

Caracterización de las perturbaciones del campo gravitacional con satélites de órbita baja

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora
para la obtención del Título de
Maestría en Ciencias (Física)

por

Lic. Ernesto García Valencia

director de tesis

Dr. Jorge Téllez Ulloa



Departamento de Investigación en Física (DIFUS)

Universidad de Sonora

Febrero de 2015

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

A mi madre y a mi padre.

Agradecimientos

Al $A\Omega$ y a su Madre.

A Marcia y Martín por su ejemplo de disciplina, por todas sus enseñanzas y por todo su amor. Sin ellos, nada de esto se hubiera logrado. No tengo palabras para expresar todo lo que siento por ustedes, son los mejores padres que alguien pueda tener. Gracias por todo el apoyo que he recibido y que seguiré recibiendo de parte suya a lo largo de toda mi vida.

A Víctor por su verdadera compañía de hermano, eres un gran ejemplo a seguir, gracias por tu amistad y apoyo.

Al maestro Jorge Téllez por haberme aceptado como su estudiante de maestría, por todas las conversaciones que tuvimos acerca de ciencia y no-ciencia en las cuales aprendí tanto.

A la maestra María Elena Tejeda, la cual fué una guía importantísima para navegar en las aguas de la Física. Gracias por su ejemplo y entrega a la ciencia.

A mi jefe en Mexsat, J. A. Borja, por su ejemplo de persona, por su paciencia para conmigo y por ayudar a desarrollarme continuamente en nuestras labores diarias. Gracias por todos sus comentarios, enseñanzas y por todo el análisis hecho de principio a fin de esta tesis.

A Karen Daniela, por su amor, apoyo incondicional y por creer en mí. Eres un ángel.

A todos mis buenos amigos, Alan, Heredia, Galaviz, Abraham, Gerardo, Armando, Benjamín, José Ramón.

A la Universidad de Sonora que es como un segundo hogar para todos nosotros.

A CONACYT por su apoyo mediante la beca para posgrado.

Contenido

Lista de Figuras	III
Introducción	1
1 Movimiento Kepleriano-La Órbita No Perturbada.	8
1.1. Movimiento Elíptico	9
1.2. Geometría Orbital	13
1.3. Ecuación de Kepler	17
1.3.1. Conversión de los Elementos Cartesianos a los Elementos Keplerianos . .	18
2 El Campo Gravitacional Terrestre	22
2.1. Teoría de Potencial	23
2.2. Armónicos Esféricos	26
2.2.1. Propiedades de los Armónicos Esféricos	28
2.3. Potencial del Elipsoide	30
3 La Órbita Perturbada.	34
3.1. Las Ecuaciones Perturbadas de Movimiento	34
3.2. Conversión de la Función Perturbadora a Esféricos Armónicos	40
3.3. Perturbaciones Lineales	45
3 Conclusiones	47
Apéndices	49

Funciones de Inclinación $F_{lmp}(i)$	49
B Funciones de excentricidad $G_{lpq}(i)$	52
C Bibliografía	54

Lista de Figuras

I.	Parámetros para los distintos tipos de órbitas.	3
II.	Diámetro ecuatorial vs. diámetro polar.	5
III.	Variación del ecuador.	6
1.1.	Sistema coordenado.	10
1.2.	La órbita elíptica.	12
1.3.	Los distintos marcos de referencia a utilizar.	13
1.4.	Representación gráfica del GST.	14
1.5.	Orientación orbital.	15
1.6.	Vector de momento angular.	20
2.1.	Ejemplos de armónicos esféricos.	30
3.1.	Triángulo orbital	41

Introducción

En el año de 1945, el escritor de ciencia ficción Arthur C. Clarke (1917-2008) propuso la utilización de satélites artificiales como solución al problema de las comunicaciones globales. En su artículo de la revista *Wireless World* se describe la logística de los lanzamientos para poner en órbita a dichos satélites y otros aspectos relacionados con las redes satelitales para las comunicaciones. La órbita en la cual serían colocados sería la órbita geoestacionaria, propuesta por primera vez en 1903 por el físico ruso Konstantin Tsiolkovsky. Según Clarke, dicha órbita (ecuatorial y a más de 42000 km de distancia desde el centro de la Tierra), consistiría de solo tres satélites para brindar cobertura total al planeta. Fue hasta el 4 de octubre de 1957 cuando la Unión Soviética asombró al mundo lanzando el primer satélite artificial de la historia, el Sputnik 1. Esta nave de 84 kg orbitó la Tierra a una distancia de entre 942 km en su apogeo y 231 km en su perigeo, siendo su trayectoria altamente elíptica e inclinada. Sus principales funciones fueron obtener información perteneciente a la densidad de las capas altas de la atmósfera y la propagación de ondas de radio en la ionosfera. Fué destruído en su reingreso a la Tierra por la fricción de la atmósfera, tres meses después de haber sido lanzado, pero una serie de varios satélites experimentales siguieron a este primero, nueve de los cuales formaron parte del programa del Sputnik. Solo ocho años después del lanzamiento del Sputnik, el 28 de Julio de 1965, fué cuando se logró el inicio de las comunicaciones por medio del primer satélite geoestacionario, el Syncom-3, un satélite construido por la NASA. Desde entonces, más de 40 naciones se han dedicado a la producción o a la adquisición de diferentes tipos de satélites, existiendo en la actualidad aproximadamente 6600 satélites. Se estima que 3600 satélites se encuentran en órbita y que de esos, 1500 se encuentran en operaciones [14], mientras que el resto de ellos terminaron su vida útil o presentaron alguna falla técnica y se encuentran en estado de basura espacial [17].

