripción de su comportamiento es menos complicada.

1.1.2. Radiación Cósmica de Fondo

En sus orígenes, hace aproximadamente 15 mil millones de años, el Universo era una región

muy pequeña cuya temperatura era muy alta. Con dichas características, éste Universo primigenio debió emitir cierta radiación térmica, con un espectro correspondiente a esas altas temperaturas. Esta es la radiación cósmica, cuyos orígenes se remontan a los del Universo, y que nos revela el estado de la antigua materia cósmica de la que fue emitida.

Para poder hacer esta última afirmación, debemos estar seguros de que sea posible detectar tal radiación incluso en nuestros días. Como es de esperarse, dicha reliquia debe tener una temperatura mucho menor a la que tuvo al ser emitida, lo cual también ha alterado su espectro original (el espectro detectado posee su máximo localizado en las frecuencias correspondientes a las microondas).

¿Cuál es el origen de esta radiación y cuál era su temperatura en el momento en el que fue emitida? El problema de resolver estas preguntas se simplificaría si pudieramos analizar el espectro que fue generado por tal radiación, el cual, como ya mencionamos anteriormente, sería el de un cuerpo a temperatura homogénea. Pero, ¿corresponde en realidad el espectro de la radiación cósmica de fondo con el espectro de un cuerpo negro? Determinar la forma exacta de este espectro es una tarea muy importante, ya que la información que éste nos proporcione sobre la radiación cósmica de fondo, podría revelarnos cuales fueron los mecanismos que ocurrieron para que se formaran las estructuras que hoy vemos en el Universo.

En 1965 Arno A. Penzias y Robert W. Wilson descubrieron la radiación cósmica de fondo por accidente, mientras calibraban una antena que era sensible a la radiación de microondas. A pesar de su gran hallazgo, su instrumento no era sensible a todo el espectro electromagnético, por lo que no pudieron determinar si era el esperado; sin embargo, algunos otros experimentos realizados más tarde por Woody y Richards de Berkeley pudieron confirmarlo, aunque los errores experimentales eran inmensos, lo cual no brindaba resultados confiables. Fue con la llegada del satélite COBE (el Explorador del Fondo Cósmico, por sus siglas en inglés) que se pudo obtener de manera precisa el espectro de la radiación cósmica de fondo (Figura 1.2). Al estar colocado en órbita alrededor de la Tierra, y por tanto fuera de su atmósfera, la radiación tiene que cruzarse con menos obstáculos, lo cual disminuye el margen de errores que predominan en los experimentos realizados en la superficie de la Tierra.

Se ha podido determinar que, a gran escala, la distribución de temperatura de la radiación cósmica de fondo es homogénea e isotrópica; sin embargo, a menores escalas tenemos agrupaciones de materia como las estrellas y galaxias que son evidencia de que en el Universo temprano existieron pequeñas fluctuaciones en la distribución de materia, a partir de las cuales se for-

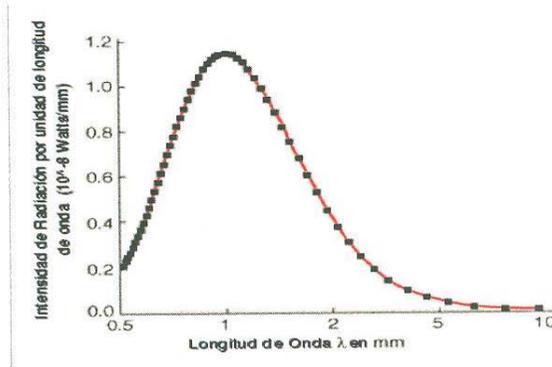


Figura 1.2: Este es un ajuste del espectro de la radiación cósmica de fondo tomado por el satélite COBE. Podemos ver que corresponde a un espectro de cuerpo negro. (Tomada de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/Hbase/bkg3k.html>)

maron. Tales fluctuaciones en la densidad de materia debieron dejar una marca en la radiación cósmica de fondo, y fue gracias a la información tan precisa que el COBE recopiló que dichas anisotropías fueron detectadas.

1.1.3. Anisotropías en la CMBR

Los primeros cálculos sobre la temperatura de la Radiación Cósmica de Fondo fueron realizados por el físico ruso George Gamow y sus colegas Ralph A. Alpher y Robert Hermann. Según ellos en nuestros días la temperatura debería ser de 5 grados Kelvin. La temperatura medida por Penzias y Wilson en su experimento fue de tan solo 3 grados Kelvin. De estos resultados se verifica experimentalmente que, en efecto, la radiación cósmica se encuentra muy fría. Para hablar de la temperatura de esta radiación, debemos considerar una componente más. Recordemos que la isotropía de la radiación cósmica de fondo es una propiedad muy importante. Sin embargo, y como ya hemos mencionado, hay ciertas irregularidades que impiden que ésta sea perfecta; es decir, podemos referirnos a ella por medio de su isotropía característica o, de la misma manera, hablando de su baja anisotropía.

Normalmente se considera la temperatura anisotrópica, la cual nos da la fluctuación de la temperatura como una función de la posición angular en el cielo, en una fracción de la temperatura media T_0 :

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \Phi) = \frac{T(\theta, \Phi) - T_0}{T_0} \quad (1.2)$$

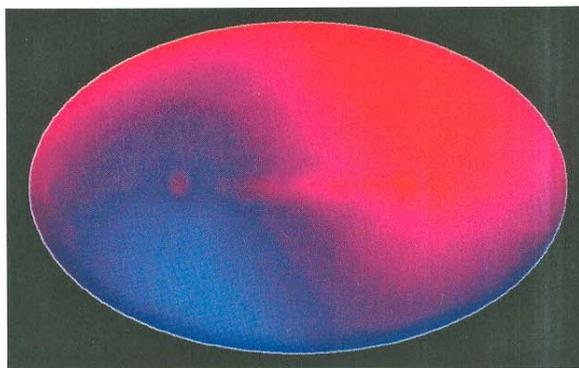


Figura 1.3: Mapa del dipolo obtenido por el COBE. El ecuador se ha escogido de tal forma que la galaxia se vea alineada con el eje ecuatorial. Los colores muestran el movimiento particular de la tierra. (Tomado de <http://mather.gsfc.nasa.gov/cobe/science.html>)

Para poder dar una medida cuantitativa de las anisotropías en la radiación cósmica de fondo (fluctuaciones) es necesario usar un carácter estadístico en la temperatura de un punto a otro en la esfera celeste.

La mayor anisotropía de la CMBR vista desde la Tierra es la presencia de corrimiento Doppler debido al movimiento de nuestro planeta a través del espacio. Los fotones del CMBR están corridos al azul en la dirección de nuestro movimiento, y hacia el rojo en la dirección opuesta. La presencia de estos corrimientos altera la temperatura del CMBR, de manera que tiene la forma de un “dipolo” de temperatura como se puede apreciar en la figura 1.3.

Fue gracias al proyecto COBE que las fluctuaciones en la temperatura de la radiación cósmica pudieron ser detectadas. Con la información obtenida por el satélite sobre la temperatura proveniente de todas direcciones del cielo, fue posible generar un mapa sobre la superficie de una esfera, asignándole a cada punto de esta una cierta temperatura. Lo que se pudo apreciar directamente en dicho mapa es que hay dos regiones diametralmente opuestas: una fría y otra caliente, lo cual ya se esperaba, pues es la contribución del ya mencionado dipolo.

Sin embargo, el objetivo del COBE no era el dipolo, pues como ya mencionamos éste es debido a nuestro movimiento a través del cielo y se consideran fluctuaciones materiales de origen local, razón por la que es necesario removerlo del mapa para poder apreciar la señal del fondo.

Los mapas de los que se ha sustraído la contribución del dipolo se evidencia que en la banda ecuatorial hay una estructura que corresponde a nuestra galaxia (figura 1.4). Son también muy notorias ciertas regiones que son más frías o más calientes que el promedio total. Sin embargo,

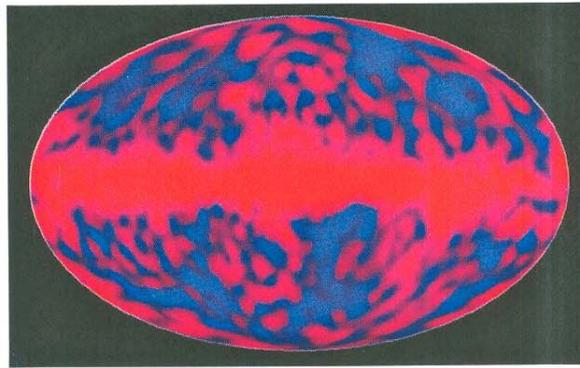


Figura 1.4: Mapa de la radiación cósmica obtenido por el COBE al cual se le ha sustraído la contribución del dipolo. La región ecuatorial corresponde a la radiación generada por nuestra galaxia. (Tomado de <http://mather.gsfc.nasa.gov/cobe/science.html>)

la señal más grande que se interpone entre la radiación cósmica y nuestros instrumentos es la producida por nuestra galaxia.

Podemos ignorar dicho obstáculo nuevamente restándoselo a nuestro mapa. Si se hace esto, sobre el mapa quedan unas manchas de color rojo que corresponden a regiones más calientes, y otras de color azul que corresponden a regiones más frías (figura 1.5). Es éste último lo que buscaba el COBE: la señal de la radiación cósmica de fondo. Hay que recalcar que ciertas manchas en el mapa son debidas a errores en el instrumento de medición (lo cual es de esperarse), y que por tanto pueden no ser de origen cosmológico. Si el origen de las manchas es cósmico, éstas corresponden a regiones del universo más densas que otras cuando éste tenía apenas 300,000 años de existencia, que es el momento en que la materia y la radiación se desacoplaron.

Para nuestra discusión particular, podemos decir que los resultados estadísticos indican que, en efecto, el universo vivió una época en la que existían fluctuaciones en la densidad de la materia y cuyo espectro (que se infiere de los datos de la CMBR observada) es consistente con las predicciones del modelo inflacionario, mismo que estudiaremos más adelante y según el cual el universo ha debido pasar por una época de expansión acelerada.

Recientemente se ha podido observar la CMBR con precisión sin precedentes, en parte gracias a experimentos como el “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe” (WMAP por sus siglas en inglés). En la figura 1.6 ilustramos como el modelo teórico con $\Omega = 1$ (curva roja) reproduce de manera espectacular los datos experimentales.

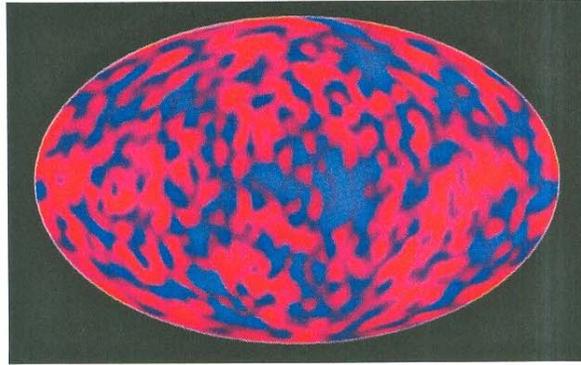


Figura 1.5: Mapa de la CMBR en el cual el dipolo y la radiación de nuestra galaxia han sido sustraídas. Las regiones rojas son más calientes que las azules. (Tomado de <http://mather.gsfc.nasa.gov/cobe/science.html>)

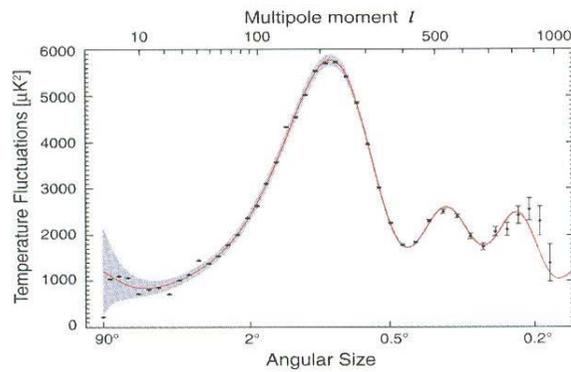


Figura 1.6: Grafica de la distribución de las fluctuaciones de temperatura en la CMBR como función del momento dipolar. (Tomado de las observaciones satelitales más recientes http://www.nasa.gov/topics/universe/features/wmap_five.html)

1.2. Expansión

1.2.1. Corrimiento al Rojo

Como se dijo en la sección anterior, todos los cuerpos son capaces de emitir o absorber radiación electromagnética, sin embargo si consideramos un determinado elemento en estado gaseoso y le suministramos energía, los átomos que lo conforman emitirán radiación en ciertas frecuencias del visible, la cual constituye su espectro de emisión.

Si, por otro lado, recibe radiación electromagnética, la absorberá en las mismas frecuencias en las que emite cuando se estimula. Este sería su espectro de absorción.

La observación de las líneas de absorción y emisión constituyen una medida de la velocidad relativa de la fuente, principalmente porque la radiación emitida con una longitud de onda λ_e de una fuente que se aleja de nosotros con velocidad v tendrá su longitud de onda con corrimiento-Doppler a λ_o cuando se observa en la Tierra. Para una fuente que se aleja, el corrimiento es tal que, $\lambda_o > \lambda_e$ y de ahí que se le conozca como Corrimiento al Rojo:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (1.3)$$

Donde λ_o y λ_e son las longitudes de onda observadas y emitidas. De la ecuación 1.3 podemos escribir la expresión para el corrimiento al rojo como:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_e} = 1 + z \quad (1.4)$$

que nos da la razón entre las longitudes de onda observadas y emitidas. Para una fuente que se acerca z sería negativa, y esto correspondería a un "corrimiento al azul".

El corrimiento al rojo también podemos escribirlo en término de las frecuencias partiendo de las relaciones $\lambda_o = \frac{c}{\nu_o}$ y de $\lambda_e = \frac{c}{\nu_e}$.

De esta manera, tendríamos:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \\ z &= \frac{\nu_e - \nu_o}{\nu_o} \end{aligned}$$

Para encontrar la relación entre la velocidad con la que se mueve la fuente emisora, v , y el corrimiento al rojo, z , empezemos por recordar que en la teoría de la relatividad especial podemos definir un tiempo entre dos eventos de la siguiente manera:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \quad (1.5)$$

Estudiando cinemática relativista encontramos que dicho tiempo propio es una cantidad mensurable independiente de la posición del observador, es decir una cantidad invariante. Podemos asegurar que los relojes que observan dos eventos entre los cuales no hay separación espacial ($dx = 0$) miden directamente este tiempo. También podemos ver que la trayectoria descrita por los rayos de luz tienen un tiempo propio nulo.

Debido a la invariancia de $d\tau^2$, éste debe tener el mismo valor en un marco de referencia con una fuente de radiación en reposo y otro con la fuente de radiación en movimiento, o bien:

$$d\tau^2 = d\tau'^2 \quad (1.6)$$

Donde τ' es el tiempo propio en el marco de referencia en movimiento con respecto a aquél en donde se mide τ . Un observador en reposo que utilice un reloj de radiación, mediría pulsos de radiación consecutivos separados por un intervalo de espaciotiempo $d\tau = dt$. Un observador en la Tierra que mire tal reloj alejándose con velocidad v en la dirección x' observará que los pulsos están separados por un intervalo de tiempo dt' y también por una distancia espacial $dx' = vdt'$. Usando las ecuaciones 1.5 y 1.6 tenemos:

$$dt = d\tau = d\tau' = \sqrt{dt'^2 - \frac{dx'^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2} dt'. \quad (1.7)$$

Donde $\beta = (\frac{v}{c})^2$. En otras palabras, los dos sistemas de referencia están relacionados de la siguiente manera:

$$dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.8)$$

Vemos de estas ecuaciones que el intervalo de tiempo dt' siempre es mayor que el intervalo dt , pero sólomente podemos apreciarlo cuando $v \approx c$. En el intervalo de tiempo dt' la distancia de la fuente de radiación al observador ha incrementado de cdt' a $(c + v)dt'$. Así, el intervalo de tiempo entre dos pulsos recibidos en el observatorio, vendrá dado por la ecuación 1.8:

$$cdt' = \frac{c(1 + \frac{v}{c})dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

A lo cual se le conoce como el corrimiento al rojo relativista y se acostumbra escribir:

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{(1 + \frac{v}{c})^{\frac{1}{2}}}{(1 - \frac{v}{c})^{\frac{1}{2}}}$$

Consideremos el efecto de corrimiento al rojo para luz que se emite con una frecuencia ν_e de tal manera que $dt = \frac{1}{\nu_e}$, así se recibirá con otra frecuencia ν_o , tal que $dt' = \frac{1}{\nu_o}$, por lo tanto:

$$\nu_o = \nu_e \left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.9)$$

Para el caso en que las velocidades de recesión son muy pequeñas comparadas con las de la luz ($v \ll c$), podemos aproximar el corrimiento al rojo. Para ello de 1.4 y 1.9, escribimos:

$$\begin{aligned} 1 + z &= \frac{\nu_e}{\nu_o} \\ &= \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Para velocidades pequeñas podemos hacer un desarrollo en serie para cada uno de los términos del lado derecho, tenemos:

$$\left(1 + \frac{v}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v}{c} - \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots \quad (1.11)$$

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v}{c} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots \quad (1.12)$$

Despreciamos, los términos cuadráticos y de orden superior para escribir una aproximación a la ecuación 1.10, de la forma:

$$\begin{aligned} 1 + z &\approx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v}{c}\right)^2 \\ z &\approx \frac{v}{c} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Así, hemos encontrado que para velocidades muy bajas comparadas con la luz, el efecto Doppler en longitudes de onda, $\Delta\lambda = \lambda_e - \lambda_o$, puede escribirse como:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{v}{c} \quad (1.14)$$

1.2.2. El Universo en Expansión

Haciendo mención del principio de Copérnico, podemos concluir que todos los observadores sin importar el lugar en que se encuentren, al tiempo presente, ven una expansión isotrópica. Esto significa que el Universo permanece homogéneo mientras se expande, de acuerdo al principio cosmológico, y de aquí llegamos a una conclusión muy importante: La expansión del Universo puede ser descrita por una sola función del tiempo, $R(t)$. Esta función es llamada el factor de escala.

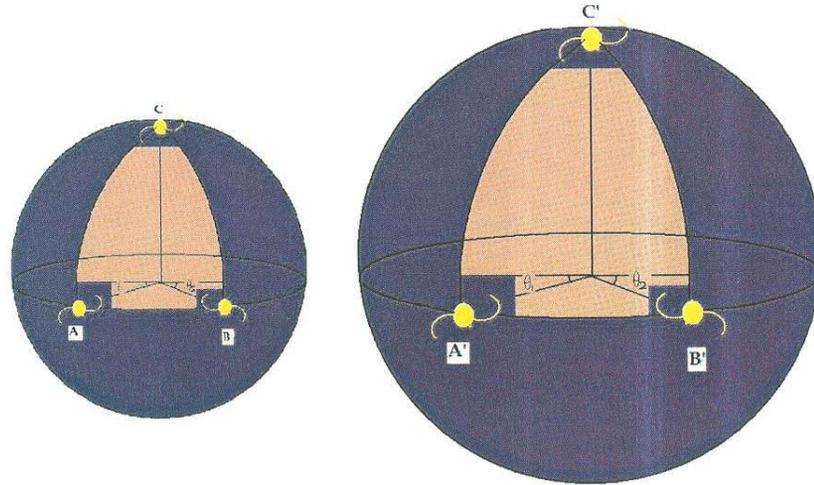


Figura 1.7: En la esfera del lado izquierdo, tres galaxias A, B y C al tiempo t_i . Hacia el tiempo t , las galaxias se expanden alejándose entre ellas hasta llegar a la posición A', B', C' mostrada en el dibujo del lado derecho.