Existe una gran cantidad de propósitos para los satélites, los más comunes son los satélites de comunicaciones, de observación terrestre, militares, climatológicos, de navegación, de investigación; también están las estaciones espaciales que albergan humanos, las cuales también son

consideradas satélites. La altura a la que se encuentra un satélite (o más bien, la distancia desde la superficie de la Tierra hacia el satélite) está en función del tipo de operaciones del mismo. Aproximadamente existen 500 satélites operacionales en **órbita baja (LEO, low Earth orbit)**, que comprende una altura desde 160 km hasta 2000 km, con periodos orbitales de 88 minutos hasta 127 minutos respectivamente, algunos ejemplos de estos tipos son, satélites de observación terrestre, satélites espías, la estación espacial internacional, el telescopio Hubble, etc.; 50 se encuentran en **órbita media (MEO, medium Earth orbit)**, que es la región del espacio que va desde los 2000 km hasta los 35 768 km, con periodos orbitales de 2 horas hasta 24 horas, como ejemplo de este tipo tenemos a los GPS (global positioning system), GALILEO, GLONASS, etc.; 1300 se encuentran en la **órbita geostacionaria**, la cual se encuentra a 36 000 km de altura sobre el nivel del mar y tiene un período orbital de exactamente 24 horas. Como ejemplos tenemos a MEXSAT 3, EUTELSAT 114.8, SKYNET 5B etc.; el resto de ellos se encuentran en **órbita alta (HEO, high Earth orbit)**, la cual comprende de los 36 000 km de altura sobre el nivel del mar en adelante y tiene un período orbital mayor a 24 horas, razón por la cual los satélites en dichas órbitas presentan un movimiento retrogrado aparente, como ejemplo tenemos a VELA 1A [6]. Además de los anteriores, cabe resaltar la existencia de las **órbitas polares**, que son aquellos que pasan por encima o muy próximos a los polos (de uso meteorológico); la **órbita de Molniya**, una órbita altamente inclinada (63.4°) y altamente elíptica (con un apogeo de 40 000 km y un perigeo de 200 km) y periodos orbitales de 8 a 12 horas, sus principales usos son las comunicaciones en países que se encuentran a latitudes mayores a los 45° ; y la **órbita panteón**, utilizada para colocar los satélites que han terminado su vida útil, esta se encuentra a algunos cientos de kilómetros por encima de la órbita geostacionaria. Véase la figura I.

La figura I muestra a la Tierra vista desde arriba, i.e. el polo norte es perpendicular al plano de la hoja y hacia afuera, lo cual hace que la representación de las órbitas sea ecuatorial. Esta imagen es precisa para órbitas circulares y de inclinación casi cero, mientras que para órbitas más inclinadas como la de la ISS (51.65°)[12], la órbita mostrada es una aproximación.

Todos estos satélites, a lo largo de su trayectoria se ven influenciados por distintas fuentes perturbativas. Las perturbaciones que más afectan dichas trayectorias son aquellas provocadas por la no-uniformidad del campo gravitacional terrestre, la atracción solar y lunar, la presión de radiación, la fuerza de fricción causada por la atmósfera, albedo, atracción por otros cuerpos

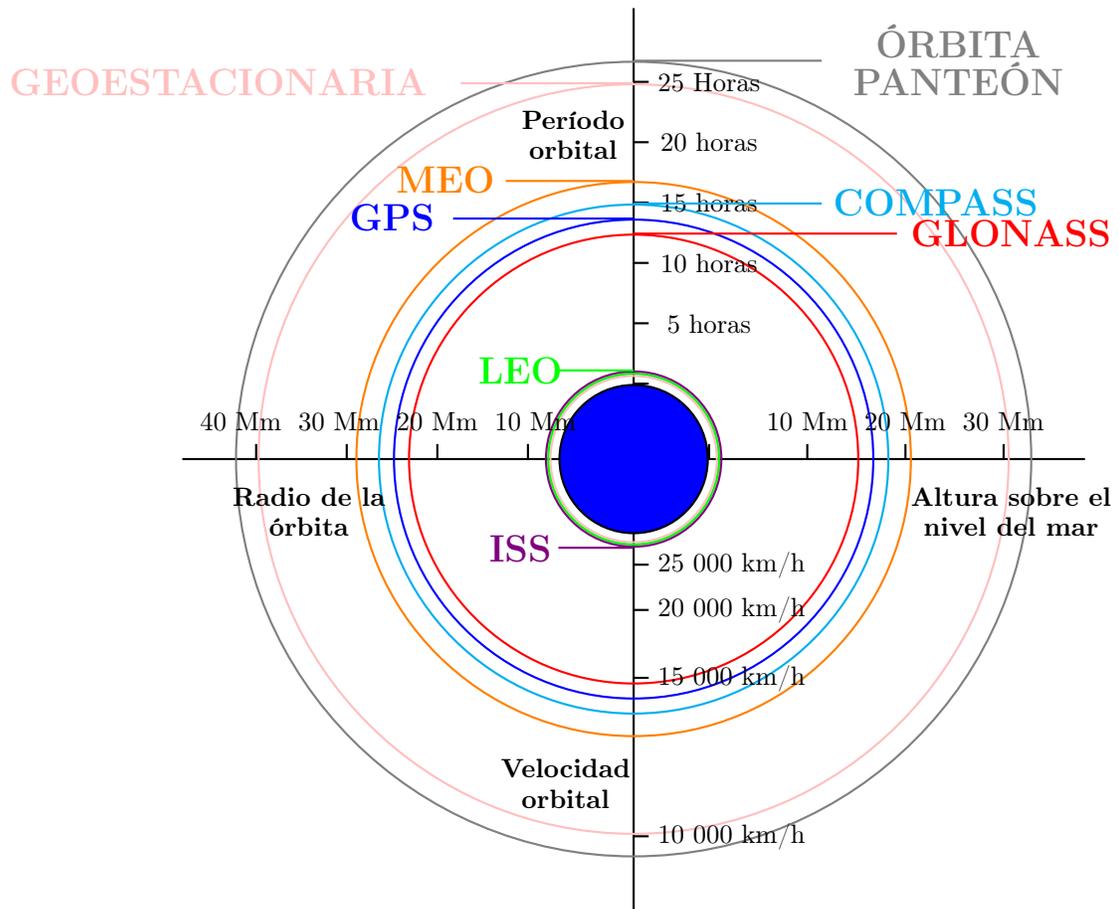


Figura I: Parámetros para los distintos tipos de órbitas.

(planetas por ejemplo) y otras a menor escala. Existe la necesidad de conocer a detalle la manera que actúan dichas fuerzas de perturbación sobre nuestro satélite, las cuales dependen del tipo de satélite que tenemos (geometría), de la órbita en la que se encuentra el satélite (altura, inclinación, excentricidad, etc.), para poder así mantener a nuestro satélite en operaciones nominales.

En diciembre del año 2012, se puso en órbita al satélite geoestacionario, Bicentenario (Mexsat 3), el primero de tres satélites de comunicaciones nuevos del *Sistema Satelital Mexicano (MEX-SAT)*, adquiridos por la *Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT)*, iniciándose así una nueva etapa en las comunicaciones satelitales mexicanas. Telecom como entidad técnica es el área encargada de la salud y las operaciones de dicha flotilla.

En nuestro caso particular, existe una inquietud de crear a futuro un software para el área de dinámica orbital con especificaciones propias, orientadas a nuestras necesidades, de uso alternativo al software *OASYS (Orbital Analysis System)* comprado por la *SCT* a la empresa privada norteamericana *ISI KRATOS*. La principal función de este software es el de determinar la órbita de los satélites deseados y a partir de eso poder calcular las maniobras necesarias para mantener a nuestros satélites dentro de sus cajas de control. Para esto, es necesario conocer a fondo las perturbaciones que actúan sobre esta clase de satélites.

Es así como surge la necesidad de conocer el campo gravitacional terrestre (principal perturbación sobre los satélites) y la forma en la que afecta a nuestra nave.

La forma de la Tierra es determinada por una variedad de diferentes factores. El más importante de ellos es el hecho de que la Tierra no es una esfera perfecta sino más bien un esferoide oblato. Esto significa que el diámetro de la Tierra en el ecuador es mayor que el diámetro que pasa por los polos. Este efecto es causado por la rotación de la Tierra y por su elasticidad al no ser un sólido, lo cual da como resultado una fuerza centrífuga la cual crea un “abultamiento” en el ecuador, como se observa en la figura II. Las dimensiones del modelo de Szebehely [15] son

$$AO = 6356.751 \text{ km}$$

y

$$DO = 6378.136 \text{ km.}$$

La diferencia entre los diámetros es

$$DO - AO = 21.385 \text{ km.}$$

Aún esta pequeña diferencia tiene un efecto medible sobre las órbitas de los satélites. Otra

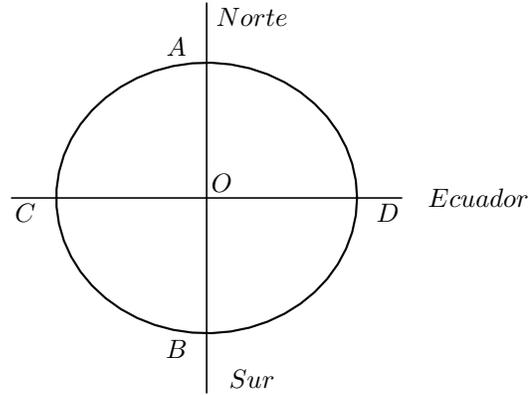


Figura II: Diámetro ecuatorial vs. diámetro polar.

asimetría no-esférica se debe al hecho de que el ecuador no es un círculo perfecto. Como se observa en la figura III, mirando desde arriba del polo norte, tenemos

$$\frac{NE - NH}{NE} \approx 10^{-5},$$

entonces, la diferencia entre el diámetro mayor y el diámetro menor es de aproximadamente 64 m. [15]

Sumadas a estas no-esfericidades, existen además las llamadas concentraciones de masa. La estructura interna terrestre consiste de varias capas, las cuales no son de densidades uniformes en las tres direcciones, radial, azimutal y polar. Si la densidad de la Tierra fuera constante, entonces la forma geométrica sería el factor principal. La desviación de la forma esférica (para densidad uniforme) se puede aproximar por medio de cuerpos elipsoidales, y este es el método más común a la hora de tratar con cuerpos celestes. Ya que el potencial gravitacional para elipsoides (de distribuciones de masa uniforme) puede ser expresado por medio de desarrollos polinomiales de Legendre, esta técnica ha sido la más usual para la descripción de las propiedades gravitacionales de los cuerpos. Usualmente se nos brinda la información referente al campo de fuerzas, y para un conjunto de condiciones iniciales, se obtiene una órbita, por medio de integración numérica. A esto se le conoce como el problema directo en la mecánica celeste. Otra manera de abordar esto es por medio del problema inverso de la mecánica celeste. Si la órbita está dada por medio de observaciones, nos podemos preguntar por el campo el cual genera dicha órbita. A esto es a lo que se le conoce como el problema inverso, y es considerablemente más complicado que el problema

directo, por varias razones. Se puede demostrar, por ejemplo, que el campo de fuerzas no está unívocamente determinado a partir de una órbita, en otras palabras, existen varios campos de fuerza que pueden producir la misma órbita. Si la forma funcional general del campo de fuerzas, o si el potencial están dados (como ocurre en el caso antes mencionado del desarrollo de Legendre), entonces la órbita puede ser utilizada para determinar los coeficientes del desarrollo. El método que se trata en este trabajo es el de escribir el potencial en términos de los polinomios de Legendre y, a partir de observaciones satelitales hechas, evaluar los coeficientes en el desarrollo.