Para ver esta expansión isotrópica de la que hablamos, hagamos el siguiente ejercicio: Consideremos tres galaxias A, B, C, como en la figura 1.7, a un tiempo inicial t_i y a un tiempo t posterior, y analicemos la expansión desde el punto de vista de un observador en A.

Vemos además, que las galaxias A y B se encuentran en el círculo que está sobre el plano XY, a un ángulo radial de θ_1 y θ_2 respectivamente. Al tiempo t_i , vemos que las distancias de separación entre A y B podemos obtenerla haciendo unos calculos sencillos, y apoyándonos de la figura 1.8.

Sea r el radio del círculo de la figura 1.8. Entonces, para calcular la distancia \widehat{AB} :

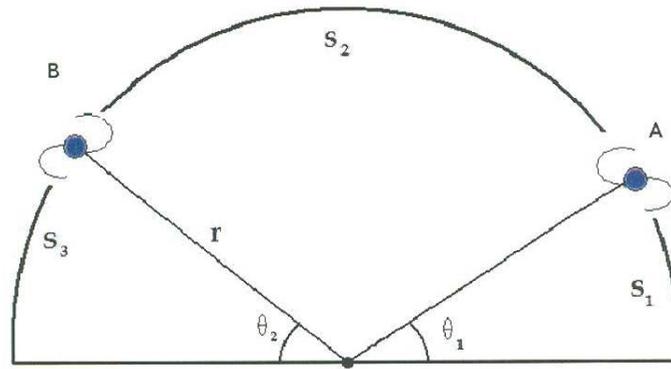


Figura 1.8: Vista del plano en que se encuentran las galaxias A y B.

$$S_1 = r\theta_1 \quad (1.15)$$

$$S_1 + S_2 = r(\pi - \theta_2) \quad (1.16)$$

$$S_3 = r\pi - r(\pi - \theta_2) \quad (1.17)$$

y de aquí, obtenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{AB} &= S_2 \\ &= r[\pi - (\theta_2 + \theta_1)] \end{aligned} \quad (1.18)$$

Las distancias \widehat{AC} y \widehat{CB} son claramente:

$$\widehat{AC} = \widehat{CB} = r\frac{\pi}{2} \quad (1.19)$$

Al final de esta sección, veremos que la expansión es “con el espacio y no en el espacio”, por lo que para el tiempo t , cuando las galaxias se han expandido alejándose entre ellas, sus distancias de separación han aumentado pero también el radio de este universo. Supongamos que el incremento fue $r \rightarrow r + \Delta r$.

La isotropía implica que el incremento en la distancia $\widehat{AB} \rightarrow \widehat{A'B'}$ debe ser el mismo que $\widehat{AC} \rightarrow \widehat{A'C'}$; pero, desde el punto de vista del observador en C, la isotropía requiere que la expansión \widehat{AC} sea igual que en \widehat{BC} . Si hacemos los cálculos para las nuevas distancias de separación, obtendríamos lo siguiente:

$$\widehat{A'B'} = (r + \Delta r)[\pi - (\theta_2 + \theta_1)] \quad (1.20)$$

$$\widehat{A'C'} = (r + \Delta r)\frac{\pi}{2} \quad (1.21)$$

$$\widehat{C'B'} = (r + \Delta r)\frac{\pi}{2} \quad (1.22)$$

Si hacemos una razón entre las distancias primadas y las no primadas, y renombrando $r + \Delta r$ como r' obtenemos que, la razón de expansión fue:

$$\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}} = \frac{r + \Delta r}{r} = \frac{r'}{r}$$

$$\frac{\widehat{A'C'}}{\widehat{AC}} = \frac{r + \Delta r}{r} = \frac{r'}{r}$$

$$\frac{\widehat{C'B'}}{\widehat{CB}} = \frac{r + \Delta r}{r} = \frac{r'}{r}$$

De aquí, podemos ver que el factor de expansión fue el mismo para las tres distancias, por lo que podemos decir, que éste es un ejemplo de una expansión isotrópica. De los resultados anteriores, podemos ver claramente que:

$$\widehat{A'B'} = \widehat{AB} \frac{r'}{r}$$

y lo mismo ocurre para las otras distancias.

Vemos entonces, que la isotropía en cada punto implica que la expansión está controlada por una sola función del tiempo la cual denotamos con $R(t)$, y de donde, las razones de las longitudes correspondientes pueden obtenerse. Si \widehat{AB} tiene una longitud l_i al tiempo t_i , entonces, al tiempo t , su longitud es:

$$l(t) = l_i \frac{R(t)}{R(t_i)} \quad (1.23)$$

Ahora, si derivamos con respecto al tiempo obtenemos la velocidad relativa de B a A.

$$v(t) = \frac{dl(t)}{dt} \quad (1.24)$$

$$v(t) = \frac{l_i}{R(t_i)} \frac{dR(t)}{dt} \quad (1.25)$$

Y usando la ecuación 1.23, obtenemos:

$$v(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} l(t) \quad (1.26)$$

Hay que recalcar que en esta expansión a la que nos referimos, el espacio crece conforme se expande, por lo que no se debe pensar que los objetos se expanden en un espacio vacío, ya que no hay un recipiente que contenga el Universo: La expansión es con el espacio y no en el espacio.

La velocidad encontrada anteriormente, nos dice la razón a la cual el espacio entre A y B está incrementando, o bien, es una velocidad de expansión. La ecuación 1.26 se conoce como Ley de distancia-velocidad.

Para velocidades pequeñas podemos usar la aproximación $v = cz$ de la ecuación 1.13, junto con 1.26 y obtenemos:

$$cz = l(t) \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad (1.27)$$

De esta manera, al asumir una expansión homogénea e isotrópica, podemos obtener una relación lineal entre el corrimiento al rojo de una galaxia y su distancia a nosotros.

1.2.3. Ley de Hubble

En 1920, Edwin Hubble midió el espectro de 18 galaxias espirales cuya distancia a nosotros era muy bien conocida. Además, para cada una de ellas, logró identificar patrones de líneas de espectros atómicos conocidos, y que exhibían un cierto corrimiento al rojo. Usando, entonces, la ecuación 1.13 pudo calcular las velocidades con una buena precisión.

En esa investigación, Hubble encontró una relación entre el corrimiento al rojo y la distancia:

$$cz = H_0 l \quad (1.28)$$

Estudios posteriores han confirmado esta ley, misma que lleva su nombre. En términos más generales, Hubble descubrió que las velocidades de recesión son una función de la distancia dejándonos el mensaje de que el Universo se está expandiendo.

Una vez que H_0 se conoce, las mediciones del corrimiento al rojo se pueden usar junto con la ley de Hubble para obtener la distancia a la galaxia, suponiendo que está lo suficientemente lejos para que la velocidad medida surja de la expansión del Universo y no de algún fenómeno dinámico local que produzca una velocidad particular.

La cantidad H_0 de la ecuación se llama constante de Hubble y el valor que él encontró inicialmente para ella fue de $H_0 = 550 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [6]. Sin embargo, desde que realizó ese trabajo en 1930, se han descubierto varios errores sistemáticos en sus mediciones de distancia, mismos que han disminuido el valor de H_0 a valores entre 50 y $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Ya que es incierto el valor exacto de H_0 , es usual escribir:

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (1.29)$$

teniendo el valor de h como un respaldo que se pueda ajustar si se requiere. Su valor actual es de $h = 0.65$ [6].

Si comparamos la ecuación 1.28 con 1.27, podemos escribir:

$$H = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad (1.30)$$

Esto es, reconocemos el parámetro de Hubble como una función del tiempo, pero independiente de la posición en cualquier instante. Éste parámetro es una razón de factores de escala, lo cual lo hace independiente de la elección de la posición, y por lo tanto es una cantidad muy importante en Cosmología ya que nos da una medida observable de la razón con la que se expande el Universo.

Como la expansión puede variar con el tiempo, se introduce otro parámetro más que nos dé esta razón de cambio. Este, debe tener un valor que dependa de las unidades del tiempo y en el valor absoluto arbitrario de la escala de longitud, por lo que no sería medible. Más adelante, cuando consideremos la esfera de Hubble (sección 3.3.2) veremos como surge el número adimensional elegido como una medida de la deceleración de la expansión del Universo:

$$q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \quad (1.31)$$

La cantidad q se llama parámetro de deceleración, y el signo menos se eligió porque se pensaba que la expansión debería estar disminuyendo conforme el Universo envejece.

1.2.4. Edad y Tamaño del Universo

Si asumimos que la velocidad de expansión es constante, dos galaxias separadas una distancia d_0 al tiempo actual se alejan con una velocidad:

$$v = Hd = H_0 d_0 \quad (1.32)$$

entonces la distancia que separaba este par de galaxias era cero al tiempo H_0^{-1} antes del presente. Así, H_0^{-1} nos brinda una edad estimada del Universo actual. Una escala característica de tiempo para la expansión del Universo es el tiempo de Hubble [2]:

$$\tau_H \equiv H_0^{-1} = 9.78h^{-1} \times 10^9 \text{ años} \quad (1.33)$$

Podemos interpretar al término τ_H como una aproximación a la edad, t_0 , del Universo, sin embargo recordemos que este calculo asume que la expansión ocurrió a un ritmo constante y por lo tanto la interpretación no es precisa.

El parámetro de Hubble también determina la escala del tamaño del Universo observable actualmente. Al tiempo τ_H , la radiación, viajando a la velocidad de la luz c , ha alcanzado el radio de Hubble [2]:

$$r_H \equiv \tau_H c = 3000h^{-1} Mpc. \quad (1.34)$$

Para dejarlo más claro, de acuerdo a la ley de Hubble, los objetos a esta distancia se alejan con la velocidad de la luz, la cual es un límite absoluto en la Teoría de la Relatividad Especial. Usando la relación entre z y la distancia, ecuación 1.27, obtenemos:

$$z = H_0 \frac{l}{c} \quad (1.35)$$

Esto es válido para galaxias con $z \ll 1$, ya que podemos ver de 1.10 que z es infinito para objetos a distancias de r_H , alejándose con la velocidad de la luz, pues la expresión bajo el signo de raíz va a cero. Por lo tanto, no nos llega información proveniente de distancias más lejanas, debido a que en esas longitudes de onda habría un corrimiento infinito hacia el rojo. Así, ninguna partícula creada con el Universo puede exceder esta distancia.

1.2.5. Radiación y Expansión

En cosmología, nos encontramos con el escenario siguiente: radiación interactuando con materia en un universo que se expande. Aún no hemos hablado de materia, lo cual dejaremos para la sección siguiente, dedicándonos por ahora a la radiación y la expansión. En la sección anterior hemos hecho una pequeña descripción de la radiación de origen cosmológico: la CMBR. Vimos que el espectro producido por esta radiación se comporta como el espectro de un cuerpo negro, lo cual nos facilita su estudio. Por otro lado, en esta sección nos hemos dedicado a la expansión del Universo, que tiene la característica de estar regida por una función del tiempo: el factor de escala $R(t)$. El objetivo ahora, es encontrar la manera de relacionar el factor de escala con la función de Planck de cuerpo negro, y obtener resultados útiles. Empezaremos considerando una región del Universo donde se ha emitido radiación cósmica con cierta longitud de onda λ , de manera tal que se produce efecto Doppler. De la ecuación 1.14 tenemos:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dv}{c} \quad (1.36)$$

De la ley de distancia-velocidad, ecuación 1.26, tenemos:

$$dv = H dx = \frac{\dot{R}}{R} dx \quad (1.37)$$

Lo cual nos deja como resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{\lambda} &= \frac{H dx}{c} \\ \frac{d\lambda}{\lambda} &= \frac{dR}{R} \\ \lambda &\propto R(t) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Esta ecuación nos dice que la longitud de onda se estira con el Universo; ahora bien, usando 1.38, tenemos que la razón entre las lambdas (emitida y observada) se relaciona con $R(t)$ de la forma:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} \quad (1.39)$$

Finalmente, comparando con 1.4, llegamos a la expresión:

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} \quad (1.40)$$

Este último resultado 1.40 se conoce como relación de Lemaitre y es de gran importancia, pues relaciona el corrimiento al rojo con la expansión. De esta manera, si conocemos el corrimiento

al rojo z de una galaxia lejana, entonces podemos saber que tanto se ha expandido el factor de escala desde que su luz fue emitida.

Mostraremos ahora que el espectro de cuerpo negro prevalece aún bajo la influencia de la expansión. Para ello, consideremos el espectro a un tiempo t , el cual está dado por la función de Planck 1.1:

$$n_\nu d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Como estamos en un Universo que se expande, una región del espacio aumenta sus dimensiones, y por lo tanto su volumen a una razón de $\frac{R_0^3}{R^3}$. De esta manera, la densidad del número de fotones a un tiempo t_0 , también se verá afectado por la misma razón de expansión. Así, tenemos:

$$n_{\nu_0} d\nu_0 = \frac{R^3}{R_0^3} n_\nu d\nu \quad (1.41)$$

Sustituyendo la ecuación de Planck en la expresión anterior nos da como resultado:

$$n_{\nu_0} d\nu_0 = \frac{R^3}{R_0^3} \cdot \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} - 1} \quad (1.42)$$

Podemos considerar la expresión 1.39 en términos de las frecuencias $\frac{\nu_c}{\nu_0} = \frac{R_0}{R_c}$ y sustituirla en 1.42 para obtener:

$$n_{\nu_0}(t_0) d\nu_0 = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu_0^2 d\nu_0}{e^{\left(\frac{h\nu_0 R_0}{R k T}\right)} - 1} \quad (1.43)$$

Comparando este último resultado con la función de Planck 1.1, vemos que corresponde a un espectro de cuerpo negro con temperatura:

$$T_0 = \frac{RT}{R_0} \quad (1.44)$$

De esta manera, vemos que la expansión del Universo conserva la forma del espectro de cuerpo negro, pero de 1.44 vemos que modifica la temperatura de acuerdo a la relación:

$$RT = \text{constante} \quad (1.45)$$

Como el factor de escala aumenta con el tiempo, para que la ecuación anterior permanezca constante, debe ocurrir que la temperatura disminuya con la expansión, es decir, la expansión enfría al Universo.

1.3. Materia

La cantidad de materia en el Universo, es de suma importancia en Cosmología. Se han dado muchos resultados inesperados, tales como la existencia de materia que no podemos detectar y que además, no está constituida por protones, electrones ni neutrones como la materia normal que conocemos. Sin embargo, para nuestra discusión, no es necesario hacer consideraciones por separado de la componente material, lo que nos interesa es la información que el conjunto total que ésta nos aporta.

1.3.1. Densidad Crítica

En nuestro estudio de la densidad de materia del Universo, es usual expresar la densidad de masa promedio en términos de la densidad crítica.

Para visualizar a lo que nos referimos con densidad crítica, consideremos dos galaxias situadas en una región del espacio, separadas por una distancia r . Asumiendo a la característica de isotropía del Universo, podemos elegir a una de las galaxias como el centro de una esfera de radio r , lo que dejaría a la otra galaxia sobre la superficie de la esfera. Supongamos ahora que este sistema está en un Universo que se expande de acuerdo a la ley de Hubble (como el nuestro) de tal manera que, conforme la expansión ocurre la galaxia situada en la superficie de la esfera se alejará del origen con una velocidad de escape que corresponde a la masa M de la región del Universo que ocupa semejante esfera. La velocidad de escape es aquella que necesita cualquier cuerpo para escapar de la atracción gravitatoria de cualquier otro objeto. Esta velocidad es la que corresponde a energía total, cinética más potencial, igual a cero. Por ejemplo, para un caso sencillo de dos cuerpos, uno de masa unitaria que intenta escapar de la influencia gravitatoria de otro muy masivo M , tenemos que su energía cinética por unidad de masa es $T = \frac{v^2}{2}$; además, el potencial gravitacional por unidad de masa es $V = -\frac{GM}{r}$. La velocidad que se necesita entonces para que logre escapar ocurre cuando $T + V = 0$, o bien:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (1.46)$$

Apliquemos la Ley de Hubble a nuestro caso:

$$\begin{aligned} Hr &= v_e \\ Hr &= \sqrt{\frac{2GM}{r}} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Podemos usar la masa M de nuestra esfera en términos de su densidad:

$$M = V\rho \quad (1.48)$$

Sustituyendo en 1.47, y elevando al cuadrado:

$$H^2 r^2 = \frac{2GV\rho_c}{r} \quad (1.49)$$

Sustituyendo el volumen que ocupa nuestra esfera, y simplificando:

$$H^2 r^2 = \frac{2G\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c}{r} \quad (1.50)$$

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho_c}{3} \quad (1.51)$$

$$(1.52)$$

De esta expresión podemos despejar la densidad, a la que llamaremos densidad crítica ρ_c :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.53)$$

Hemos obtenido una expresión para la densidad que es una función del tiempo a través del parámetro de Hubble (H), que es válida para nuestro Universo. En nuestro ejemplo podemos ver que, si la densidad de la esfera es muy grande, la velocidad que se necesita para escapar del potencial nunca se alcanza, y la galaxia es atraída hacia el origen; si en cambio, la densidad es baja, la galaxia escapa para siempre de la influencia del potencial. Hay que remarcar que si dicha densidad ρ del Universo es lo suficientemente grande, la expansión se detendrá, es por esta razón que se le conoce como densidad crítica. Diferentes valores de la densidad nos permiten referirnos a diferentes modelos cosmológicos del Universo. Para $\rho > \rho_c$ se dice que el Universo es cerrado; con $\rho < \rho_c$ se considera un Universo abierto. Si sustituimos el valor de H_0 en 1.53 obtendremos el valor de ρ_c al tiempo presente, que expresada en unidades cosmológicas es $(\rho_c)_0 = 2.76 \times 10^{11} h^2 M_\odot Mpc^{-3} \sim 8.6 \times 10^{-27} Kg/m^3$ **[4]. Esta cantidad corresponde a tener una densidad de un protón por metro cúbico.

1.3.2. El Parámetro de Densidad

Podemos hacer uso de la densidad crítica para remover las dimensiones en la densidad. En lugar de densidades escribiremos entonces el parámetro de densidad Ω , definido como la razón entre la densidad del Universo y su densidad crítica:

**En esta expresión, y en el resto de este trabajo, el símbolo M_\odot representa la masa del Sol

$$\begin{aligned}\Omega &\equiv \frac{\rho}{\rho_c} \\ \Omega &= \frac{8\pi G}{3H^2}\rho\end{aligned}\tag{1.54}$$

En este trabajo sólo consideraremos la densidad total Ω . Cabe señalar que se acostumbra dividir esta densidad en tres componentes: una contribución de la materia Ω_m , otra debido a la radiación Ω_r y una tercera componente extra que llamaremos Ω_λ . No hay una razón evidente para agregar esta última componente, su introducción se ha vuelto necesaria a raíz de observaciones recientes [1]:

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\lambda\tag{1.55}$$

Si existe alguna otra fuente de masa-energía, ésta debe contribuir a Ω y por tanto debe ser sumada a ella. Las cantidades correspondientes al tiempo presente son:

$$\begin{aligned}\Omega_M &= (\Omega_m)_0 \\ \Omega_R &= (\Omega_r)_0 \\ \Omega_\Lambda &= (\Omega_\lambda)_0\end{aligned}$$

Así, tenemos también:

$$\Omega_0 = \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda\tag{1.56}$$

La contribución de Ω_R al parámetro total de densidad Ω_0 en la actualidad, es muy pequeño comparado con Ω_M , pero fue la componente dominante para Ω en el Universo temprano. El valor que se estima para Ω_M está en el rango de 0.15 a 0.30[1].