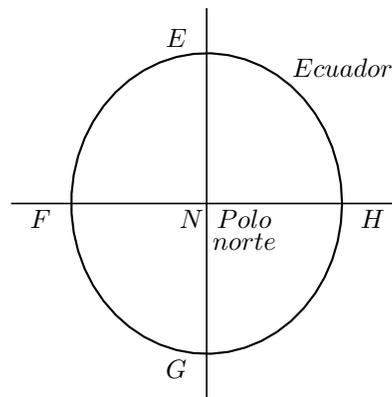


Figura III: Variación del ecuador.

Para abordar el problema planteado, este trabajo lo estructuramos de la siguiente manera.

En el capítulo 1, se aborda el problema de una partícula moviéndose sobre una elipse no perturbada alrededor de un cuerpo atractor, se introduce la geometría concerniente para describir la órbita de cualquier satélite que se encuentre girando alrededor de la Tierra. Se introducen los elementos keplerianos; con lo anterior bien definido se procede a plantear la ecuación fundamental de Kepler. Los distintos sistemas de referencia y las transformaciones necesarias para pasar de un sistema a otro vienen a ser expresados en función de lo anterior.

En el capítulo 2, se hace el análisis introductorio por medio de la gravitación de Newton, donde se revisa la teoría del potencial para obtener así la ecuación de Laplace. Se hace un repaso breve de los armónicos esféricos y se busca escribir las soluciones en términos de éstos últimos y en función del achatamiento polar.

En el capítulo 3, se hace el análisis de las ecuaciones perturbadas de movimiento en términos de los elementos keplerianos. Se llega a la definición de las variables de Delaunay para poder

convertir la función perturbadora a estas últimas variables y obtener las expresiones del potencial para períodos largos. Además se hace uso de los parámetros de los satélites geodésicos para obtener las ecuaciones seculares de movimiento de los mismos.

Capítulo 1

Movimiento

Kepleriano-La Órbita No

Perturbada.

En este capítulo se revisan las ecuaciones de movimiento orbital para llegar a la ecuación de Kepler, obteniéndose como resultado, la expresión matemática de los seis elementos orbitales de Kepler, se introducen los diferentes marcos de referencia para referirnos a la órbita en cuestión, así también como las transformaciones de un marco de referencia a otro.

Los elementos orbitales más utilizados son los seis elementos keplerianos, llamados así en honor a Johannes Kepler y sus leyes del movimiento planetario. Para que una órbita esté bien definida completamente, se deben conocer estos seis elementos [7].

Los dos principales elementos que definen la forma y el tamaño de la elipse son (ver figura 1.2 para los siguientes elementos):

- Excentricidad (e) - parámetro que determina el grado de desviación de la elipse respecto a la circunferencia auxiliar.
- Semieje mayor (a) - la suma del perigeo y apogeo, dividida entre dos. Donde el perigeo es el punto de la órbita más cercana al cuerpo atractor (en este caso la Tierra), y el apogeo por el contrario, es el punto de la órbita más lejano a la Tierra.

Dos elementos definen la orientación del plano de la órbita en la que se incrusta la elipse:

- Inclinación (i) - inclinación de la órbita con respecto al plano de referencia, (en este caso, el ecuador) medida en el nodo ascendente.
- Ascensión recta del nodo ascendente (Ω) - es el ángulo que existe entre el nodo ascendente de la órbita y el vector que apunta hacia el equinoccio vernal (aries).

Y por último:

- Argumento del perigeo (ω) - define la orientación de la elipse en el plano orbital, como un ángulo medido desde el nodo ascendente hacia el perigeo.
- Anomalía media (M), anomalía excéntrica (E) o anomalía verdadera (f) - la anomalía media M , es el ángulo que forma el eje de la elipse con un satélite ficticio que gira con movimiento uniforme sobre una circunferencia cuyo diámetro coincide con el eje principal de la elipse, la cual es llamada circunferencia auxiliar. La anomalía excéntrica E es el ángulo medido desde el centro de la elipse, que forma la proyección del planeta sobre la circunferencia principal, y el eje de la elipse. La anomalía verdadera f (la cual no debe confundirse con el achatamiento f que aparece en el primer capítulo) es el ángulo que forma el satélite medido desde el foco (centro de la Tierra) con el perigeo. Se relaciona con la anomalía excéntrica E mediante [11]:

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

1.1. Movimiento Elíptico

Debido a la proximidad geométrica (proximidad que será estudiada cuantitativamente más adelante) que existe entre la Tierra y un esferoide (elipsoide), las coordenadas a utilizar serán las esféricas, solo que en vez de utilizar los ángulos de la notación estandar (r, θ, ϕ), utilizaremos los angulos más utilizados para la localización de un satélite desde el centro de la tierra, (λ, ϕ) entonces tendremos

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \lambda \\ y &= r \cos \phi \sen \lambda \\ z &= r \sen \phi \end{aligned} \tag{1.1}$$

con r la distancia radial desde el origen hasta el punto de interés, ϕ es la latitud, y λ es la longitud medida hacia el este (esto es, en sentido contrario a las manecillas del reloj mirando hacia el origen desde la parte positiva del eje z). La notación utilizada en (1.1) es utilizada a lo largo de este trabajo, la cual es consistente con la notación de los geodesistas; en matemáticas se utilizan θ para la colatitud y ϕ para la longitud.

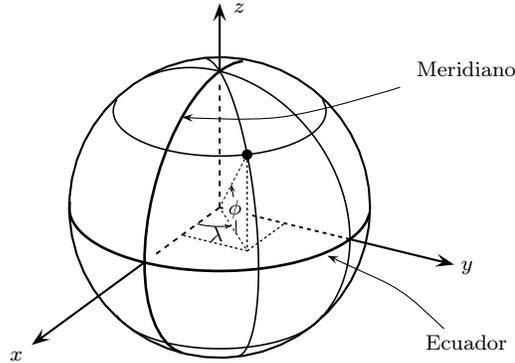


Figura 1.1: Sistema coordenado.

Vamos a asumir que tenemos una partícula de masa despreciable atraída por otra masa puntual M , además vamos a asumir que el origen de coordenadas está localizado en la masa M . Entonces la ecuación que describe la aceleración de la partícula puede ser expresada en forma vectorial, utilizando μ en vez de GM de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM\mathbf{r}/r^3 = -\mu\mathbf{r}/r^3. \quad (1.2)$$

Por consiguiente el vector de aceleración $\ddot{\mathbf{r}}$ es colineal con el vector de posición \mathbf{r} . Si definimos el plano orbital como el plano que contiene al vector de posición \mathbf{r} y al vector de velocidad $\dot{\mathbf{r}}$, la partícula nunca se apartará del plano ecuatorial ya que no existe componente de aceleración fuera del plano. Así pues a la hora de la transformación de coordenadas rectangulares a esféricas dada por la ecuación (1.1), podemos igualar a cero la latitud ϕ y sus derivadas respecto al tiempo $\dot{\phi}$ y $\ddot{\phi}$. Llevando a cabo la diferenciación de la ecuación (1.1) respecto al tiempo, obtenemos las ecuaciones (1.2) en coordenadas polares,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \lambda, \\ y &= r \sin \lambda, \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos \lambda - r \dot{\lambda} \sin \lambda, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \lambda + r \dot{\lambda} \cos \lambda, \\ \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \lambda - 2\dot{r}\dot{\lambda} \sin \lambda - r\ddot{\lambda} \sin \lambda - r(\dot{\lambda})^2 \cos \lambda = -\mu \cos \lambda / r^2, \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \lambda + 2\dot{r}\dot{\lambda} \cos \lambda + r\ddot{\lambda} \cos \lambda - r(\dot{\lambda})^2 \sin \lambda = -\mu \sin \lambda / r^2. \end{aligned}$$

Ya que el punto desde donde se mide el ángulo λ es arbitrario, también elegiremos $\lambda = 0$, pero debemos tener en cuenta que $\dot{\lambda}$ y $\ddot{\lambda}$ son distintos de cero. Así pues las ecuaciones de movimiento

son

$$\ddot{r} - r(\dot{\lambda})^2 = -\mu/r^2, \quad (1.3)$$

$$r\ddot{\lambda} + 2\dot{r}\dot{\lambda} = 0. \quad (1.4)$$

Si multiplicamos la ecuación (1.4) por r , es evidente que la ecuación es inmediatamente integrable a

$$r^2\dot{\lambda} = h, \quad (1.5)$$

con h una constante. La ecuación (1.5) nos dice que el momento angular $r^2\dot{\lambda}$ se conserva. Ahora integramos la ecuación (1.3) sustituyendo a $1/r$ por u :

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2}.$$

De (1.5) tenemos

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{r^2}{h},$$

por consiguiente

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\lambda} = -\frac{1}{r^2} \dot{r} \frac{r^2}{h} = -\frac{\dot{r}}{h}.$$

Además

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\dot{r}}{h} \right) \frac{dt}{d\lambda} = -\frac{\ddot{r}}{h} \frac{r^2}{h} = -\frac{\ddot{r}}{u^2 h^2}$$

o bien

$$\ddot{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\lambda^2}. \quad (1.6)$$

Sustituyendo (1.5) y (1.6) en (1.3) y sustituyendo r por $1/u$, tenemos

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \quad (1.7)$$

Integrando la ecuación (1.7) tenemos

$$\frac{1}{r} = u = A \cos(\lambda - \lambda_0) + \frac{\mu}{h^2} \quad (1.8)$$

que es la solución de la ecuación homogénea más la solución particular de la ecuación no homogénea.

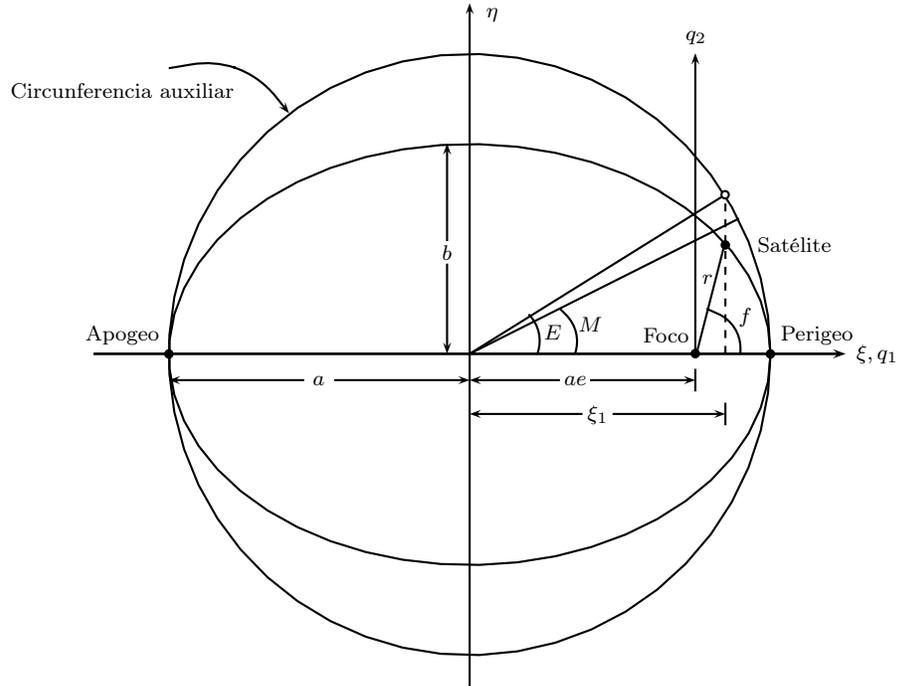


Figura 1.2: La órbita elíptica.