Las observaciones recientes realizadas por el COBE y WMAP indican que $\Omega = 1$. Esto nos llevará a plantear en el capítulo 3 uno de los problemas del modelo cosmológico estándar: El problema de la planicie.

En el capítulo anterior se ha hecho una breve discusión acerca de los constituyentes del Universo. Se ha hablado de radiación y de materia, así como de la expansión del Universo. Un punto importante que debemos recalcar en esa discusión es que todo lo hemos considerado en base al principio cosmológico sobre la homogeneidad e isotropía del Universo. Ahora es necesario construir un modelo del Universo en el que se satisfaga completamente. Esto se cumple en la métrica FLRW, por lo que recurriremos a ella para nuestro estudio. El modelo del Universo que consideraremos contendrá una forma de materia muy sencilla: estará lleno de un fluido perfecto. Esta es una aproximación acertada en muchas situaciones. En un fluido en el que la trayectoria libre media entre colisiones de sus partículas es muy pequeña comparada con nuestra escala de interés físico, el fluido se considera perfecto, en donde las únicas magnitudes físicas tomadas en consideración son las densidades uniformes, las presiones isotrópicas de materia y de radiación. En el caso de nuestro Universo, por ejemplo, podemos considerar la isotropía y homogeneidad de éste aún sabiendo que localmente esto no es cierto, ya que nuestras escalas de interés físico son comparables al tamaño del Universo.

Así, a escalas del orden del Universo entero, la interacción que domina la dinámica es la gravedad; su descripción correcta se logra mediante la Relatividad General. Particularmente, la manera en que se distribuye la materia en el Universo está descrita por las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional:

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R + \Lambda g^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}$$

Donde $G^{\alpha\beta}$, el tensor de Einstein, contiene la información de la forma que adopta el espacio-tiempo para una colección de materia/energía y $T^{\alpha\beta}$, el tensor de esfuerzo-energía, contiene la información de la distribución de materia/energía en una región del espaciotiempo. La solución exacta a estas ecuaciones va más allá de los alcances de este trabajo, aquí sólo diremos que como parte fundamental es importante modelar $T^{\alpha\beta}$ como el contenido que estamos suponiendo para nuestro Universo y $G^{\alpha\beta}$ se define a través de este contenido y está determinado por una métrica del espaciotiempo (es decir, por la forma de medir distancias). Para poder hacer una descripción del Universo, partiremos de las ecuaciones de Einstein aplicadas al modelo del fluido perfecto,

por lo que necesitaremos conocer tres magnitudes físicas: la presión, la densidad y el factor de expansión. Para hacerlo, habrá que tener tres ecuaciones para que exista un sistema soluble, y la descripción sea completa: La Ecuación de Friedmann, la Ecuación del Fluido y la Ecuación de Estado. Haremos una presentación de esas ecuaciones en este capítulo.

2.1. La Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Iniciaremos nuestro estudio considerando un espacio plano de tres dimensiones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$, en el que consideraremos al tiempo como un parámetro absoluto. Podemos obtener el elemento de línea de la siguiente manera:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.1)$$

El mismo espacio puede ser descrito si consideramos a dl en coordenadas curvilíneas, como por ejemplo en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sin \theta \sin \phi \\ z &= R \cos \theta \end{aligned}$$

Necesitamos obtener dx^2, dy^2 y dz^2 , y con ellos finalmente a dl^2 :

Para las intenciones de nuestro trabajo, sin embargo, haremos uso de un espacio plano de cuatro dimensiones llamado espacio de Minkowski. En él, el tiempo deja de ser un parámetro absoluto para convertirse en una coordenada más, generando así lo que se conoce como espaciotiempo. El elemento de línea ahora es:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.2)$$

O bien, en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dR^2 - R^2 d\theta^2 - R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Un ejemplo en nuestro espacio curvado que podemos considerar es el de la hipersuperficie de una hiperesfera de radio a , embebida en un espacio de cuatro dimensiones:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = a^2 \quad (2.3)$$

Podemos escribir el elemento de línea de la misma forma que en 2.2, extendiéndolo a cuatro coordenadas:

$$dl^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 \quad (2.4)$$

Despejando W de 2.3, tenemos:

$$\begin{aligned} W &= (a^2 - X^2 - Y^2 - Z^2)^{\frac{1}{2}} \\ dW &= -\frac{XdX + YdY + ZdZ}{(a^2 - X^2 - Y^2 - Z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ dW^2 &= \frac{(XdX + YdY + ZdZ)^2}{a^2 - X^2 - Y^2 - Z^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en 2.4:

$$dl^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + \frac{(XdX + YdY + ZdZ)^2}{a^2 - X^2 - Y^2 - Z^2} \quad (2.5)$$

O bien, en coordenadas esféricas:

$$dl^2 = \frac{a^2 dR^2}{a^2 - R^2} + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.6)$$

Si ahora incluimos la coordenada temporal en 2.6, tenemos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - dl^2 \\ &= c^2 dt^2 - \frac{a^2 dR^2}{a^2 - R^2} + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Reemplazando la distancia propia R por la razón adimensional $r = \frac{R}{a}$, tenemos:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2.8)$$

Recordemos que nuestro punto de partida fue una hiperesfera, por lo que dicha información debe estar contenida de alguna manera en la ecuación 2.8. Haciendo un análisis de ella vemos que ésta se encuentra en el signo negativo que acompaña al primer término dentro del paréntesis. Dado que no sabemos con certeza cual es la forma exacta de la curvatura de nuestro Universo, debemos extender la ecuación 2.8 de tal manera que contenga todos los casos posibles. Esto lo logramos añadiendo un parámetro k que puede adoptar los valores $+1$, 0 , -1 , para tener finalmente la métrica FLRW:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2.9)$$

Todos los casos de curvatura son cubiertos de esta manera, pues si $k = +1$ tenemos una hiperesfera, $k = 0$ es un espacio plano y $k = -1$ es un espacio hiperboloide. Esta métrica describe

nuestro Universo en una tres-superficie curvada, con un radio $R(t)$ que se expande con el tiempo, llamado factor de escala y un parámetro de curvatura que, como ya se mencionó, desconocemos. De esta manera, si en algún momento determinado el Universo es homogéneo e isotrópico con la métrica FLRW, entonces siempre lo será ya que es el factor de escala $R(t)$ de distancias espaciales el que cambia con el tiempo y no la localización del punto (r, θ, ϕ) . Así, los desplazamientos son $dr = d\theta = d\phi = 0$, y la métrica 2.9 se reduce a:

$$ds^2 = c^2 dt^2$$

Por esta razón, las coordenadas r , θ y ϕ se llaman coordenadas comóviles, y el marco en expansión *marco comóvil*. Un observador en reposo en un marco comóvil observa el Universo de manera homogénea e isotrópica, por lo que recibe el nombre de observador fundamental.

Si deseamos encontrar la distancia l que hay al tiempo presente entre nuestra galaxia y alguna otra, en coordenadas comóviles $(r, 0, 0)$, vemos que l depende de la geometría intrínseca del espaciotiempo, del valor de k , y de la evolución del Universo con el tiempo descrito por $R(t)$. De la Relatividad General, sabemos que la luz se mueve en una geodésica sobre una hipersuperficie en el espacio de 4 dimensiones de la métrica FLRW. Así, el incremento espacial dado por 2.9 es:

$$\begin{aligned} dl &\equiv |dl| \\ dl &= R(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \end{aligned}$$

que al integrar queda:

$$l = R(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (2.10)$$

De aquí podemos obtener una relación ya mencionada en el capítulo 1, diferenciando 2.10 con respecto al tiempo, y considerando a r como constante ya que es una coordenada comóvil:

$$\dot{l} = \dot{R}(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}$$

Considerando $\dot{l} = v$, tenemos:

$$v = \dot{R}(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (2.11)$$

Notemos que aparece la misma integral que en la ecuación 2.10, por lo que 2.11 puede reescribirse de la siguiente manera:

$$v = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} l \quad (2.12)$$

Hemos obtenido el flujo de Hubble v experimentado por una galaxia distante en l , el cual es proporcional a la distancia. Esta es la ley de distancia-Velocidad considerada antes, pero que surge de una forma más general:

$$v = H(t)l \quad (2.13)$$

Recordemos que v es una velocidad debida al Big Bang, es decir la velocidad de expansión de la geometría del espaciotiempo.

2.2. Ecuaciones de Campo

Hasta ahora, hemos hablado del Universo en términos de su geometría, o simplemente haciendo uso de su cinemática. Sin embargo, para los fines que nos interesan, es necesario introducir las ecuaciones de campo que lo rigen.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^c} = 0 \quad (2.14)$$

donde t es el parámetro de tiempo en la versión clásica. Estas ecuaciones quedan determinadas completamente si conocemos la lagrangiana del sistema en discusión: $L = L(x, \dot{x})$.

Para nuestro caso, consideraremos una lagrangiana que es función de $2N$ variables independientes x^c y \dot{x}^c :

$$L(\dot{x}^c, x^c) \equiv \frac{1}{2} g_{ab}(x^c) \dot{x}^a \dot{x}^b \quad (2.15)$$

Derivando la lagrangiana de acuerdo a 2.14, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} &= \frac{1}{2} g_{ab} \frac{\partial \dot{x}^a}{\partial \dot{x}^c} \dot{x}^b + \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^a \frac{\partial \dot{x}^b}{\partial \dot{x}^c} \\ &= \frac{1}{2} g_{ab} \delta_c^a \dot{x}^b + \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^a \delta_c^b \\ &= \frac{1}{2} g_{cb} \dot{x}^b + \frac{1}{2} g_{ac} \dot{x}^a \\ &= g_{cb} \dot{x}^b \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^c} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \dot{x}^a \dot{x}^b \\ &= \frac{1}{2} \partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b \end{aligned}$$

De esta manera, las ecuaciones de Euler-Lagrange nos quedan:

$$\frac{d(g_{cb} \dot{x}^b)}{du} - \frac{1}{2} \partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \quad (2.17)$$

Extendiendo la derivada total del primer término de la ecuación 2.17:

$$\begin{aligned}\frac{d(g_{cb}\dot{x}^b)}{dt} &= \frac{\partial g_{cb}\dot{x}^b}{\partial x^a} \frac{dx^a}{dt} \dot{x}^b + g_{cb} \frac{d\dot{x}^b}{dt} \\ &= \partial_a g_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b + g_{cb} \ddot{x}^b\end{aligned}$$

Volviendo de esta manera a la ecuación 2.17, tenemos:

$$g_{cb}\ddot{x}^b + \partial_a g_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b - \frac{1}{2} \partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \quad (2.18)$$

Reescribiendo:

$$g_{cb}\ddot{x}^b + \frac{1}{2} (\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}) \dot{x}^a \dot{x}^b = 0$$

Finalmente, podemos escribir las ecuaciones 2.14 como:

$$g_{cb}\ddot{x}^b + \Gamma_{cab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \quad (2.19)$$

Donde:

$$\Gamma_{cab} \equiv \frac{1}{2} (\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab})$$

son coeficientes de conexión, normalmente conocidos como símbolos de Christoffel.

Podemos escribir la ecuación 2.19 de una manera distinta si subimos un índice en ella de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}g^{\gamma c} g_{cb} \ddot{x}^b + g^{\gamma c} \Gamma_{cab} \dot{x}^a \dot{x}^b &= 0 \\ \delta_b^\gamma \ddot{x}^b + \Gamma_{ab}^\gamma \dot{x}^a \dot{x}^b &= 0 \\ \ddot{x}^c + \Gamma_{ab}^c \dot{x}^a \dot{x}^b &= 0\end{aligned} \quad (2.20)$$

Las ecuaciones 2.20 son para geodésicas parametrizadas, con:

$$\Gamma_{ab}^c \equiv \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$$

Para obtener las ecuaciones de campo que necesitamos, usaremos la métrica de FLRW estudiada en la sección anterior, ecuación 2.9:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

La lagrangiana en este caso es:

$$L(\dot{x}^\sigma, x^\sigma) \equiv \frac{1}{2} \left[\dot{t}^2 - R(t)^2 \left(\frac{\dot{r}^2}{1 - kr^2} + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \right] \quad (2.21)$$

Donde el punto denota la derivada con respecto al parámetro u . Necesitamos ahora obtener las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} &= \dot{t} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= -R^2 r^2 \dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{-R^2 \dot{r}}{1 - kr^2} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= -R^2 r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -RR' \left(\frac{\dot{r}^2}{1 - kr^2} + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{-R^2 kr \dot{r}^2}{(1 - kr^2)^2} - R^2 r \dot{\theta}^2 - R^2 r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -R^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en 2.14, obtenemos las ecuaciones:

$$\ddot{t} + RR' \left(\frac{\dot{r}^2}{1 - kr^2} + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{-R^2 \ddot{r}}{1 - kr^2} - \frac{2RR' \dot{r}}{1 - kr^2} - \frac{R^2 kr \dot{r}^2}{(1 - kr^2)^2} + R^2 r \dot{\theta}^2 + R^2 r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (2.23)$$

$$-R^2 r^2 \ddot{\theta} - 2RR' r^2 \dot{\theta} - 2R^2 r \dot{r} \dot{\theta} + R^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (2.24)$$

$$-R^2 r^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} - 2RR' r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} - 2R^2 r \sin^2 \theta \dot{r} \dot{\phi} - 2R^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \quad (2.25)$$

Donde hemos usado $R' \equiv \frac{dR}{dt}$.

Estas ecuaciones son la versión covariante de las ecuaciones de geodésica dada por 2.19. Como $g_{\mu\nu}$ es diagonal, es fácil obtener la versión contravariante de estas ecuaciones, como en 2.20. Todo lo que hay que hacer es dividir cada ecuación, de tal manera que hagamos los coeficientes de \ddot{t} , \ddot{r} , $\ddot{\theta}$, $\ddot{\phi}$ iguales a uno. De esta manera, obtenemos las ecuaciones de geodésica para la métrica

FLRW:

$$\ddot{t} + RR' \left(\frac{\dot{r}^2}{1 - kr^2} + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) = 0 \quad (2.26)$$

$$\ddot{r} + 2 \frac{R'}{R} \dot{r} + \frac{kr\dot{r}^2}{1 - kr^2} - r(1 - kr^2) \dot{\theta}^2 - r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (2.27)$$

$$\ddot{\theta} + 2 \frac{R'}{R} \dot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (2.28)$$

$$\ddot{\phi} + 2 \frac{R'}{R} \dot{\phi} + 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\phi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \quad (2.29)$$

Si ahora comparamos 2.26, 2.27, 2.28, 2.29 con la ecuación 2.20, podemos obtener los coeficientes de conexión (símbolos de Christoffel), los cuales son cero, a excepción de los siguientes:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{RR'}{1 - kr^2} \\ \Gamma_{22}^0 &= RR' r^2 \\ \Gamma_{33}^0 &= RR' r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{01}^1 &= \frac{R'}{R} = \Gamma_{10}^1 \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1 - kr^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - kr^2) \\ \Gamma_{33}^1 &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{R'}{R} = \Gamma_{20}^2 \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2 \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{03}^3 &= \frac{R'}{R} = \Gamma_{30}^3 \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} = \Gamma_{31}^3 \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta = \Gamma_{32}^3 \end{aligned}$$

Ahora, usando el tensor de Ricci, definido por*:

$$R_{\mu\nu} \equiv \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \quad (2.30)$$

* En esta, y todas las expresiones hemos hecho uso de la siguiente notación para indicar derivadas:

$$\partial_\nu A = A_{,\nu}$$

Y recordando que $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}$, tenemos:

$$\begin{aligned} R_{00} &= 3\frac{\ddot{R}}{R} \\ R_{11} &= \frac{-R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\ R_{22} &= -(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2 \\ R_{33} &= -(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta \\ R_{\mu\nu} &= 0, (\mu \neq \nu) \end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, para poder aplicar la teoría de la Relatividad General al Universo, debemos idealizar a éste, modelándolo como un fluido perfecto, libre de viscosidad y propiedades de conducción de calor. De esta manera, el tensor de esfuerzo energía $T_{\mu\nu}$ para este modelo es:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_{\mu}u_{\nu} - Pg_{\mu\nu} \quad (2.31)$$

Que es el mismo para un fluido perfecto, donde ρ es su densidad propia, P es su presión, u_{μ} es la velocidad mundo de las partículas del fluido (para este caso estrellas, galaxias, etc). Por conveniencia usaremos unidades con $c = 1$.

De las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = -8\pi GT^{\mu\nu} \quad (2.32)$$

Podemos obtener una expresión alternativa:

$$\begin{aligned} g_{\gamma\nu}R^{\mu\gamma} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\gamma}g_{\gamma\nu} &= -8\pi Gg_{\gamma\nu}T^{\mu\gamma} \\ R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}R\delta_{\nu}^{\mu} &= -8\pi GT_{\nu}^{\mu} \end{aligned}$$

Haciendo $\mu = \nu$, tenemos:

$$R_{\mu}^{\mu} - \frac{1}{2}R\delta_{\mu}^{\mu} = -8\pi GT_{\mu}^{\mu}$$

Como $\delta_{\mu}^{\mu} = 4$, tenemos:

$$\begin{aligned} R - 2R &= -8\pi GT \\ -R &= -8\pi GT \\ R &= 8\pi GT \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la ecuación 2.32 y reescribiendola:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (2.33)$$

Volvamos ahora al tensor de esfuerzo energía, ecuación 2.31. Consideremos el caso en que $u^\mu u_\nu = 1$, lo cual nos deja como resultado:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)\delta_\mu^0\delta_\nu^0 - Pg_{\mu\nu}$$

O bien, contrayendo:

$$\begin{aligned} g^{\gamma\nu}T_{\mu\gamma} &= (\rho + P)\delta_\mu^0\delta_\nu^0g^{\gamma\nu} - Pg_{\mu\gamma}g^{\gamma\nu} \\ T_\mu^\nu &= (\rho + P)\delta_\mu^\nu - P\delta_\mu^\nu \end{aligned}$$

Si ahora tomamos $\nu = \mu$ y recordamos que $\delta_\mu^\mu = 4$, llegamos al resultado:

$$T = \rho - 3P \quad (2.34)$$

En nuestro sistema coordenado comóvil, se cumple que $u^\mu = \delta_0^\mu$, de tal manera que:

$$u_\mu = g_{\mu\nu}\delta_0^\nu = g_{\mu 0} = \delta_\mu^0$$

Por lo tanto, 2.31 se vuelve:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)\delta_\mu^0\delta_\nu^0 - Pg_{\mu\nu} \quad (2.35)$$

Usando estos dos resultados 2.34 y 2.35, podemos escribir el lado derecho de la ecuación 2.33 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} &= (\rho + P)\delta_\mu^0\delta_\nu^0 - Pg_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\rho - 3P)g_{\mu\nu} \\ &= (\rho + P)\delta_\mu^0\delta_\nu^0 - \frac{1}{2}(\rho - P)g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

El tensor métrico $g_{\mu\nu}$ para el elemento de línea FLRW es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-R^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

De esta forma podemos obtener:

$$\begin{aligned} T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00} &= \frac{1}{2}(\rho + 3P) \\ T_{11} - \frac{1}{2}Tg_{11} &= \frac{1}{2}\frac{(\rho - P)R^2}{1 - kr^2} \\ T_{33} - \frac{1}{2}Tg_{33} &= \frac{1}{2}(\rho - P)R^2r^2\sin^2\theta \\ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} &= 0, (\mu \neq \nu) \end{aligned}$$

Así, volviendo a las ecuaciones de campo de Einstein en la forma 2.33, tenemos:

$$R_{00} = \frac{1}{2} - 8\pi G(\rho + 3P)$$

Pero ya hemos obtenido antes R_{00} . Esto nos lleva a :

$$3\frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi G(\rho + 3P) \quad (2.36)$$

El resto de las ecuaciones son iguales, con la siguiente forma:

$$R\ddot{R} + 2\dot{a}^2 + 2k = 4\pi G(\rho - P)R^2 \quad (2.37)$$

La razón por la que estas tres ecuaciones son equivalentes, se debe a la homogeneidad e isotropía del elemento de línea FLRW.