Si en la ecuación de una elipse (véase la figura 1.2), con el origen de coordenadas en el centro dada por

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad (1.9)$$

sustituimos $ae + r \cos f$ por ξ , $r \sin f$ por η , y $a^2(1 - e^2)$ por b^2 , y resolvemos la ecuación cuadrática resultante para r , obtenemos (la raíz positiva)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

o bien

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1 - e^2)} + \frac{e}{a(1 - e^2)} \cos f. \quad (1.10)$$

Comparando (1.8) y (1.10), vemos que (1.8) es la ecuación de una elipse con el origen en uno de los focos y además observamos que

$$\lambda - \lambda_0 = f, \quad (1.11)$$

$$A = \frac{e}{a(1 - e^2)}, \quad (1.12)$$

$$h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \quad (1.13)$$

Por lo tanto, el tamaño de la órbita de la partícula puede ser expresado por el semieje mayor a de la elipse; la forma, por medio de la excentricidad e ; y la localización de la partícula en la elipse por medio de f , llamada anomalía verdadera. La posición en el plano orbital también puede ser expresada por medio del sistema coordenado \mathbf{q} el cual se describe en la figura 1.2. Para poder expresar en su totalidad la posición de la partícula, además de los tres elementos keplerianos mencionados anteriormente, necesitamos los tres ángulos de Euler que se muestran en la figura 1.5 y descritos en (1.18)—(1.20): la longitud del nodo Ω , la inclinación i , y el argumento del perigeo ω .

1.2. Geometría Orbital

Trataremos el caso de un satélite que se encuentra en una órbita inclinada respecto al plano del ecuador. Para esto, es posible referirnos a la posición del satélite según el marco de referencia que se desee. Estos marcos de referencia son tres, el sistema fijo a Tierra \mathbf{u} , el sistema inercial \mathbf{x} , y el sistema que se encuentra sobre la órbita \mathbf{q} , también llamado kepleriano, ver figura (1.3)

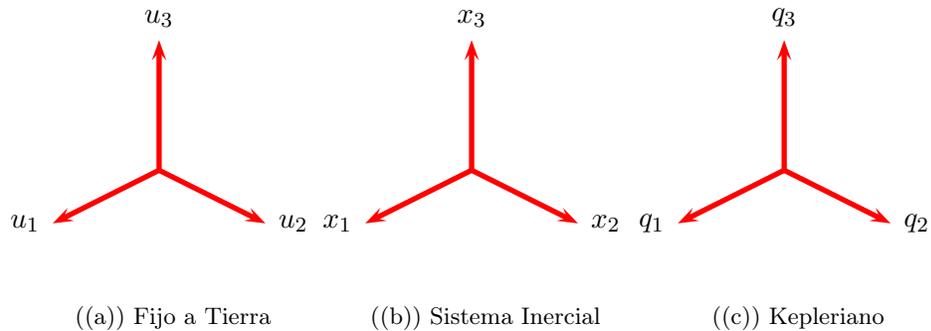


Figura 1.3: Los distintos marcos de referencia a utilizar.

Como deseamos encontrar un potencial en términos de los elementos keplerianos y a su vez, las ecuaciones de movimiento para los mismos (como se verá en el capítulo 3) es necesario referirnos a la posición del satélite con coordenadas \mathbf{q} , que es la elipse mostrada en las figuras 1.2 y 1.5. Para poder hacer tal cosa, necesitamos conectar las coordenadas fijas a la Tierra \mathbf{u} y las coordenadas del sistema inercial \mathbf{x} con las posiciones referidas por la órbita (elipse) inclinada [13].

Sean las posiciones fijas al globo terrestre representadas por un sistema coordenado rectangular \mathbf{u} , con el eje u_1 dirigido hacia latitud 0° , longitud 0° ; el eje u_2 hacia latitud 0° , longitud

90°E ; y el eje u_3 hacia latitud 90°N , esto es, el polo norte. La conexión se hace a través de un sistema coordenado inercial fijo \mathbf{x} , con el eje x_1 dirigido hacia el equinoccio vernal, el punto donde la órbita del sol intersecta al ecuador, el eje x_2 en dirección 90°E hacia el este del ecuador y el eje x_3 en dirección al polo norte. Al ángulo que existe entre el equinoccio y el meridiano de Greenwich (longitud 0°) se le conoce como Tiempo Sideral de Greenwich o Greenwich Sidereal Time (GST) (ver figura 1.4).

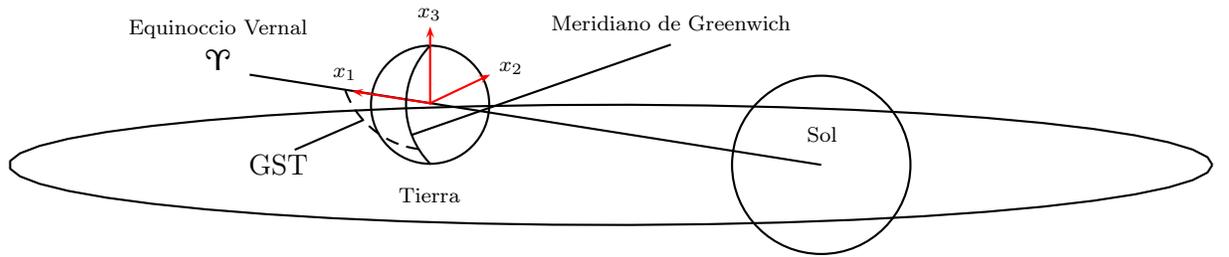


Figura 1.4: Representación gráfica del GST.

Así pues, para un sistema que rota uniformemente en contra de las manecillas del reloj alrededor de un eje fijo respecto al espacio inercial, el desplazamiento desde las coordenadas \mathbf{u} fijas a la tierra al sistema inercia fijo \mathbf{x} será una sencilla rotación de un ángulo θ (GST) en sentido del reloj alrededor del eje W , o Z , lo cual escrito en notación matricial es

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_3(-\theta)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (1.14)$$

y llevando a cabo la multiplicación nos da

$$\begin{aligned} x &= u \cos \theta - v \text{sen } \theta, \\ y &= u \text{sen } \theta + v \cos \theta, \\ z &= w \end{aligned} \quad (1.15)$$

Utilizando la notación de subíndices para describir a la matriz de rotaciones y denotando los vectores transformados por la rotación tenemos

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xu}} = \mathbf{R}_3(-\theta), \quad (1.16)$$

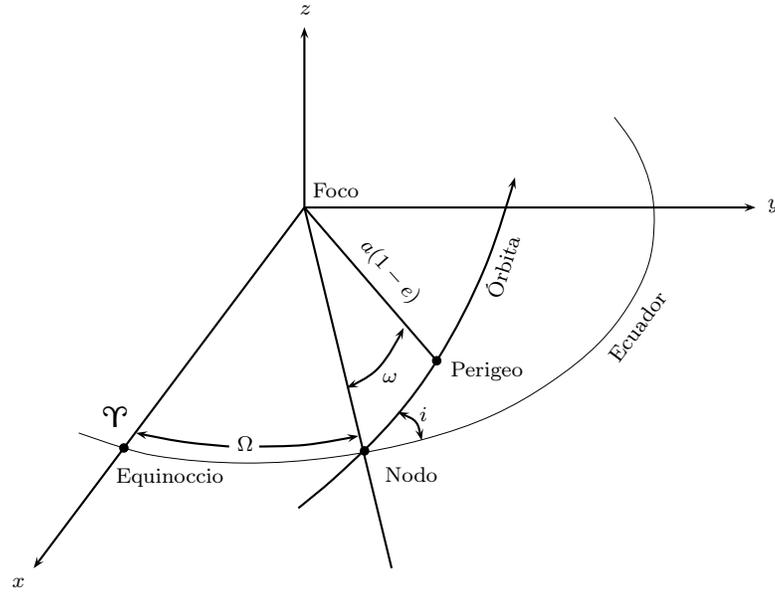


Figura 1.5: Orientación orbital.

e inversamente

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ux}} = \mathbf{R}_3(\theta). \quad (1.17)$$

Ahora, queremos hacer una rotación desde las coordenadas inerciales \mathbf{x} hacia las coordenadas Keplerianas \mathbf{q} —con q_1 en dirección al perigeo, q_2 en el plano orbital (figura 1.2) y q_3 normal al plano orbital—para esto, necesitamos llevar a cabo una rotación alrededor del eje x_3 desde el equinoccio vernal (Ψ) hasta la intersección del plano inclinado con el ecuador que es la línea de nodos (figura 1.5). Esta rotación se denota por

$$\mathbf{R}_3(\Omega). \quad (1.18)$$

Después de esto, debemos rotar el plano ecuatorial al plano orbital, esto se lleva a cabo con una rotación en contra de las manecillas del reloj alrededor del eje-1, dado por

$$\mathbf{R}_1(i)\mathbf{R}_3(\Omega). \quad (1.19)$$

Y finalmente una rotación desde el nodo al perigeo llevada a cabo por una rotación en contra de las manecillas del reloj alrededor del eje-3, la cual se denota por

$$\mathbf{R}_{qx} = \mathbf{R}_3(\omega)\mathbf{R}_1(i)\mathbf{R}_3(\Omega). \quad (1.20)$$

Los parámetros Ω , i y ω son idénticos a los ángulos de Euler que relacionan las coordenadas \mathbf{q} y \mathbf{x} . Inversamente tenemos

$$\mathbf{R}_{xq} = \mathbf{R}_3(-\Omega)\mathbf{R}_1(-i)\mathbf{R}_3(-\omega). \quad (1.21)$$

Haciendo un pequeño recordatorio, las matrices de rotación $\mathbf{R}_i(\theta)$ con elementos r_{lm} satisfacen las siguientes reglas [4]:

$$\begin{aligned} j &\equiv i(\text{módulo } 3) + 1, & k &\equiv j(\text{módulo } 3) + 1, \\ r_{ii} &= 1, & r_{ij} = r_{ji} = r_{ik} = r_{ki} &= 0, \\ r_{jj} = r_{kk} &= +\cos \theta, & r_{jk} = +\text{sen } \theta, & r_{kj} = -\text{sen } \theta. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Utilizando 1.14 para obtener $\mathbf{R}_3(-\Omega)$ pues son de la misma forma tenemos

$$\mathbf{R}_3(-\Omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\text{sen } \Omega & 0 \\ \text{sen } \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Utilizando 1.22 tenemos que los elementos de $\mathbf{R}_1(-i)$ con $i = 1$, $j = i + 1 = 2$ y $k = j + 1 = 3$ están dados por:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 1, \quad r_{12} = r_{21} = 0, \quad r_{13} = r_{31} = 0 \\ r_{22} &= r_{33} = \cos(-i), \quad r_{23} = \text{sen}(-i) \\ r_{32} &= -\text{sen}(-i). \end{aligned}$$

y la matriz queda

$$\mathbf{R}_1(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\text{sen } i \\ 0 & \text{sen } i & \cos i \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

De igual forma tenemos que la matriz $\mathbf{R}_3(-\omega)$ es

$$\mathbf{R}_3(-\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\text{sen } \omega & 0 \\ \text{sen } \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Llevando a cabo la multiplicación de (1.23), (1.24) y (1.25) obtenemos la matriz

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xq}} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos i \cos \omega & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos i \cos \omega & -\cos \Omega \sin i \\ \sin i \sin \omega & \sin i \cos \omega & \cos i \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

la cual se utilizará más adelante.