Si ahora despejamos \ddot{R} de 2.36 y sustituímos en 2.37, obtenemos:

$$-\frac{8\pi G}{3}\rho R^2 + \dot{R}^2 + k = 0$$

Desarrollando ésta última expresión:

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 + k &= \frac{8\pi G\rho}{3}R^2 \\ \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho \end{aligned}$$

Recordando que $H = \frac{\dot{R}}{R}$, obtenemos una ecuación de suma importancia para nuestros propósitos:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R^2} \quad (2.38)$$

Ésta se conoce como la ecuación de Friedmann.

Volvamos ahora a la ecuación 2.36 y reescribámosla de la siguiente manera:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (2.39)$$

que es la ecuación de aceleración.

Por otro lado, volviendo al tensor de esfuerzo energía para fluidos perfectos, ecuación 2.31, podemos notar que éste es simétrico y que está compuesto por los campos vectoriales y escalares que caracterizan al fluido: ρ , P y u^μ .

Haciendo un poco de desarrollo en dicho tensor, obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= (\rho + P)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu} \\ T^{\mu\nu}u_\nu &= (\rho + P)u^\mu - Pu^\mu \\ T^{\mu\nu}u_\nu &= \rho u^\mu \end{aligned} \quad (2.40)$$

Podemos decir que $T^{\mu\nu}u_\nu$ es la densidad de 4-momento del fluido. Tomando la divergencia del tensor de esfuerzo energía 2.31, e igualando a cero, obtenemos el resultado siguiente:

$$(\rho u^\mu)_{;\mu} u^\nu + \rho u^\mu u^\nu_{;\mu} + P u_{;\mu}^\mu u^\nu + P u^\mu u^\nu_{;\mu} + P_{;\mu} u^\mu u^\nu - P_{;\mu} g^{\mu\nu} = 0 \quad (2.41)$$

La velocidad mundo u^ν satisface $u^\mu u_\mu = 1$, que al diferenciarlo nos da:

$$u_{;\mu}^\nu u_\nu + u^\nu u_{\nu;\mu} = 0 \quad (2.42)$$

Esto implica que $u_{;\mu}^\nu u_\nu = 0$. Aplicando esto en la ecuación 2.41, vemos que:

$$(\rho u^\mu)_{;\mu} + P u_{;\mu}^\mu = 0 \quad (2.43)$$

Con esto, la ecuación 2.41 se simplifica a:

$$(\rho + P) u_{;\mu}^\nu u^\mu = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) P_{;\mu} \quad (2.44)$$

Podemos reescribir 2.43 en la forma siguiente:

$$\rho_{;\mu} u^\mu + (\rho + P)(u_{;\mu}^\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\mu u^\nu) = 0$$

De nuevo, en nuestro sistema comóvil tenemos $u^\mu = \delta_0^\mu$. Esto nos reduce a:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3(\rho + P) \frac{\dot{R}}{R} &= 0 \\ \dot{\rho} + 3H(\rho + P) &= 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Esta es la ecuación del Fluido, la tercer ecuación que completa la descripción de la evolución del Universo.

Podemos escribir la ecuación del fluido de una forma distinta. Partiendo de la ecuación 2.45 multiplicamos por $R^3(t)$ en ambos lados, lo cual nos da como resultado:

$$\dot{\rho} R^3 + 3(p + \rho) R^2 \dot{R} = 0$$

Separando términos obtenemos:

$$\rho \frac{dR^3}{dt} + R^3 \dot{\rho} + p \frac{dR^3}{dt} = 0$$

Finalmente, obtenemos la expresión alternativa buscada:

$$\frac{d(\rho R^3)}{dt} + p \frac{dR^3}{dt} = 0 \quad (2.46)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de conservación local de la energía.

2.3. Ecuación de Estado

La ecuación de Friedmann 2.38, la de aceleración 2.39 y la ecuación de fluido 2.45 encontradas en la sección anterior, nos permiten calcular la evolución en el tiempo del factor de escala $R(t)$ así como de la densidad $\rho(t)$ y la presión $p(t)$, siempre y cuando conozcamos la relación que hay entre estas dos últimas, o bien la ecuación de estado del sistema. Anteriormente ya hemos modelado el Universo como un fluido perfecto, lo cual nos ayudó en la obtención de las ecuaciones ya mencionadas, ahora veamos un punto de suma importancia: ¿cuál es la ecuación de estado que describe nuestro modelo?

La ecuación de estado para nuestro fluido es una función de la presión en términos de la densidad o viceversa $p = p(\rho)$ ^{**}, lo cual en muchos casos de interés físico se expresa de manera apropiada de la siguiente manera:

$$p = \omega \rho c^2 \quad (2.47)$$

donde el parámetro ω es una constante que está dentro del intervalo $0 \leq \omega \leq 1$ conocido como intervalo de Zel'dovich.

Este resultado nos permite obtener la ecuación de estado para el fluido a diferentes valores de ω . Para $\omega = 0$ tenemos el caso del polvo (material que no ejerce presión), la cual es una buena aproximación al comportamiento de fluidos no relativistas; por otro lado, para el caso de partículas relativistas (un gas de fotones por ejemplo), la ecuación de estado es:

$$p = \frac{1}{3} \rho c^2 \quad (2.48)$$

Sólo debemos considerar el caso en el que ω sea constante en el tiempo; de esta manera, si consideramos la ecuación de estado 2.47 en la ecuación de conservación local de la energía 2.46, tenemos:

$$\frac{d(\rho R^3)}{dt} + \omega \rho \frac{dR^3}{dt} = 0 \quad (2.49)$$

Reagrupando términos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{3}{R} (1 + \omega) \frac{dR}{dt} \quad (2.50)$$

Integrando esta última ecuación tenemos:

$$\rho R^{3(1+\omega)} = \text{constante} \quad (2.51)$$

^{**} De aquí en adelante denotaremos la presión con p

De esta manera hemos obtenido una relación entre el factor de escala $R(t)$ y la densidad ρ en cualquier época en la historia del Universo. Podemos elegir la constante de tal manera que coincida con los valores que se miden en la actualidad:

$$\rho R^{3(1+\omega)} = \rho_{0\omega} R_0^{3(1+\omega)} \quad (2.52)$$

donde $\rho_{0\omega}$ y R_0 son los valores medidos en la actualidad, dependiendo de la época a la que nos referimos.

2.4. El Universo de Materia y de Radiación

Podemos aplicar esta última ecuación 2.52 a dos diferentes etapas en la historia del Universo, el periodo de dominio de materia y el periodo de radiación.

En la actualidad, se ha medido la densidad de materia del Universo, cuyo valor es [1]:

$$\rho_M = 1.88 \times 10^{-26} h^2 \Omega_m \text{kgm}^{-3}$$

En este momento, el valor de $h \sim 0.65$, $\Omega_m \sim 0.3$ [1]. Con estas consideraciones, la densidad de materia del Universo en nuestro tiempo es de:

$$\rho_M = 2.38 \times 10^{-27} \text{kgm}^{-3}$$

Podemos comparar este valor con el de la densidad debida a la Radiación Cómica de Fondo, el cual es [1]:

$$\rho_\gamma = 4.6 \times 10^{-31} \text{kgm}^{-3} \sim 10^{-6} \rho_M$$

Además, la contribución a la densidad debido a otras especies relativistas (neutrinos) en la actualidad es de [1]:

$$\begin{aligned} \rho_\nu &= 0.68 \rho_\gamma & \text{si } m_\nu = 0 \\ \rho_\nu &\sim \rho_\gamma & \text{si } m_\nu \neq 0 \end{aligned}$$

(2.53)

Donde m_ν denota la masa del neutrino. Vemos que la densidad de materia es grande comparada con las de radiación y de neutrinos. La densidad total del Universo la podemos obtener de la siguiente manera:

$$\rho = \rho_M + \rho_\gamma + \rho_\nu \quad (2.54)$$

Así, si ignoramos las posibles contribuciones de ρ_γ y ρ_ν , tenemos $\rho \sim \rho_M$ al tiempo actual. De esta forma, podemos decir que nuestro Universo está dominado por materia.

Para un Universo dominado por materia, tenemos, como una buena aproximación, el Universo del Polvo, el cual es un fluido no viscoso y sin presión, cuya ecuación de estado ya mencionamos anteriormente:

$$p = 0 \quad (2.55)$$

Con este valor para ω en la ecuación 2.52, tenemos:

$$\rho R^3 = \rho_0 R_0^3 \quad (2.56)$$

Podemos ver que en un Universo dominado por materia, la densidad de materia va como:

$$\rho_m \sim R^{-3} \quad (2.57)$$

O bien, haciendo uso de la relación de Lemaître 1.40:

$$\frac{R_0}{R} = (1 + z) \quad (2.58)$$

Obtenemos una expresión entre las densidades (a un tiempo arbitrario y al tiempo actual) y el corrimiento al rojo z :

$$\rho_m = \rho_0(1 + z)^3 \quad (2.59)$$

Mostremos la aplicación de la ecuación de Hubble considerando un Universo plano $k = 0$ donde la materia domina. La ecuación de Friedmann 2.38, se reduce:

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{8\pi}{3}G\right)\rho R^2 \quad (2.60)$$

Usando la ecuación 2.56, tenemos:

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\left(\frac{8\pi}{3}G\right)\rho_0 R_0^3 R^{-\frac{1}{2}}}$$

Finalmente, integrando obtenemos una expresión temporal para el factor de escala:

$$R(t) = \left(\frac{3\sqrt{\left(\frac{8\pi}{3}G\right)\rho_0 R_0^3}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}} \quad (2.61)$$

Por otro lado, tenemos el Universo dominado por radiación. Este Universo tiene lugar a tiempos muy tempranos en la edad del Universo, cuando la densidad de radiación ρ_γ , y por

tanto su efecto gravitacional excedían al de la materia; por esta razón, la densidad de radiación dominaba la dinámica de la expansión, o bien $\rho = \rho_\gamma$ en las ecuaciones de estado.

En este caso, la ecuación de estado no es tan simple, ya que el Universo está lleno de un gas de radiación (fotones) que ejerce una presión. Dicha ecuación ya fue mencionada anteriormente 2.48, y está dada por $p = \frac{1}{3}\rho$.

Podemos sustituir dicha ecuación de estado en la de conservación local de la energía, para encontrar una relación entre las densidades a un tiempo arbitrario y la del tiempo actual, pero en vez de eso, recurramos a la ecuación 2.52, sustituyendo $\omega = \frac{1}{3}$ en ella. De esta manera, encontramos la relación buscada:

$$\rho_\gamma R^4 = \rho_0 R_0^4 \quad (2.62)$$

O bien, haciendo uso de la relación de Lemaitre, tenemos:

$$\rho_\gamma = \rho_0(1+z)^4 \quad (2.63)$$

Vemos que en el Universo dominado por radiación, la densidad va como:

$$\rho_\gamma \sim R^{-4} \quad (2.64)$$

Usando esta relación, y la densidad del Universo dominada por materia, podemos obtener el valor de un z equivalente, para el cual el dominio de radiación es igual al dominio de materia. Tenemos para materia:

$$\rho_m = \rho_M(1+z_{eq})^3 \quad (2.65)$$

Y para radiación:

$$\rho_\gamma = \rho_R(1+z_{eq})^4 \quad (2.66)$$

Igualando estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{\rho_M}{\rho_R} = (1+z_{eq}) \quad (2.67)$$

El gran beneficio de esto, es que hemos obtenido una expresión para z_{eq} en términos de cantidades medibles en la actualidad. De esta manera, tenemos:

$$1+z_{eq} = 2.4 \times 10^4 \Omega_M h^2 \quad (2.68)$$

con los valores indicados anteriormente $h \sim 0.65$ y $\Omega_m \sim 0.3$.

De igual manera que se hizo para el Universo de dominio material, obtengamos la forma en que $R(t)$ evoluciona con el tiempo para la época de dominio de radiación. Nuevamente consideraremos $k = 0$, pero ahora usaremos la ecuación 2.62 en la de Friedmann:

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho_r R_0^4} R^{-1}$$

Integrando obtenemos el resultado buscado:

$$R(t) = \left(\frac{32}{3}\pi G\rho_r\right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} \quad (2.69)$$

En este modelo, sin curvatura y que se conoce como Universo de Einstein-de Sitter, podemos ver que en la etapa dominada por materia, el factor de escala evoluciona en el tiempo como $t^{\frac{2}{3}}$ y en la etapa dominada por radiación, crece como $t^{\frac{1}{2}}$.

Hemos analizado las dimensiones de nuestro Universo, su edad y el material que lo constituye a lo largo de los capítulos anteriores. Hemos visto que, aunque a gran escala se cumple el Principio Cosmológico, nuestro Universo no es exactamente homogéneo ni isotrópico a escalas pequeñas, de manera tal que para poder hacer un estudio más exacto de éste, como en la mayoría de las ramas de la ciencia, hay que recurrir a un modelo. *Hot Big Bang* es el nombre que se le da al modelo cosmológico estándar, el cual describe un Universo homogéneo e isotrópico de una manera aceptable. De las características del modelo, y de lo que hemos estudiado en los capítulos anteriores, nos damos cuenta de que para hacer una descripción del Universo es conveniente usar la métrica FLRW:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{ar^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

Las propiedades cinemáticas de este Universo deben coincidir de una manera precisa con el Universo que observamos en la realidad; sus principales componentes deben ser descritas como fluidos de materia y de radiación, considerándose ésta última de origen cosmológico. La evolución de su expansión está gobernada por las ecuaciones vistas en el capítulo anterior:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{R^2} && \text{Ec. de Friedmann} \\ p &= \omega \rho && \text{Ec. de Estado} \\ \dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0 && \text{Ec. del Fluido} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sin embargo, y a pesar de que la teoría da explicación a muchos fenómenos observados, hay algunos otros a los que no puede enfrentarse por sí sola. Primeramente, asumimos que el Universo temprano era altamente homogéneo a pesar de que regiones separadas de este estuvieron causalmente desconectadas. Esto es conocido como el problema del Horizonte. Además, el modelo predice una variedad de “reliquias no deseadas” tales como los monopolos magnéticos,

los cuales se cree fueron creados en una etapa muy temprana de la historia, durante la época de radiación y que, se supone, deberían ser muy abundantes en nuestros días, contrario a lo que se observa. Finalmente, tenemos la condición inicial problemática que asume el modelo, la cual nos dice que el valor inicial de la densidad debió ser regulada finamente con extraordinaria precisión para que haya sido capaz de producir un Universo igual al que vemos en nuestros días, éste es el problema de la llanura o planicie. Hay que remarcar que, si bien el Modelo Inflacionario que estudiamos en este trabajo es capaz de resolver todos estos problemas, nosotros sólomente abordaremos dos de ellos: El del horizonte y el de la planicie.

3.1. La Singularidad llamada Big Bang

Ya vimos en el capítulo anterior que nuestro modelo del Universo tiene una ecuación de estado de la forma $p = \omega\rho$, donde ω esta dentro del intervalo de Zel'dovich. Sin embargo, es de gran importancia mencionar que existen modelos del Universo donde el rango de ω es más amplio: $-\frac{1}{3} < \omega < 1$. Dichos modelos tienen la característica de poseer un punto en el tiempo en el que $R(t) = 0$, y donde la densidad diverge. Este punto se llama singularidad del Big Bang.

Para analizar dicha singularidad, debemos considerar las ecuaciones obtenidas en el capítulo anterior. Primeramente, reescribamos la ecuación de Friedmann 2.38 en la forma:

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2$$

Dividiendo entre el factor de escala al tiempo actual R_0 , tenemos:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 + \frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \quad (3.2)$$

Además, de la relación para la densidad en función del factor de escala, ecuación 2.52 tenemos que:

$$\rho = \rho_{0\omega}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(1+\omega)} \quad (3.3)$$

Lo cual, sustituyendo en la ecuación 3.2, nos deja:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 + \frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{0\omega}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} \quad (3.4)$$

Introduciendo el parámetro de densidad:

$$\Omega_{0W} = \frac{\rho_{0\omega}}{\rho_{0c}} \quad (3.5)$$

Tenemos finalmente:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H_0^2 \Omega_{0W} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} - \frac{k}{R_0^2} \quad (3.6)$$

Sin embargo, para dejar la ecuación 3.6 sólo en términos de Ω_{0W} , debemos obtener una relación entre k y Ω_{0W} . Esto lo hacemos de manera análoga al desarrollo anterior, lo cual nos da como resultado:

$$-\frac{k}{R_0^2} = H_0^2(1 - \Omega_{0W}) \quad (3.7)$$

Sustituyendo en 3.6, tenemos:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{0W} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} + (1 - \Omega_{0W}) \right] \quad (3.8)$$

O bien, en términos del parámetro de Hubble $H(t)$:

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left[\Omega_{0W} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} + (1 - \Omega_{0W}) \right] \quad (3.9)$$

Supongamos que, en la ecuación de aceleración

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

el término $\rho + 3P > 0$ de tal manera que $\frac{\ddot{R}}{R} < 0$. Si ahora consideramos por definición que al tiempo actual $t = t_0$, y además, dado que lo que se observa es corrimiento hacia el rojo y no hacia el azul, $\frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} > 0$, podemos decir que la curva descrita por $R(t)$ posee un máximo, por lo que es cóncava hacia abajo (hacia el eje del tiempo según la figura 3.1). Además, podemos ver que la curva tocará dicho eje a un tiempo que está más próximo al tiempo actual, que el tiempo al que lo hará la tangente a la curva en el punto $(t_0, R(t_0))$. A este tiempo se le llama $t = 0$. Como $R(0) = 0$ en dicho punto vemos que, de la ecuación 3.3, la densidad ρ diverge y de 3.9 notemos que también lo hace el parámetro de expansión de Hubble. El punto $t = 0$ puede nombrarse de manera acertada como el inicio del Universo.

La singularidad del Big Bang es inevitable en todos los modelos homogéneos e isotrópicos que posean una ecuación de estado con parámetro $\omega > -\frac{1}{3}$, lo cual incluye al intervalo de Zel'dovich.

3.2. El Problema del Horizonte

3.2.1. Distancia Propia y Distancia Comóvil

Antes de continuar con el desarrollo del trabajo, es necesario introducir el concepto de distancia propia y de distancia comóvil. Para ello, consideremos la métrica FLRW en

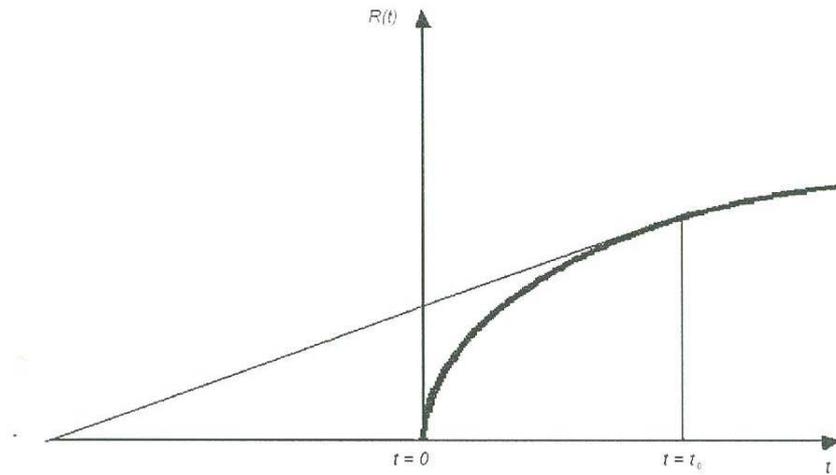


Figura 3.1: El análisis de la singularidad del Big Bang

coordenadas polares (r, θ, Φ) y un punto P_0 al que llamaremos origen de coordenadas, de tal manera que $\theta = \Phi = 0$. Supongamos que varios observadores a un cierto tiempo t , tratan de conectar P_0 con algún otro punto P del espacio. La distancia que medirían se conoce como distancia propia d_P , la cual podemos calcular haciendo $dt = 0$ en la métrica de FLRW:

$$d_P = \int_0^r \frac{R(t) dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = R(t) f(r) \quad (3.10)$$

Donde $f(r)$ es una función que depende de la curvatura del espacio, es decir de k en la ecuación anterior. Estas funciones son:

$$f(r) = \sin^{-1} r \quad \text{si } k = 1 \quad (3.11)$$

$$f(r) = r \quad \text{si } k = 0 \quad (3.12)$$

$$f(r) = \sinh^{-1} r \quad \text{si } k = -1 \quad (3.13)$$

La distancia propia d_P cambia con el tiempo, debido a la dependencia que hay con éste en el factor de escala $R(t)$. Esto nos permite relacionar la distancia propia a un tiempo t con la que hay al tiempo presente t_0 mediante $f(r)$:

$$d_P(t_0) = \frac{R_0}{R} d_P(t) \quad (3.14)$$

O bien, si en vez de usar $f(r)$, definimos una distancia comóvil radial de P , dada por:

$$d_c = R_0 f(r) \quad (3.15)$$

Obtenemos una relación entre distancias comóviles y distancias propias:

$$d_c = \frac{R_0}{R} d_P \quad (3.16)$$

Esta última distancia es la llamada distancia comóvil.

3.2.2. La Esfera de Hubble

Consideremos un observador en el origen de un sistema de coordenadas (r, θ, ϕ) en la métrica FLRW como en la sección anterior, capaz de recibir las señales de luz provenientes de varios puntos del Universo a un tiempo t . Todas estas señales debieron ser emitidas en algún tiempo dentro del intervalo $[0, t]$, al cual llamaremos t_0 . Por la simetría de la métrica, los rayos de luz se aproximan radialmente al origen, por lo que $\theta = \phi = \text{constante}$. Con esta simplificación, y recordando que la luz tiene condición $ds = 0$, la métrica se reduce a:

$$cdt = \frac{-Rdr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (3.17)$$

Donde el signo menos nos indica que los rayos de luz se aproximan al origen, donde se encuentra nuestro observador.

De esta manera, para un fotón que tenía una coordenada radial r al tiempo $t = t_0$, y que al tiempo t nos alcanza en $r = 0$, tenemos:

$$\int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = -c \int_{t_0}^t \frac{dt'}{R(t')} \quad (3.18)$$

Es interesante el comportamiento de la luz conforme se aproxima al observador; haremos un pequeño análisis de éste usando el modelo conocido como Universo plano (Einstein-de Sitter), donde $k = 0$ y donde $R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$. Evaluando en la integral 3.18, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_r^0 dr &= -c \frac{t_0^{\frac{2}{3}}}{R_0} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{t'^{\frac{2}{3}}} \\ r &= 3c \frac{t_0^{\frac{2}{3}}}{R_0} (t_0^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

O bien, podemos encontrar la distancia propia que hay del fotón a nosotros, multiplicando 3.19 por $R(t)$:

$$rR = 3ct_0^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} - 3ct \quad (3.20)$$

Con este resultado, podemos bosquejar el cono de luz del pasado de nuestro observador, en un diagrama de espaciotiempo, tal como lo muestra la figura 3.2. Una característica interesante

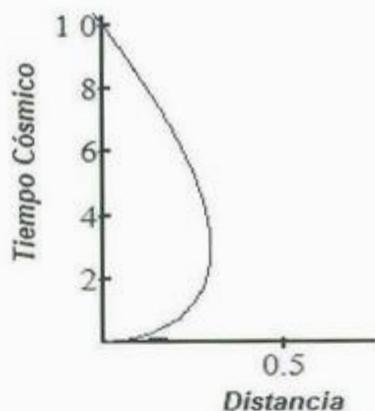


Figura 3.2: Diagrama de espaciotiempo donde se muestra el cono de luz en el pasado de nuestro observador. Su línea mundo está en el eje del tiempo en Unidades de 10^9 años, la escala espacial está en unidades de ct_0 años. Nótese que antes de acercarse, la luz se aleja describiendo una curva en forma de cebolla. Esto se debe a que en los primeros instantes del Universo, éste sufrió una expansión acelerada.

que se observa en este “cono” de luz es como la geometría ya no es totalmente plana, como estudiamos en Relatividad Especial, en cambio ahora podemos ver como el “cono” ha variado su geometría para doblarse como se observa en la figura.

Consideremos ahora la luz de una galaxia que es capaz de llegar al observador al tiempo presente. Para que esto pueda ocurrir, la luz debió ser emitida en un tiempo del pasado t_e en el que su línea mundo se intersectó con el cono de luz del observador, como se muestra en la figura 3.3. En ese momento, la galaxia se encontraba alejada del observador una distancia propia l_e dada por la ecuación 3.20:

$$l_e = 3ct_0 \left[\frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (3.21)$$

Hemos usado la expresión que relaciona el tiempo con el corrimiento al rojo $t_e = \frac{t_0}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}$. Es importante notar que, la ecuación 3.21 tiene un máximo en $z = \frac{5}{4}$, lo cual corresponde a un tiempo de $t = \frac{8t_0}{27}$. Como hemos mencionado, la forma de cebolla que describe nuestro cono de luz en las figuras 3.2 y 3.3 es muy diferente a lo que esperábamos de la Relatividad Especial, para explicarla, consideremos que un fotón emitido en dirección al observador a un tiempo menor que $t = \frac{8t_0}{27}$ en el universo de Einstein-de Sitter, se alejará primero, antes de acercarse a éste debido a que se está propagando en un espacio que se expande de acuerdo a la ley de distancia velocidad

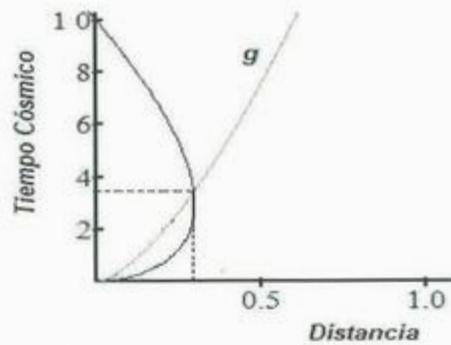


Figura 3.3: Para que la luz emitida por una galaxia (g) a un tiempo t_e sea detectada por el observador al tiempo presente, la línea mundo de la galaxia debió cruzarse en algún punto con el cono de luz del observador, tal como lo muestra este diagrama de espaciotiempo. El tiempo está en unidades de 10^9 años y la distancia medida en unidades de ct_0 .

2.13:

$$v = H(t)l$$

Podemos usar esta relación para calcular la velocidad de una galaxia comóvil que se encuentra a una distancia l_e al tiempo t_e :

$$v_e = 3ct_0H(t_e) \left[\frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (3.22)$$

$$= 2c \left[(1+z)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \quad (3.23)$$

Observemos el comportamiento cuando la luz emitida ocurre a $z > \frac{5}{4}$. En este caso:

$$v_e > c \quad (3.24)$$

Este resultado nos dice que la luz se propaga en un espacio que se aleja del observador a una velocidad mayor que la de la luz, de manera que debe esperar hasta que la razón de expansión disminuya para poder desplazarse en la dirección de él. Este comportamiento se debe a que en los primeros instantes del Universo, la expansión estaba acelerada. No importa para que valor de curvatura estemos tratando ($k = -1, 0, +1$), lo mismo ocurre en cualquier Universo que este decelerado.

Consideremos una galaxia que a un tiempo t está sobre la superficie de una esfera. El radio de dicha esfera, es la distancia propia recorrida por un rayo de luz en el tiempo de expansión

del Universo:

$$\tau_H \equiv \frac{R(t)}{\dot{R}(t)} = \frac{1}{H} \quad (3.25)$$

Podemos pensar en dicho radio como la distancia que hay entre el origen de un sistema de coordenadas, a la galaxia en cuestión, la cual se mueve con la expansión del Universo a la velocidad de la luz con respecto a dicho origen.

$$D_c = \frac{c}{H(t)} \quad (3.26)$$

Esta superficie se conoce como esfera de Hubble, y se mueve con una velocidad:

$$\frac{dD_c}{dt} = c \left(1 - \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \right)$$

O bien, en términos del parámetro de deceleración introducido en el primer capítulo, $q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}$,

$$\frac{dD_c}{dt} = c(1 + q) \quad (3.27)$$

Supongamos que nuestro Universo tiene un parámetro $q > 0$, es decir, está desacelerado. En este caso, la esfera de Hubble está compuesta de galaxias cuya velocidad relativa (al origen, para nuestro observador por ejemplo) es de cq . De esta manera, llegará el momento en que, una galaxia que inicialmente está fuera de la esfera de Hubble alejándose a una velocidad $v > c$, sea rebasada por la esfera, y entonces se aleje a una velocidad $v < c$. Podemos ver este comportamiento en la figura 3.4, en la que se bosqueja la esfera de Hubble para el caso del cono de luz de nuestro observador y de la línea mundo descrita por la galaxia g mencionada. Nótese como es que hay un momento en que ambas están por fuera de la esfera de Hubble, por lo que se alejan del observador, pero cuando son alcanzadas por ésta su dirección es acercándose a éste.

3.2.3. El Horizonte de Partículas

Recordemos de nuestro ejemplo anterior que para que podamos detectar un rayo de luz emitido por una galaxia a un tiempo t_e , la línea mundo descrita por ésta en un diagrama de espaciotiempo debió cruzarse con nuestro cono de luz en el mismo tiempo t_e . En ese momento la galaxia se encontraba a una distancia propia de nosotros descrita anteriormente por la ecuación 3.21. Podemos concluir entonces que lo que detectamos no es más que información del pasado de dicha galaxia. Por ejemplo, la distancia en que ésta se encuentra al tiempo presente es diferente a la que tenía al momento de emitir esa luz. La forma más fácil de ver esto, es apoyándonos en

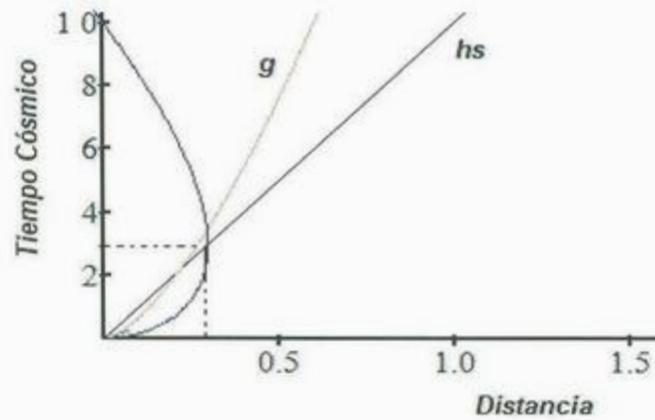


Figura 3.4: La esfera de Hubble (hs) para el ejemplo que hemos venido describiendo. Se puede apreciar el comportamiento de la luz a tiempo tempranos, pues en ambos casos se encuentra por fuera de la esfera de Hubble, a una velocidad superior a la de la luz alejándose del observador. Al momento de ser alcanzadas por ésta, su velocidad disminuye y su dirección cambia hacia el observador. En el diagrama, el tiempo se mide en unidades de 10^9 años, y la distancia en unidades de ct_0

un diagrama de espaciotiempo como el de la figura 3.5. En él podemos encontrar la distancia de la galaxia en la actualidad es el punto de intersección de la lineamundo de la galaxia g , con la recta $t = t_0$; vemos que ésta distancia es diferente a la que había al tiempo de emisión del rayo de luz, y podemos obtenerla de 3.19:

$$l_0 = rR_0 = 3ct_0 \left[1 - \left(\frac{1}{(1+z)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \quad (3.28)$$

De esta ecuación podemos ver que, la distancia más grande de la que pudimos haber recibido un rayo de luz, es aquella cuyo corrimiento al rojo es máximo $z \rightarrow \infty$. Esta distancia se conoce como horizonte de partículas y para el caso del Universo de Einstein-de Sitter a un tiempo t , es (de la ecuación 3.28):

$$D_h = 3ct \quad (3.29)$$

En la figura 3.5, podemos apreciar también que cualquier galaxia que haya cruzado nuestro cono de luz en el pasado está dentro de nuestro horizonte de partículas g' en la figura 3.5. Una galaxia que se encuentre más allá de él, no puede tener influencia sobre nosotros ni nosotros sobre ella; se dice que en esta situación estamos causalmente desconectados.

Podemos calcular la distancia de la que hablamos de la siguiente manera:

$$D_h(t) = R(t) \int_0^t \frac{cdt'}{R(t')} \quad (3.30)$$

En general, la integral del lado derecho de la ecuación 3.30 converge a un valor finito para los modelos de Friedmann, salvo en los casos en que el tiempo es muy pequeño, pues $R(t) \rightarrow 0$. En esta situación podríamos afirmar que las señales de luz que ha recibido nuestro observador provienen de todo el Universo.

Hay que recalcar que el radio de Hubble y el horizonte de partículas no son lo mismo; ya vimos que en el caso de la esfera de Hubble, una galaxia pudo haber estado fuera de ella, luego entrar y volver a salir, cosa que no ocurre en el caso del horizonte de partículas, pues una vez que se ha entrado a él se permanece dentro de él por siempre. Es posible que haya partículas situadas fuera de la esfera de Hubble de un observador, pero dentro del horizonte de partículas de éste. Incluso hay ocasiones en que tanto la esfera de Hubble como el horizonte de partículas coinciden, en cuyo caso se conoce como horizonte cosmológico efectivo.

3.2.4. Descripción del Problema

Recordemos que, como se mencionó en la sección anterior, todos los modelos cosmológicos de características homogéneas e isotrópicas con ecuación de estado $p = \omega\rho$ dentro del

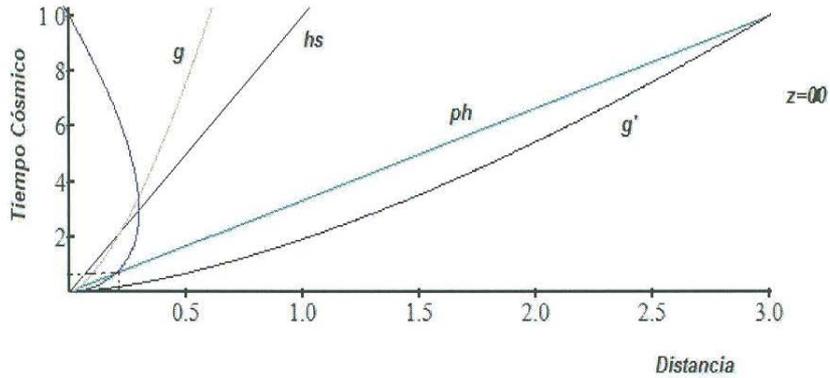


Figura 3.5: En este diagrama de espaciotiempo se han bosquejado tanto la esfera de Hubble (hs) como el horizonte de partículas (ph) para el caso del Universo de Einstein-de Sitter descrito. Nótese que hay un momento en el que nuestro cono de luz está fuera del Horizonte de partículas, pero una vez que ha entrado a éste permanecerá dentro de él para siempre. En el diagrama se muestra una galaxia g' que está por entrar al horizonte de partículas, por lo que ha estado desconectada causalmente del observador. Como vemos, la esfera de Hubble y el horizonte de partículas no son lo mismo: Hay un período en este diagrama en que nuestro cono de luz se encuentra dentro de el horizonte de partículas, pero fuera de la esfera de Hubble. La distancia está medida en unidades de ct_0 , y el tiempo en 10^9 años.

intervalo de Zel'dovich, poseen una singularidad en el tiempo $t = 0$. A esta singularidad se le conoce como Big Bang.

Existe una consecuencia más para los modelos cuya ecuación de estado es la descrita por la ecuación 2.51, la cual es que todos ellos poseen horizontes de partículas.

Consideremos que el factor de escala $R(t)$ se aproxima a cero en épocas tempranas a una razón proporcional a t^α , con $\alpha > 0$. Hagamos el análisis a partir de la ecuación de aceleración 2.39:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

Nuestro factor de escala es entonces de la forma:

$$R(t) = k_1 t^\alpha \quad (3.31)$$

Obtengamos las derivadas que hemos de usar en el desarrollo:

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= k_1 \alpha t^{\alpha-1} \\ \ddot{R}(t) &= k_1 \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Sustituyendo en la ecuación de aceleración, tenemos:

$$k\alpha(\alpha-1)\alpha-2 = -\frac{4}{3}\pi G(\rho+3P)k t^\alpha$$

O bien, simplificando, tenemos:

$$\alpha(\alpha-1) = -\frac{4}{3}\pi G(\rho+3P)t^2 \quad (3.33)$$

Podemos ver, comparando con la ecuación de aceleración, que el lado derecho de este último resultado es proporcional a la cantidad $\ddot{R}(t)$. Recordamos que, cuando hablabamos de la singularidad del Big Bang, la condición que debía cumplirse para que dicho fenómeno ocurriera dentro de nuestro modelo es que $\ddot{R}(t) < 0$. Así, para que haya consistencia en este nuevo análisis, $\ddot{R}(t)$ también debe ser menor que cero en este caso. Esto nos lleva a afirmar que, de 3.33:

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1) &< 0 \\ \alpha-1 &< 0 \\ \alpha &< 1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

De aquí se puede ver que el valor de α debe ser menor que uno, y de la condición inicial de $\alpha > 0$, tenemos que, su intervalo de acción es $0 < \alpha < 1$.

Por otro lado, si ahora analizamos el horizonte de partícula para el factor de escala de la misma forma $R(t) = k_1 t^\alpha$ con $\alpha > 0$, tenemos de 3.11:

$$D_h(t) = R(t) \int_0^t \frac{cdt'}{R(t')} \quad (3.35)$$

Podemos ver que, debido a la forma del factor de escala, el integrando siempre tendrá una potencia de t en el denominador, razón por la que, al realizar la integral, el resultado seguirá teniendo la misma forma pero la potencia de t estará disminuida en una unidad. Esto sólo ocurre para los casos en que α sea un número igual o mayor que uno. Sin embargo, en el caso de que la potencia de t sea un número fraccionario menor que 1, la integral existirá, por lo que podemos decir que hay un horizonte de partículas. Hemos visto que en los modelos del Universo que satisfacen el principio Cosmológico existe la singularidad del Big Bang, y que el intervalo de acción de α necesario para esto es $0 < \alpha < 1$. Notemos que es el mismo intervalo necesario para la existencia del horizonte de partículas, por lo que podemos concluir que en todos los modelos de Universo que sean homogéneos e isotrópicos, existirá dicho horizonte.

Del análisis anterior, hemos llegado a la conclusión de que nuestro modelo tiene un horizonte de partículas. La existencia de dicho horizonte, debería poner en duda la homogeneidad e isotropía de nuestro Universo, y por tanto la aceptación del Principio Cosmológico, pero no es así. Por ejemplo, la CMBR que proviene de todo el cielo, está termalizada y obedece las características impuestas por el principio cosmológico. Esto nos dice que debió haber algún período en la historia del Universo en el que hubo flujo de energía entre las regiones de nuestro horizonte de partículas. Sin embargo hay regiones del cielo que nunca pudieron haber estado en contacto causal entre ellas, y que aun así la CMBR proveniente de esos lugares presenta las mismas características que las que sí estuvieron conectadas causalmente. ¿Cómo es posible que se observe la termalización de la CMBR si existen dichas regiones? ¿Cómo es que las condiciones físicas en esas regiones sean tan parecidas, y estén tan relacionadas cuando es imposible que haya habido contacto causal entre ellas?.

Hemos hecho un desarrollo de la teoría de manera detallada, y éste nos ha dado un resultado sorpresivo e inesperado: la teoría del Big Bang está incompleta, falta agregar algunos detalles.

3.3. El Problema de la Planicie

3.3.1. Descripción del Problema

Se ha observado que nuestro Universo tiene una densidad muy próxima al valor para la densidad crítica, $\Omega_0 \approx 1$

Para tener una densidad cercana a la crítica en el tiempo actual, se necesita que Ω haya sido muy próxima a 1 en el tiempo de Planck, el tiempo más temprano al que las ecuaciones de Einstein pueden describir.

Así, esto nos lleva a pensar que el Universo requirió de condiciones iniciales sintonizadas de manera fina. Analicemos esto, viendo como es la evolución de Ω como función del factor de escala $R(t)$

Hemos encontrado que la relación entre el factor de escala y la densidad tiene una forma sencilla, tanto para un Universo dominado por materia, como para uno dominado por radiación, ecuaciones 2.62 y 2.66.

Podemos englobar estas expresiones en una sola, dejando que un parámetro β controle la época del Universo para la cual estemos tratando. De la ecuación 2.52, esto nos da la siguiente expresión:

$$\rho R^\beta = \rho_0 R_0^\beta \quad (3.36)$$

Consideremos la ecuación de Friedmann en la forma

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 - k \quad (3.37)$$

Multiplicando por $\frac{1}{R^2}$ y realizando álgebra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{8\pi G}{3}\rho R^2 - k\right) \\ R^2 \left(\frac{\dot{R}}{R^2}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 - k \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$R^2 H^2 \left(1 - \frac{8\pi G}{3H^2}\rho\right) = -k \quad (3.39)$$

Hemos incluido en $\rho = \rho_m + \rho_r$.

En la ecuación anterior, el parámetro de densidad es:

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \quad (3.40)$$

De esta manera, la ecuación 3.39 nos queda:

$$-k = R^2 H^2 (1 - \Omega) \quad (3.41)$$

Como el término de la izquierda es una constante, podemos referirnos al valor de los parámetros cosmológicos a distintos tiempos, o bien:

$$R^2 H^2 (1 - \Omega) = R_0^2 H_0^2 (1 - \Omega_0) \quad (3.42)$$

De la ecuación 3.36 tenemos:

$$\rho R^3 = \rho_0 R_0^3$$

Haciendo algunos cálculos, podemos reescribirla de la siguiente manera:

$$H_0^2 = \frac{H^2 \Omega R^\beta}{\Omega_0 R_0^\beta} \quad (3.43)$$

Sustituyendo en 3.42

$$\begin{aligned} R^2 H^2 (1 - \Omega) &= R_0^2 \left(\frac{H^2 \Omega R^\beta}{\Omega_0 R_0^\beta} \right) (1 - \Omega_0) \\ \frac{R^2 (1 - \Omega)}{R^\beta \Omega} &= \frac{R_0^2 (1 - \Omega_0)}{R_0^\beta \Omega_0} \end{aligned}$$

Y finalmente, llegamos a la ecuación:

$$\frac{1 - \Omega}{\Omega R^{\beta-2}} = \frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0 R_0^{\beta-2}} \quad (3.44)$$

O bien, podemos reescribirla de la siguiente forma:

$$\Omega_0 = \left[1 + \frac{(1 - \Omega)}{\Omega} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{\beta-2} \right]^{-1} \quad (3.45)$$

Ahora bien, si en el presente $\Omega_0 \approx 1$, entonces se requiere que en todo momento pasado:

$$\left(\frac{R_0}{R} \right)^{\beta-2} \frac{|1 - \Omega|}{\Omega} \ll 1 \quad (3.46)$$

Pero como $\beta > 2$ (tanto para radiación como para materia), entonces para tiempos tempranos tenemos:

$$\left(\frac{R_0}{R} \right)^{\beta-2} > 1 \quad (3.47)$$

Y para que se cumpla la condición descrita, sólo queda que:

$$\frac{|1 - \Omega|}{\Omega} \ll 1 \quad (3.48)$$

Para ver porque esto es un problema, consideremos la evolución de Ω desde un tiempo temprano en la historia del Universo hasta el presente. Necesitamos el valor de $\frac{R_0}{R_p}$ donde R_p es el factor de escala en dicho tiempo temprano. Gran parte de la expansión ocurre en un Universo dominado por radiación. Usaremos la ecuación:

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{32}{3} \pi G \rho R \right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} \quad (3.49)$$

Así podemos escribir

$$\frac{R_0}{R_p} \sim \left(\frac{t_0}{t_p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.50)$$

Considerando el tiempo actual $t_0 \approx 3 \times 10^{17} s$ y el tiempo temprano $t_p \approx 10^{-43} s$, tenemos:

$$\frac{R_0}{R_p} \sim \left(\frac{t_0}{t_p} \right)^{\frac{1}{2}} \sim 1.73 \times 10^{30} \quad (3.51)$$

Durante la fase de dominación por materia, R cambia sólo en un factor de 10^4 , así que la diferente dependencia de R en t no brinda una diferencia importante en la conclusión. Así, para el caso de la fase de radiación, $\alpha = 4$, y para obtener $\Omega_0 \sim 1$ de 3.45:

$$\Omega_0 = \left[1 + \frac{(1 - \Omega)}{\Omega} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{\alpha - 2} \right]^{-1} \quad (3.52)$$

Con $\Omega_0 \sim 1$:

$$1 = 1 + 10^{60} \frac{1 - \Omega_p}{\Omega_p}$$

Esto requiere que:

$$\frac{1 - \Omega_p}{\Omega_p} \sim 10^{-60}$$

O bien:

$$\Omega_p = 1 \pm 10^{-60} \quad (3.53)$$

Podemos concluir que para que el parámetro de densidad tenga el valor exacto del Universo crítico ($\Omega_0 = 1$), se requiere que, al inicio, su valor haya sido de ($\Omega = 1$). De 3.53 vemos que si Ω difiere de 1 por más de $\pm 10^{-60}$, entonces Ω va a cero, en cuyo caso no se pueden formar estructuras, u Ω va a infinito y el Universo se recolapsa a un *Big Crunch* en épocas muy tempranas. Concluimos, pues, que esta condición de Ω al tiempo de Planck es requerida para un Universo donde puedan haber estrellas, galaxias y vida.

A lo largo de los capítulos anteriores, hemos hecho un análisis de las principales características de nuestro Universo y de las ecuaciones que lo describen. Recordemos que nuestro modelo tiene como base principal el principio cosmológico y por tanto, es regido por la métrica FLRW, cuyas características son consistentes con él. Además, hemos modelado al Universo como un fluido perfecto libre de viscosidad, con una ecuación de estado de la forma $P = \omega\rho$ con ω dentro del intervalo de Zel'dovich.

Es gracias a esta última ecuación que podemos hablar de una singularidad con densidad infinita llamada Big Bang, a partir del cual surgió el Universo y con él todos los constituyentes que conocemos, dando inicio también a la expansión.

Como vimos, la expansión está controlada por una sola función dependiente del tiempo $R(t)$ llamada factor de escala, que en este trabajo, hemos encontrado que su comportamiento es $R(t) \propto t^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$. De esta manera, y buscando consistencia con la singularidad inicial, vimos que surge un problema grave para nuestro modelo en relación a lo observado, el cuál afecta seriamente al principio básico del que partimos: El Principio Cosmológico.

Nos enfrentamos también al problema de la llanura en nuestro modelo, el cual es grave, pues de no darse una explicación satisfactoria, el material que conocemos ahora nunca habría podido formarse, y el Universo se habría colapsado casi instantáneamente después de haber iniciado.

Con estos problemas, la principal pregunta que surge es, ¿Nos brinda nuestro modelo una descripción fiel del Universo conocido?. Recordemos que nuestros resultados deben ser consistentes con la observación, lo cual ha ocurrido a lo largo de nuestro análisis, hasta antes de la aparición de estos problemas. Sin embargo, ellos pueden resolverse si consideramos una época en la historia del Universo en la que la expansión estaba acelerada. Esta no es la primera vez que mencionamos esta idea; al hablar del espectro de la radiación Cósmica de Fondo en el capítulo 1, mencionamos que se podría describir lo observado si el Universo pasó por una época de aceleración durante su expansión.

Con base a esta idea, presentaremos en este capítulo una descripción más detallada de dicha expansión, la cual es conocida como Inflación Cósmica y que, como mencionamos antes, su introducción nos brinda una explicación al problema del horizonte y de la planicie, consistentes con la teoría, pero mejor aún, con lo observado.

4.1. La Idea de Inflación

4.1.1. Inflación en los Problemas del Horizonte y de la Planicie

En el capítulo anterior se presentaron dos de los problemas que surgen como consecuencia del modelo del Big Bang. Se hizo una breve descripción de ellos, dejando abierta la posibilidad de extender la teoría de tal manera que los resultados de ésta, coincidan con las observaciones experimentales. Éste es el objetivo que buscamos lograr mediante la introducción del concepto de Inflación Cósmica.

Para realizar este trabajo, lo primero que haremos será dar una motivación de porqué es acertado pensar en una etapa del Universo en la que hubo expansión acelerada. La mejor forma de lograr esto es mostrando que con la simple definición de inflación, ésta resuelve los problemas antes citados.

Iniciaremos con el problema del Horizonte, para lo cual haremos uso del Horizonte Cosmológico descrito anteriormente. Recordemos que en éste, la esfera de Hubble y el Horizonte de partículas coinciden de manera tal que, considerando las ideas de distancia propia y comóvil planteadas en la sección 3.3.1, su radio propio es de la forma $D_c = c \frac{R}{H}$, y su radio comóvil es $r_c = c \frac{R_0}{H}$.

Imaginemos una región comóvil del Universo con medida propia l_0 que se encuentra dentro del Horizonte, por lo que está causalmente conectada con las otras regiones que están dentro de este también. Nos apoyaremos en la figura 4.1 para hacer éste análisis.

En el momento considerado, nuestra región se encuentra dentro del intervalo de tiempo $t_i < t < t_B$. Ahora, en el intervalo de tiempo siguiente $t_B < t < t_f$, nuestra región intenta abandonar el Horizonte, quedando desconectada de toda influencia causal de las regiones que aún están dentro de éste en $t_B < t < t_C$. De acuerdo a la figura 4.1 y a nuestro análisis de la esfera de Hubble, el escape sólo ocurrirá, si en algún momento, la medida propia de nuestra región es mayor que el radio comóvil del horizonte:

$$l_0 > r_c \tag{4.1}$$

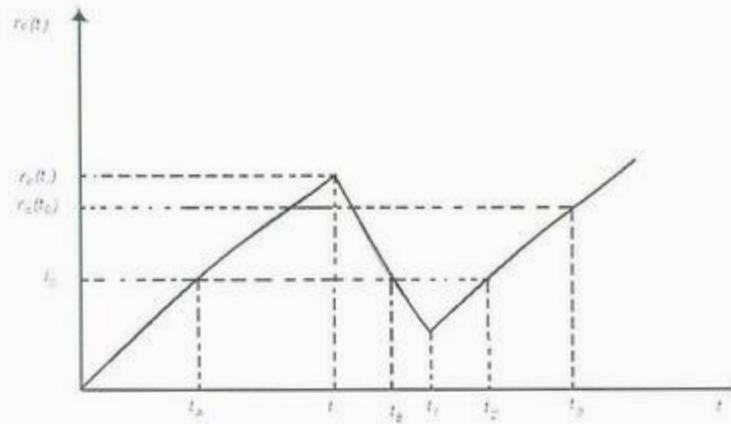


Figura 4.1: En esta figura podemos ver la evolución de una región comóvil a lo largo de $r_c(t)$

La condición anterior sólo ocurrirá si, de alguna manera, el radio comóvil decrece con el tiempo, lo cual requiere una expansión acelerada $\ddot{R} > 0$, la cual hemos adoptado como definición de inflación.

Aún tenemos el punto temporal t_C en la figura. Éste es de gran importancia, pues en él recae primordialmente la razón del porqué del problema de Horizonte, por lo que trataremos de dar una descripción de él en la figura. Hemos dejado a nuestra región comóvil dentro del período de tiempo $t_B < t < t_C$. La región sigue su evolución en el tiempo hasta alcanzar el punto t_C , donde entrará de nuevo al horizonte cosmológico. Un observador situado en este punto, y que desconoce que ha ocurrido una etapa de expansión acelerada, verá que la región entra por primera vez al horizonte. ¿Cuál será su sorpresa cuando, después de analizarla, sus datos le informen que posee homogeneidad con las otras regiones que ya estaban dentro? Sin lugar a dudas, para dicho observador existirá el problema del Horizonte, pero no para nosotros, que conocemos cual es la historia completa.

Podemos decir entonces que, basta con incluir la condición $\ddot{R} > 0$ para dar una explicación aceptable a nuestro problema. La existencia de una etapa de expansión acelerada se garantiza si se cumple que el radio comóvil máximo en el que l_0 estuvo causalmente conectado por primera vez, $r_c(t_i)$, es mucho mayor que el radio comóvil del horizonte actual, $r_c(t_0)$:

$$r_c(t_0) \ll r_c(t_i) \quad (4.2)$$

Para el problema de la planicie, haremos un análisis más sencillo, basados en la ecuación de Friedmann en la forma 3.24:

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{R^2 H^2} \quad (4.3)$$

Si ahora derivamos 4.3 con respecto al tiempo, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\Omega - 1| &= \frac{d}{dt} \left(\frac{|k|}{R^2 H^2} \right) \\ &= \frac{-2|k|\dot{R}}{\dot{R}^3} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Esta última expresión contiene el término de aceleración en forma explícita, por lo que nos facilitará el análisis. Siguiendo los criterios de máximos y mínimos, junto con la definición de inflación $\ddot{R} > 0$, tenemos que la curva descrita por $R(t)$ posee un mínimo. Como la primera derivada \dot{R} describe la pendiente de la recta tangente a la curva en algún punto, tenemos que para la existencia del mínimo, $\dot{R}(t)$ debe cambiar su signo de negativo a positivo, por lo que también podemos decir que $\dot{R} > 0$. De 4.4 y de estos argumentos, se debe cumplir que:

$$\frac{d}{dt} |\Omega - 1| < 0 \quad (4.5)$$

De esta manera tenemos que, conforme el Universo evoluciona en un período de inflación $|\Omega - 1|$ es más pequeño cada vez, más cercano a cero y Ω se aproxima a la unidad sin alejarse de ésta, tal como lo informa la observación, por lo que inflación nos da una forma de explicar también el problema de la planicie.

Hemos tratado de dar una motivación para introducir inflación, basandonos sólo en la manera en que ésta se define. Sin embargo, nuestro objetivo es hacer un análisis cuantitativo en términos de los conceptos introducidos a lo largo del trabajo y, en base a nuestras conclusiones, mostrar que la propuesta de un modelo inflacionario es una alternativa que resuelve, efectivamente, los problemas del modelo cosmológico estándar considerados.

4.1.2. Ecuaciones de Movimiento para el Campo Inflacionario

Hemos definido a la inflación como una época en la historia del Universo durante el cual la expansión cósmica está acelerada $\ddot{R}(t) > 0$. Antes de proseguir con la visión general de inflación, la estudiaremos desde una perspectiva diferente. Para trabajar con ella, normalmente se asume que, aun tiempo pequeño $\sim 10^{-34}s$, la densidad de energía de nuestro fluido cosmológico estaba dominada por un campo escalar, al que se le llama inflatón. Para entender este concepto

de campo escalar, comparemos con otros fenómenos de la física mejor conocidos. Recordemos, por ejemplo, que el campo electromagnético (EM) está representado totalmente por un conjunto de cuatro números: tres para su localización espacial y uno más que nos indicará el instante de tiempo al que deseamos conocerlo. Sin embargo, el campo (EM) está creado por una serie de fuentes que llamamos cargas eléctricas y, además, si se hace una análisis cuántico de éste campo (EM), se obtiene una representación en términos de partículas llamadas fotones. Así, podemos interpretar la interacción del campo EM con las fuentes (cargas eléctricas) como un intercambio de fotones entre éstas.

Un campo cuántico que quede especificado por un sólo número en cada punto del espacio, de manera análoga al campo EM, es a lo que llamamos inflatón. De esta manera, se puede hacer el análisis de inflación como si se tratara de un problema de dinámica de campos escalares.

Sea Φ el campo escalar que usaremos, cuya forma será la más sencilla, es decir no interactúa con el medio y su valor es el mismo en cada punto del espacio, es decir es homogéneo, de manera tal que sólo sea una función del tiempo:

$$\Phi = \Phi(t) \quad (4.6)$$

Además, es una partícula de espín cero por lo que su evolución en el tiempo está determinada por la ecuación de Klein-Gordon.

Como se mencionó anteriormente, la densidad de energía de nuestro fluido, está regida por el campo escalar, por lo que podemos asociarle a éste una contribución por parte de la densidad de energía cinética de la forma $\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2$. Además, también le asociamos una densidad de energía potencial que surge de la autointeracción del campo, la cual será una función de $V(\Phi)$. Así, la energía total en un volumen cómovil R^3 es:

$$E = \left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \right) R^3 \quad (4.7)$$

Para proseguir con nuestro desarrollo, interpretaremos la ecuación 4.7 como en mecánica clásica, considerando a Φ como la coordenada x de una partícula, de manera que la masa que ésta posea será dependiente del tiempo R^3 ; la partícula se moverá bajo la influencia de un potencial $R^3V(x)$. De esta manera, el momento lineal de la partícula es:

$$p = R^3\dot{x} \quad (4.8)$$

Nuestro campo es conservativo, por lo que podemos escribir la ecuación de movimiento de

la partícula en base a la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(R^3\dot{x}) &= -R^3\frac{dV}{dx} \\ 3R^2\dot{R}\dot{x} + R^3\ddot{x} &= -R^3V'(x) \\ 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{x} + \ddot{x} &= -V'(x)\end{aligned}\quad (4.9)$$

Regresando a la notación de Φ (sustituyéndola en vez de x en la ecuación 4.9):

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V'(\Phi) = 0 \quad (4.10)$$

Esta es la ecuación de Klein-Gordon, la cual describe partículas con espín cero. En nuestro caso, nos ayudará con la dinámica de nuestro campo escalar durante el desarrollo posterior de este trabajo.

Para continuar con las ecuaciones del movimiento inflacionario, consideremos ahora la ecuación del fluido 2.49

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (4.11)$$

Donde en nuestro caso tenemos $\rho = \rho_\Phi$, que es la densidad de energía asociada al inflatón. Así, podemos ver de 4.7 que dicha densidad de energía en un volumen cómovil es:

$$\rho_\Phi = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \quad (4.12)$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$\dot{\rho}_\Phi = \dot{\Phi}\ddot{\Phi} + V'(\Phi)\dot{\Phi} \quad (4.13)$$

Comparando con la ecuación de Klein-Gordon, vemos que:

$$\dot{\rho}_\Phi = \dot{\Phi}\ddot{\Phi} + V'(\Phi)\dot{\Phi} = -3H\dot{\Phi}^2 \quad (4.14)$$

Igualando 4.11 con 4.14, tenemos:

$$\dot{\rho}_\Phi = -3H\dot{\Phi}^2 = -3H(\rho_\Phi + P) = -3H\left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) + P\right) \quad (4.15)$$

De donde podemos obtener una expresión para la presión efectiva de un campo escalar homogéneo:

$$P = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi) \quad (4.16)$$

Supongamos ahora que, a un cierto tiempo cósmico, la velocidad del inflatón era cero $\dot{\Phi} = 0$. De esta manera, las ecuaciones 4.12 y 4.16 se reducen a la forma:

$$\begin{aligned}\rho_{\Phi} &= V(\Phi) \\ P &= -V(\Phi) \\ \Rightarrow P &= -\rho_{\Phi}\end{aligned}\tag{4.17}$$

La ecuación 4.17 es la ecuación de estado más adecuada para trabajar con inflación.

Si ahora usamos 4.12 en la ecuación de Friedmann, tenemos:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[V(\Phi) + \frac{\dot{\Phi}^2}{2} \right]\tag{4.18}$$

Recordemos que la medición de $\Omega = 1$ garantiza geometría plana, es decir que debemos hacer $k = 0$ en la ecuación de Friedmann.

Podemos escribir también la ecuación de aceleración en términos de Φ de la siguiente manera:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{8\pi G}{3} [V(\Phi) - \dot{\Phi}^2]\tag{4.19}$$

Las ecuaciones 4.10, 4.18 y 4.17 son las ecuaciones que nos darán información de la dinámica del inflatón. Normalmente, los trabajos de inflación toman una función arbitraria $V(\Phi)$, y dependiendo de dicha elección, se tienen diferentes modelos inflacionarios. En este trabajo procederemos a analizar tres de estos potenciales particulares: Uno de magnitud constante (V_0), uno sin interacción con el medio ($V(\Phi) = \frac{1}{2}m^2\Phi^2$) y uno que si interactúa ($\lambda\Phi^4$); pero antes de ello, veamos una aproximación que nos permitirá resolver las ecuaciones en una forma más sencilla.

4.1.3. La Aproximación de Slow Roll

Podemos imaginarnos la dinámica del inflatón como una pelota de masa unitaria que rueda sobre una colina, cuya forma está moldeada por el potencial $V(\Phi)$. La posición y velocidad de ésta serán Φ y $\dot{\Phi}$ respectivamente. Todo el movimiento está descrito por las ecuaciones de inflación obtenidas anteriormente. Sin embargo, resolver este conjunto de ecuaciones para un potencial definido no es tan sencillo, por lo que normalmente, éstas se resuelven en la aproximación de slow roll.

Dicha aproximación asume que la velocidad del inflatón $\dot{\Phi}$ es pequeña, por lo que el término $\frac{\dot{\Phi}^2}{2}$ se puede despreciar al compararlo con el potencial $V(\Phi)$; además, el movimiento del inflatón descrito por la ecuación de Klein-Gordon estará dominado por fricción.

Prácticamente, todos los modelos de inflación satisfacen 3 condiciones. Primero, el movimiento del campo es sobreamortiguado, así que la fuerza $V'(\Phi)$ equilibra el término de fricción $3H\dot{\Phi}$, y en comparación con ellos, podemos despreciar el término $\ddot{\Phi}$ de la ecuación de Klein Gordon 4.10.

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + V'(\Phi) = 0$$

Para que la aproximación de *slow roll* pueda ocurrir, se necesita que el potencial que afecta el movimiento sea suave, con una pendiente $V'(\Phi)$, que deberá mantenerse pequeña conforme Φ evoluciona, de manera que la aceleración $\ddot{\Phi}$ y por tanto la velocidad $\dot{\Phi}$ sean pequeñas. De manera más precisa:

$$|\ddot{\Phi}| \ll |V'(\Phi)| \quad (4.20)$$

Mientras se satisfaga esta condición, la ecuación de movimiento será:

$$V'(\Phi) \approx -3H\dot{\Phi} \quad (4.21)$$

Derivando esta ecuación obtenemos la expresión:

$$V''(\Phi)\dot{\Phi} \approx -3H\ddot{\Phi} \quad (4.22)$$

Así, para que la energía potencial domine sobre la energía cinética $V \gg \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2$, necesitamos que se satisfaga:

$$1 \gg \frac{\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2}{V} \quad (4.23)$$

Despejando $\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2$ de 4.21, tenemos:

$$\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 = \frac{V'^2}{3H^2} \quad (4.24)$$

Sustituyendo en 4.23, tenemos:

$$1 \gg \frac{V'^2}{16\pi G V^2} \quad (4.25)$$

Finalmente, acomodando, llegamos a la conclusión de que, para satisfacer la aproximación, debe cumplirse la condición:

$$\left| \frac{V'}{V} \right| \ll 4\sqrt{\pi G} \quad (4.26)$$

Además, para que la energía potencial continúe dominando, necesitamos que se cumpla:

$$1 \gg \left| \frac{\ddot{\Phi}}{V'} \right| \quad (4.27)$$

Sustituyendo el valor $\ddot{\Phi}$ de 4.22 en 4.27, llegamos a la relación que debe cumplirse para poder hacer la aproximación:

$$\frac{V''}{V} \ll 8\pi G \quad (4.28)$$

En otras palabras, para que podamos hacer uso de la aproximación de slow roll, se deben cumplir los siguientes parámetros, llamados parámetros de slow roll:

$$\epsilon \equiv \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (4.29)$$

$$\eta \equiv \frac{1}{8\pi G} \frac{V''}{V} \quad (4.30)$$

La ecuación 4.29 mide la pendiente del potencial, mientras que 4.30 mide la curvatura de éste. Podemos decir que, las condiciones necesarias para que podamos aproximar con slow roll son que la pendiente ϵ y la curvatura η del potencial sean muy pequeñas. Esto nos dice que el potencial $V(\Phi)$ es relativamente plano durante el período de inflación. Por otro lado, la expansión acelerada no debe durar por siempre, para lograr que esto ocurra, de nuevo apelamos a la interpretación de los parámetros de slow roll. La inflación se detendrá cuando el parámetro ϵ es comparable con la unidad, lo cual significa que el potencial tiene la mayor pendiente posible. Por lo tanto consideraremos que la inflación inicia cuando los parámetros de slow roll son iguales a cero y termina cuando $\epsilon = 1$.

Ahora bien, usando esta aproximación en las ecuaciones de inflación, vemos que estas se reducen a:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\Phi) \quad (4.31)$$

$$3H\dot{\Phi} = -V'(\Phi) \quad (4.32)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{8\pi G}{3} V(\Phi) \quad (4.33)$$

El conjunto de ecuaciones 4.31, 4.32 y 4.33 (Ecuación de Friedmann, de Klein-Gordon y de Aceleración respectivamente) es el sistema que debemos resolver ahora, para recuperar la dinámica de la inflación.

4.2. La Solución Inflacionaria

4.2.1. La Cantidad de Inflación

Una vez conocida la dinámica de la inflación, surge la necesidad de cuantificar qué tanta es producida en el Universo desde el tiempo que inicia t_i hasta el que termina t_f , ésta

es la cantidad de inflación. Normalmente, para que se produzca suficiente inflación como para resolver los problemas citados, se necesita que la expansión sea exponencial durante el período inflacionario. De esta manera, si calculamos una razón entre el factor de escala al momento en que inflación termina y al momento en que ésta inicia tendremos:

$$\frac{R(t_f)}{R(t_i)} = e^{\mathcal{N}} \quad (4.34)$$

Es decir, el factor de escala original se “ $e^{\mathcal{N}}$ -plica”, por esta razón a \mathcal{N} se le conoce como la multiplicidad \mathcal{N} de incremento o “e-folding” (en inglés).

Podemos medir la cantidad de inflación si conocemos este incremento:

$$\mathcal{N} = \ln \left(\frac{R(t_f)}{R(t_i)} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H dt \quad (4.35)$$

Usando las ecuaciones con aproximación de slow roll, dividimos 4.26 entre 4.27 para obtener H:

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{3H\dot{\Phi}} &= -\frac{8\pi G}{3} \frac{V(\Phi)}{V'(\Phi)} \\ H &= -8\pi G \frac{V(\Phi)}{V'(\Phi)} \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Sustituyendo esta última ecuación en 4.29, tenemos finalmente:

$$\mathcal{N} \approx -8\pi G \int_{\Phi_i}^{\Phi_f} \frac{V(\Phi)}{V'(\Phi)} d\Phi \quad (4.37)$$

Notemos que la cantidad de inflación entre dos valores de campo escalar pueden calcularse sin necesidad de resolver las ecuaciones de movimiento.

4.2.2. El Problema del Horizonte y el Problema de la Planicie

Ha llegado el momento de obtener la solución cuantitativa señalada anteriormente para los dos problemas en cuestión. Para hacer esto, nuestro punto de partida será considerar que la historia del Universo está distribuida dentro del intervalo del tiempo inicial y el presente $[t_i, t_0]$.

Hemos dividido el intervalo en tres periodos que describirán las diferentes eras del Universo:

- Inflación: (t_i, t_f) , donde la ecuación de estado es tal que $\omega < -\frac{1}{3}$
- Dominio de Radiación: (t_f, t_{eq}) , con ecuación de estado tal que $\omega = \frac{1}{3}$
- Dominio de Materia: (t_{eq}, t_0) , con ecuación de estado tal que $\omega = 0$.

Además, hemos visto que hay suficiente evidencia para decir que $\Omega = 1$ durante la evolución del Universo, y en particular en estas tres eras.

Consideremos la ecuación de Friedmann escrita en la forma señalada por 3.6:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} + (1 - \Omega) \right]$$

Considerando el valor de $\Omega = 1$, nos queda:

$$\frac{H_i R_i}{H_j R_j} \approx \left(\frac{R_i}{R_j}\right)^{-\frac{1+3\omega_{ij}}{2}} \quad (4.38)$$

Donde hemos usado la relación $\dot{R} = RH$. Ahora, introdujamos en nuestro análisis, la condición para que no exista el problema del horizonte, ecuación 4.2:

$$r_c(t_0) \ll r_c(t_i)$$

O bien, reescribiendo en términos de los factores de escala:

$$\frac{R_0}{\dot{R}_i} \gg \frac{R_0}{\dot{R}_0}$$

Lo anterior nos dice que, la condición que se debe satisfacer para resolver el problema del horizonte, es que $H_i R_i \ll \frac{H_0}{R_0}$. Esto nos lleva a:

$$\frac{H_i R_i}{H_f R_f} \ll \frac{H_0 R_0}{H_f R_f} = \frac{H_0 R_0}{H_{eq} R_{eq}} \frac{H_{eq} R_{eq}}{H_f R_f} \quad (4.39)$$

Comparando con 4.38, llegamos a la siguiente relación:

$$\left(\frac{R_f}{R_i}\right)^{-(1+3\omega)} \gg \left(\frac{R_0}{R_{eq}}\right)^{-\frac{(1+3\omega)}{2}} \left(\frac{R_{eq}}{R_f}\right)^{-\frac{(1+3\omega)}{2}} \quad (4.40)$$

Usando los respectivos valores de ω para cada división, la ecuación se reduce a:

$$\left(\frac{R_f}{R_i}\right)^{-(1+3\omega)} \gg \left(\frac{R_0}{R_{eq}}\right) \left(\frac{R_{eq}}{R_f}\right)^2 \quad (4.41)$$

Usando la relación entre el factor de escala y temperatura, ecuación 1.45, $R_f T_f = R_0 T_0$ en la ecuación anterior, reescribimos:

$$\left(\frac{R_f}{R_i}\right)^{-(1+3\omega)} \gg \left(\frac{R_0}{R_{eq}}\right) \left(\frac{T_f}{T_{eq}}\right)^2 \quad (4.42)$$

Usando la relación de lemaître en z_{eq} , en el resultado anterior, obtenemos finalmente una expresión importante:

$$\left(\frac{R_f}{R_i}\right)^{-(1+3\omega)} \gg 10^{60} Z_{eq}^{-1} \left(\frac{T_f}{T_P}\right)^2 \quad (4.43)$$

En los inicios del Universo, la temperatura era muy grande, y al acercarnos al tiempo de equivalencia entre la radiación y la materia, encontramos dicho comportamiento de temperaturas. Debido a esto, hemos reescalado la ecuación 4.43 en términos de la temperatura de Planck, la cual es la temperatura más alta que se puede considerar sin que haya efectos cuánticos, pues a temperaturas mayores que ella, entramos al período en que todas las interacciones elementales contribuyen de manera considerable.

Este resultado es la clave de la solución al problema del horizonte. Vemos en la ecuación 4.43 que la desigualdad está determinada, pues del lado derecho de ella tenemos un valor particular en términos de cantidades, en principio, conocidas; por otro lado, en la parte izquierda de la desigualdad tenemos una razón entre el factor de escala al tiempo en que termina el período inflacionario, y el valor que éste tenía al inicio del mismo período, es decir, para que el problema del horizonte deje de ser un conflicto, la expansión del Universo, en algún momento entre su origen y el presente, debió tener una razón de expansión dada por la ecuación 4.43. Esta razón de expansión no es otra cosa más que la cantidad de inflación descrita anteriormente. Aproximemos esta cantidad, aplicando la definición de e-foldings 4.35:

$$\mathcal{N} \gg 60 \left[\frac{2.3 + \frac{1}{30} \ln \frac{T_f}{T_p} - \frac{1}{60} \ln Z_{eq}}{|1 + 3\omega|} \right] \quad (4.44)$$

Como mencionamos antes, en el modelo inflacionario se hace uso de $\omega \approx -1$; además, la contribución de los términos logarítmicos en el numerador es muy pequeña, por lo que, tenemos:

$$\mathcal{N} \gg 60 \quad (4.45)$$

Para el problema de la planicie, dividimos la historia del Universo de la misma manera que en el caso anterior, pero esta vez, partimos de la ecuación de Friedmann en la forma 3.42:

$$R^2 \rho (\Omega^{-1} - 1) = R_0^2 \rho_0 (\Omega_0^{-1} - 1) = cte \quad (4.46)$$

Podemos relacionar las épocas en que hemos dividido la historia del Universo usando la ecuación anterior:

$$(\Omega^{-1} - 1) \rho R(t)^2 = (\Omega_0^{-1} - 1) \rho_0 R_0^2 = \text{constante} \quad (4.47)$$

De manera que tenemos:

$$\frac{\Omega_i^{-1} - 1}{\Omega_0^{-1} - 1} = \frac{\rho_0 R_0^2}{\rho_i R_i^2} = \frac{\rho_0 R_0^2}{\rho_{eq} R_{eq}^2} \frac{\rho_{eq} R_{eq}^2}{\rho_f R_f^2} \frac{\rho_f R_0^2}{\rho_i R_i^2} \quad (4.48)$$

El análisis nos lleva al mismo resultado obtenido en 4.43, pero aumentado en un factor que tiene que ver con el parámetro de densidad Ω

$$\left(\frac{R_f}{R_i}\right)^{-(1+3\omega)} = \left(\frac{\Omega_i^{-1} - 1}{\Omega_0^{-1} - 1}\right) \left(\frac{R_0}{R_{eq}}\right) \left(\frac{R_{eq}}{R_f}\right) \quad (4.49)$$

O bien, dejando la expresión anterior en términos conocidos, al igual que en el caso del horizonte:

$$\left(\frac{R_f}{R_i}\right)^{-(1+3\omega)} = \left(\frac{1 - \Omega_i^{-1}}{1 - \Omega_0^{-1}}\right) 10^{60} Z_{eq}^{-1} \left(\frac{T_f}{T_P}\right)^2 \quad (4.50)$$

Si consideramos que Ω_0 no está más próximo a la unidad de como lo estuvo Ω_i , la condición para resolver el problema de la planicie es:

$$\frac{1 - \Omega_i^{-1}}{1 - \Omega_0^{-1}} > 1 \quad (4.51)$$

O en términos de e-foldings:

$$\mathcal{N} \gg 60 \left[\frac{2.3 + \frac{1}{30} \ln \frac{T_f}{T_P} - \frac{1}{60} \ln Z_{eq}}{|1 + 3\omega|} \right] \quad (4.52)$$

Por ejemplo vemos que si $\omega = -1$, tenemos una solución que es proporcional al problema del horizonte $\mathcal{N} \approx p\mathcal{N}_{min}$, o bien:

$$\mathcal{N} \approx p \left[2.3 + \frac{1}{30} \ln \left(\frac{T_f}{T_P} \right) \right] \quad (4.53)$$

Si $p > 1$, tenemos una relación entre Ω_i y Ω_0 :

$$(1 - \Omega_0^{-1}) = \frac{(1 - \Omega_i^{-1})}{e^{2(p-1)\mathcal{N}_{min}}} \quad (4.54)$$

Si $|1 - \Omega_i^{-1}| \approx 1$, incluso si $p = 2$, obtenemos:

$$(1 - \Omega_0^{-1}) \approx 10^{-|60 + \ln(\frac{T_f}{T_P})|} \ll 1 \quad (4.55)$$

De estos resultados, podemos ver que cualquier solución con ($p \gg 1$) implica que Ω_0 estará muy cerca de la unidad para un Universo con $|1 - \Omega_i^{-1}|$. Podemos decir, entonces, que si inflación resuelve el problema del horizonte, automáticamente resuelve el problema de la planicie también.

4.2.3. Inflación Producida por un Potencial Constante

Una vez que hemos mostrado que la Inflación C3smica resuelve los problemas del Horizonte y de la Planicie, proseguiremos con unos ejemplos de potenciales inflacionarios, $V(\Phi)$, que son funci3n del campo escalar antes descrito. S3lo usaremos tres tipos de potenciales diferentes a3un y cuando existe una amplia cantidad de ellos, pero esperamos que sean ilustrativos en cuanto a la manera de proceder con las ecuaciones de la din3mica inflacionaria. Iniciaremos con la forma m3s sencilla de potencial que existe: El potencial escalar Constante.

Como acabamos de mencionar, la forma de nuestro potencial es:

$$V(\Phi) = \Phi_0 = \text{constante} \quad (4.56)$$

Podemos obtener una gran cantidad de informaci3n de 3sta clase de potencial. Iniciemos considerando los par3metros de slow roll ϵ y η dependen de la primera y segunda derivada del potencial respectivamente. Recordemos que en la aproximaci3n de slow roll, dichos p3rametros deben ser menores que uno. En nuestro caso tenemos:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 0 \ll 1 \\ \eta &= 0 \ll 1 \end{aligned}$$

Estas condiciones son las correctas para iniciar inflaci3n en la aproximaci3n usada; sin embargo, la inflaci3n se detiene cuando $\epsilon = 1$, cosa que no puede ocurrir para este potencial. Este es un conflicto pues, el mecanismo de inflaci3n debe detenerse en alg3n momento. Este es un tipo de inflaci3n conocida como inflaci3n eterna, donde la expansi3n ser3 acelerada por siempre.

Resulta ilustrativo calcular el numero de e-foldings que este potencial genera, pues nos damos cuenta que dicho valor est3 indefinido; es decir, generar3 una cantidad infinita de e-foldings debido a que la epoca inflacionaria ser3 eterna.

4.2.4. Inflaci3n Ca3tica Polinomial

En la secci3n precedente, logramos generar inflaci3n haciendo uso del potencial m3s sencillo que podemos elegir: el potencial constante $V(\Phi) = V_0$. Sin embargo, vimos que es una mala elecci3n para modelar un Universo inflacionario que concuerde con lo observado; en adelante seguiremos nuestro concepto de inflaci3n trabajando con potenciales m3s complejos que el anterior, los cuales produzcan un tipo de inflaci3n conocida como ca3tica.

Este modelo de Universo inflacionario fue propuesto por Linde en 1983. Veamos como funciona en la discusión siguiente.

- Inflación Producida por un potencial de la forma $\frac{1}{2}m\Phi^2$

El primer análisis de este tipo de inflación, lo haremos con el campo más sencillo entre sus miembros. Éste es un campo másivo, pero que no interactúa con el medio de manera tal que no nos preocupemos de agentes externos, nuestro potencial será de forma polinomial, o bien:

$$V(\Phi) = \frac{1}{2}m^2\Phi^2 \quad (4.57)$$

Donde m es la masa del campo escalar.

Igual que en el caso anterior, resolveremos las ecuaciones de movimiento en la aproximación de slow roll, para lo cual, se deben de satisfacer los parámetros de slow roll $\epsilon < 1$, $\eta < 1$. En nuestro caso, tenemos:

$$\begin{aligned} \epsilon &\equiv \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = \frac{1}{4\pi G\Phi^2} \\ \eta &\equiv \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V''}{V} \right) = \frac{1}{4\pi G\Phi^2} \end{aligned}$$

De esta manera, vemos que el inflatón debe tener la siguiente característica:

$$|\Phi| > \frac{1}{\sqrt{4\pi G}} \quad (4.58)$$

Las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$H^2 = \frac{4}{3}\pi G m^2 \Phi^2 \quad (4.59)$$

$$3H\dot{\Phi} + m^2\Phi = 0 \quad (4.60)$$

Despejando H de 4.59 y sustituyéndola en 4.60, obtenemos una ecuación diferencial de la forma:

$$\sqrt{12\pi G}\dot{\Phi} + m = 0 \quad (4.61)$$

Supongamos que a un tiempo inicial t_i , nuestro campo escalar tiene un valor inicial Φ_i , y que éste varía con el tiempo ($t > 0$). Así, Usando separación de variables:

$$\int_{\Phi_i}^{\Phi} d\Phi = -\frac{m}{\sqrt{12\pi G}} \int_{t_i}^t dt \quad (4.62)$$

Obtenemos pues, una expresión para la evolución temporal de Φ :

$$\Phi(t) = \Phi_i - \frac{m}{\sqrt{12\pi G}}(t - t_i) \quad (4.63)$$

Para el caso del factor de escala $R(t)$, usaremos la ecuación de Friedmann reducida 4.59, que nos lleva a la ecuación diferencial siguiente:

$$\dot{R} - \sqrt{\frac{4}{3}\pi G m \Phi} R = 0 \quad (4.64)$$

Consideremos que al tiempo inicial, el factor de escala tenía un valor de R_i , por lo que usando separación de variables, tenemos:

$$\int_{R_i}^{R_f} \frac{dR}{R} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G m} \int_{t_i}^t \Phi dt \quad (4.65)$$

Usando la forma funcional de $\Phi(t)$ dada por , en la ecuación anterior, tenemos:

$$\ln \frac{R_f}{R_i} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G m} \int_{t_i}^t \Phi_i - \frac{m}{\sqrt{48\pi G}} (t - t_i) dt \quad (4.66)$$

Podemos ver que este resultado es el número de e-foldings que el potencial puede generar. De aquí, la función que describe la evolución temporal del factor de escala es:

$$R(t) = R_i e^{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G m} (\Phi_i (t - t_i) - \frac{m}{\sqrt{48\pi G}} (t - t_i)^2)} \quad (4.67)$$

Ahora, tenemos un aspecto muy importante que analizar: la cantidad de inflación que este potencial es capaz de producir (e-foldings). Para hacerlo, evaluaremos la integral mostrada anteriormente 4.37, usando la forma específica de nuestro potencial, dejándonos como únicas incógnitas el valor de los límites de integración. El valor final del inflatón, es aquel que tiene cuando el Universo inflacionario llega a su fin; recordemos que esto ocurre cuando $\epsilon = 1$, de manera tal que de la desigualdad 4.58 obtenemos Φ_e :

$$\Phi_e = \frac{1}{4\pi G} \quad (4.68)$$

De esta forma, obtenemos una expresión para los e-foldings en términos del valor inicial del inflatón Φ_i :

$$\mathcal{N}_{tot} = 2\pi \frac{\Phi_i^2}{m_p^2} - \frac{1}{2} \quad (4.69)$$

aquí hemos usado la relación entre la constante gravitacional G y m_p , la *masa de Planck*: $G = m_p^{-2}$. Donde esta última es una escala de masa pequeña definida en la época en la que en el Universo dominaban las interacciones cuánticas y es equivalente a 2.17645×10^{-8} kg.

- Inflación Producida por un potencial de la forma $\lambda\Phi^4$

Consideraremos un potencial más para ilustrar la inflación de tipo caótico. Éste, al igual que en el caso anterior, será un potencial polinomial con forma explícita dada por:

$$V = \lambda\Phi^4 \quad (4.70)$$

Este es un potencial que, a diferencia del anterior, interactúa con el medio por lo que el factor λ cumple el papel de absorber las contribuciones así producidas.

Procederemos a resolver las ecuaciones de movimiento de la misma manera que lo hemos venido haciendo hasta ahora. Iniciaremos con el análisis de los parámetros de slow roll:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{\pi G \Phi^2} < 1 \\ \eta &= \frac{1}{4\pi G \Phi^2} < 1 \end{aligned}$$

Por primera vez hemos encontrado una pequeña diferencia con los potenciales anteriores, ya que en este caso, $\epsilon \neq \eta$ como había sucedido previamente. Sin embargo, ambos deben ser cantidades menores a la unidad. Como η es el factor más grande de los dos, basta con que se satisfaga $\eta < 1$ para que podamos usar la aproximación de slow roll. Así, nuestro inflatón tiene la característica siguiente:

$$|\Phi| > \sqrt{\frac{3}{2\pi G}} \quad (4.71)$$

Una vez que se ha hecho válido el empleo de la aproximación, las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G \lambda \Phi^4 \quad (4.72)$$

$$3H\dot{\Phi} + 4\lambda\Phi^3 = 0 \quad (4.73)$$

Despejando H de 4.72 y sustituyéndola en 4.73, obtenemos una ecuación diferencial de la forma:

$$\dot{\Phi} + \sqrt{\frac{16\lambda}{24\pi G}}\Phi = 0 \quad (4.74)$$

Vamos a considerar que el tiempo inicial es t_i , y que en dicho momento nuestro campo escalar tiene un valor inicial Φ_i , que variará conforme transcurra el tiempo ($t > 0$). Usando separación de variables en la ecuación 4.74:

$$\int_{\Phi_i}^{\Phi_f} \frac{d\Phi}{\Phi} = -\sqrt{\frac{16\lambda}{24\pi G}} \int_{t_i}^t dt \quad (4.75)$$

Haciendo las integrales señaladas, encontramos la expresión $\Phi = \Phi(t)$ que nos dirá la evolución temporal de nuestro inflatón:

$$\Phi(t) = \Phi_i e^{-\sqrt{\frac{16\lambda}{24\pi G}}(t-t_i)} \quad (4.76)$$

Prosigamos con el proceso de obtención del factor de escala $R(t)$. Para ello, haremos uso de la ecuación de Friedmann en aproximación de slow roll 4.72, que nos presenta la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{R} - \sqrt{\frac{8}{3}}\pi G\lambda\Phi^2 R = 0 \quad (4.77)$$

Haremos la consideración de que al tiempo inicial, el factor de escala tenía un valor R_i . Usando separación de variables en 4.77, tenemos:

$$\int_{R_i}^{R_f} \frac{dR}{R} = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi G\lambda \int_{t_i}^t \Phi^2 dt \quad (4.78)$$

Φ es una función que depende del tiempo, por lo que debemos usar su forma funcional dada por , en la ecuación 4.78 para llevar a cabo la integración del lado derecho de la igualdad. De esta manera:

$$\int_{R_i}^{R_f} \frac{dR}{R} = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi G\lambda\Phi_i^2 \int_{t_i}^t e^{-\sqrt{\frac{64\lambda}{24\pi G}}t} dt \quad (4.79)$$

Ahora si, prosiguiendo con las integrales señaladas:

$$\ln \frac{R}{R_i} = -\Phi_i^2 \pi G \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{64\lambda}{24\pi G}}(t-t_i)} \right) \quad (4.80)$$

De 4.80, la función que describe la evolución temporal del factor de escala es:

$$R(t) = R_i e^{-\Phi_i^2 \pi G \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{64\lambda}{24\pi G}}(t-t_i)} \right)} \quad (4.81)$$

Nuevamente, consideremos el cálculo de los e-foldings. Como hasta ahora ha ocurrido, basta con usar la forma específica del potencial en turno, en la ecuación 4.37, para hacerlo. Igual que para el potencial masivo no interactuante, ignoramos el valor de los límites de integración, pero usando la condición $\epsilon = 1$ que marca el final de inflación, obtenemos el valor final del inflatón Φ_e :

$$\Phi_e = \sqrt{\frac{1}{\pi G}} \quad (4.82)$$

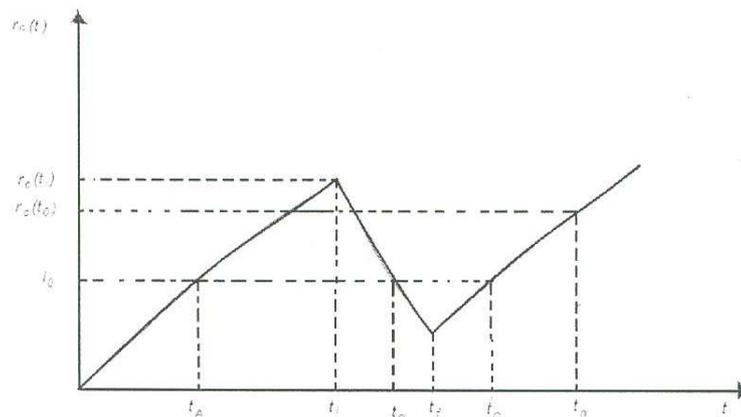
Lo cual nos lleva a una expresión para el número de e-foldings que depende del valor inicial del inflatón Φ_i :

$$\mathcal{N}_{tot} = \pi \frac{\Phi_i^2}{m_P^2} - 1 \quad (4.83)$$

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos motivado la introducción de un período en la evolución del Universo, en que la expansión estuvo acelerada. Esto, con la finalidad de complementar el Modelo Cosmológica Estándar y de dar solución a dos de los problemas que éste posee: El problema del horizonte y el problema de la planicie. Esta es una situación complicada, pues no tenemos elementos suficientes para afirmar si en realidad inflación ocurrió; sin embargo, es gracias a ella que podemos dar una explicación a dichos problemas.

En el trabajo estudiamos el problema del horizonte de una manera sistemática. Primeramente detectamos una característica principal que, todos los Universos que no desean tener este problema, deben cumplir. En la siguiente figura, que es la misma mostrada en el capítulo 3, podemos ver a lo que nos referimos.



En la gráfica se muestra una imagen de la expansión del radio comóvil del Universo y la evolución de éste durante la historia del mismo. Como mencionamos en la discusión del capítulo tres, para evitar el problema, el valor máximo que alcanzó el radio comóvil en el inicio de la inflación, debe ser mayor al radio comóvil del Universo a la época actual. Esta condición la

utilizamos después en nuestro desarrollo cuantitativo de inflación. Mediante este análisis, consideramos un universo dividido en épocas y con características similares al nuestro. Realizando algunos calculos obtuvimos una relación entre los factores de escala al tiempo final de inflación y al tiempo inicial de éste. Esta razón nos dice qué tanta fue la expansión que sufrió el Universo durante ese período de tiempo y la nombramos como cantidad de inflación o e-foldings. Encontramos que, para dar una explicación al problema en turno, la cantidad de inflación tiene una cota inferior a partir de la cual, el problema del horizonte queda resuelto, o bien, podemos afirmar que la solución al problema del horizonte está estrechamente relacionado con el número de e-foldings que inflación pueda generar.

Para resolver el problema de la planicie, seguimos un camino similar al tomado para dar solución al problema anterior. Consideramos un Universo con las mismas características que el descrito anteriormente en el problema del horizonte, pero ahora se partió de la ecuación de Friedmann en términos del parámetro de densidad y de las densidades solas. Con ello logramos obtener un resultado para los e-foldings que es proporcional al resultado del caso anterior. Al final, obtuvimos que para resolver el problema de la planicie, la cota mínima de cantidad de expansión que se necesita, coincide con la requerida para resolver el problema del horizonte.

Hemos llegado a la conclusión de que los problemas considerados tienen relación entre ellos, pues de no haber sido así no habrían coincidido en la cantidad de e-foldings. Nuevamente resalto que la solución a los problemas citados, está relacionada con la cantidad de e-foldings que el modelo inflacionario elegido pueda generar.

En los ejemplos de inflación mostrados, usamos las ecuaciones de campo inflacionario en la aproximación de slow roll para encontrar la evolución del factor de escala y del inflatón en el tiempo. Después, haciendo uso de la forma funcional del potencial, obtuvimos la cantidad de e-foldings generados por cada uno de ellos:

- $V(\Phi) = \frac{1}{2}m^2\Phi^2$

$$\mathcal{N}_{tot} = 2\pi \frac{\Phi_i^2}{m_P^2} - \frac{1}{2} \quad (5.1)$$

- $V(\Phi) = \lambda\Phi^4$

$$\mathcal{N}_{tot} = \pi \frac{\Phi_i^2}{m_P^2} - \frac{3}{2} \quad (5.2)$$

Podemos ver que, en ambos casos, la cantidad de inflación depende del valor del campo escalar al inicio del período de inflación, por lo tanto no podemos tener una cantidad exacta de

la cantidad de e-foldings que se pueden generar; sin embargo, podemos hacer aproximaciones a dicho valor. Para ello, usaremos algunos argumentos:

“La inflación no iniciará hasta que la temperatura haya aumentado lo suficiente. Esto limita el valor inicial del potencial, $V(t_0) \approx m_P^4$ ” [3].

Usando esta afirmación, podemos obtener una relación para el inflatón al tiempo inicial. Hemos usado la masa de Planck para escribir el resultado, ya que es la escala que nos beneficia para el estudio.

$$\begin{aligned} 2m_P^4 &= m^2\Phi_i^2 \\ \Phi_i &= \frac{\sqrt{2}}{m}m_P^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Del número de e-foldings calculado, despejamos Φ_i , e igualándolo con la ecuación anterior, obtenemos una función de la masa del inflatón en términos de los e-foldings:

$$m = \sqrt{\frac{4\pi}{(\mathcal{N} + \frac{1}{2})}}m_P \quad (5.4)$$

Siguiendo el mismo procedimiento obtenemos una relación para lambda en términos de los e-foldings:

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{\mathcal{N} + 1}\right)^2 \quad (5.5)$$

Vemos que el valor de la cantidad de inflación depende de la masa del inflatón o de su parámetro λ , según sea el caso. De la forma funcional de ambas ecuaciones podemos notar que para poder generar un número grande de e-foldings $\mathcal{N} \gg 60$, se necesita que la masa del inflatón, o su lambda correspondiente sean cantidades muy pequeñas.

Haciendo una estimación usando $\mathcal{N} = 60$ para ambos potenciales, tenemos como resultados finales:

- Para $V(\Phi) = \frac{1}{2}m^2\Phi^2$

$$m \approx 1.13 \times 10^{-5}g$$

que representa una cota superior para la masa asociada al campo escalar.

- Para $V(\Phi) = \lambda\Phi^4$

$$\lambda \approx 2.65 \times 10^{-3}$$

el valor máximo para la autointeracción del campo.

Bibliografía

- [1] D.Raine, T. Thomas. *An Introduction to the Science of Cosmology*. Taylor & Francis; 1ª edición (Agosto 2002). ISBN: 978-0750304054.
- [2] P.Coles, F.Lucchin. *Cosmology-the origin and evolution of cosmic structure*. Wiley; 2ª edición (Junio 2002). ISBN: 978-0471489092.
- [3] A.Linde. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. CRC; 1ª edición (Mayo 1990). ISBN: 978-3718604906.
- [4] T.Padmanabhan. *An Invitation to Astrophysics*. World Scientific Publishing Company; 1ª edición (Febrero 2006). ISBN: 978-9812566874.
- [5] J:Foster, J.Nightingale. *A short Course in General Relativity*. Springer; 3ª edición (Agosto, 2005). ISBN: 978-0387260785.
- [6] M.Roos. *Introduction to Cosmology*. Wiley; 2ª edición (1997). ISBN: 0471973831.
- [7] J.Bennett et al. *The Cosmic Perspective*. Benjamin Cummings; 5ª edición (Diciembre 2007). ISBN: 978-0321505675.
- [8] A.R.Liddle. *An Introduction to Cosmological Inflation*. Proceedings of ICTP summer school in high-energy physics, 1998. astro-ph/9901124 (1999).
- [9] V. Faraoni. *A new solution for inflation*. **Am.J.Phys.** **69**, 372(2001).
- [10] A.R. Liddle and D.H. Lyth. *The Cold dark Matter Density Perturbation*. **Phys.Rept.** **231**, 1(1993).
- [11] A. H. Guth. *Inflationary Universe: A possible Solution to the Horizon and Flatness Problem*. **Phys. Rev. D** **23(2)**, 347(1981).
- [12] A.Matacz *Inflation and the Fine Tuning Problem*. **Phys. Rev. D** **56(4)**, 1836(1997).