1.3. Ecuación de Kepler

Otra manera de localizar a la partícula sobre la elipse, que en la mayoría de los casos es la más conveniente, es por medio de la anomalía excéntrica E . La anomalía excéntrica, como se muestra en la figura 1.2, se determina dibujando una línea perpendicular al semieje mayor, que pasa a través del satélite. Dicha línea se intersecta con la circunferencia auxiliar. El ángulo que existe entre la línea que une el centro de la elipse con el perigeo y la línea que va desde el centro de la elipse a la intersección en la circunferencia auxiliar es lo que se conoce como anomalía excéntrica. De la figura 1.2 obtenemos

$$q_1 = \xi - ae = a(\cos E - e). \quad (1.27)$$

Usando (1.9), obtenemos entonces

$$q_2 = \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (1.28)$$

$$r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} = a(1 - e \cos E). \quad (1.29)$$

Para encontrar la razón de movimiento de la partícula en su órbita, podemos utilizar (1.5), cambiando $\dot{\lambda}$ a \dot{f} . La ecuación (1.5) se integra más fácilmente si la anomalía verdadera se sustituye por la anomalía excéntrica. Diferenciando (1.10) respecto a f , obtenemos

$$\frac{dr}{df} = -\frac{r^2 d(1/r)}{df} = \frac{r^2 e}{a(1 - e^2)} \sin f.$$

Si sustituimos q_2 por $r \sin f$ de la figura 1.2,

$$dr = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} df. \quad (1.30)$$

Diferenciando la ecuación (1.29) y (1.28), obtenemos

$$dr = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} q_2 dE. \quad (1.31)$$

Si utilizamos (1.30) y (1.31) para eliminar a df , r de (1.29) y h de (1.13) para sustituir todo esto en (1.5) obtendremos

$$a^2 \sqrt{1-e^2} (1-e \cos E) dE = \sqrt{\mu a (1-e^2)} dt. \quad (1.32)$$

E integrando la ecuación (1.32) obtenemos

$$E - e \operatorname{sen} E = M \quad (1.33)$$

donde

$$M = n(t - t_0)$$

y

$$n = \mu^{1/2} a^{-3/2}. \quad (1.34)$$

El tiempo t_0 es el tiempo en el cual la partícula pasa por el perigeo. La cantidad M es conocida como la anomalía media, y la cantidad n como el movimiento promedio. La ecuación (1.33) es conocida como la *ecuación de Kepler*, y la ecuación (1.34) es la *tercera ley de Kepler* [8].

1.3.1. Conversión de los Elementos Cartesianos a los Elementos Keplerianos

El momento angular específico (momento angular por unidad de masa) h , cuya magnitud está dada por (1.5) o por (1.13), también puede ser expresado como el producto cruz de los vectores posición y velocidad,

$$\mathbf{h} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}. \quad (1.35)$$

Utilizando la matriz de rotación $\mathbf{R}_{\mathbf{xq}}$ definida por la ecuación (1.26), las coordenadas rectangulares inerciales pueden ser expresadas en términos de elementos Keplerianos,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{R}_{\mathbf{xq}}\{\Omega, i, \omega\} \mathbf{q}\{a, e, M\}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}_{\mathbf{xq}}\{\Omega, i, \omega\} \dot{\mathbf{q}}\{a, e, M\}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

de lo anterior, usando (1.27), (1.28) y la figura 1.2, obtenemos

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.37)$$

y de (1.27)—(1.32) obtenemos,

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1 - e^2} \cos E \\ 0 \end{bmatrix} \frac{na}{1 - e \cos E} = \begin{bmatrix} -\sin f \\ e + \cos f \\ 0 \end{bmatrix} \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (1.38)$$

Para la velocidad v , usando (1.10) con (1.34) y (1.38), tenemos

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \\ &= \frac{n^2 a^2}{1 - e^2} (\sin^2 f + e^2 + 2e \cos f + \cos^2 f) \\ &= \frac{\mu}{a(1 - e^2)} [(2 + 2e \cos f) - (1 - e^2)] \\ &= \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \end{aligned}$$

Así pues la energía específica (energía total por unidad de masa), es

$$\begin{aligned} \epsilon &= T - V = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \\ &= \frac{\mu}{a} \left[\frac{(1 - e^2)}{2(1 - e)^2} - \frac{1}{1 - e} \right] = \frac{\mu}{a} \left[\frac{e - 1}{2(1 - e)} \right] \\ &= -\frac{\mu}{2a}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

donde se ha utilizado la velocidad en términos del momento angular específico

$$v^2 = \frac{h^2}{r^2} = \frac{h^2}{a^2(1 - e)^2} = \frac{\mu a(1 - e^2)}{a^2(1 - e)^2} = \frac{\mu(1 - e^2)}{a(1 - e)^2}.$$

Para encontrar la inversa de (1.36), i.e., para pasar de los componentes rectangulares a los elementos Keplerianos, utilizaremos el hecho de que el vector de momento angular (1.35) es normal al plano orbital y se puede utilizar para determinar la longitud del nodo Ω y la inclinación i .

Como podemos observar de la figura 1.6 tenemos que

$$\begin{aligned} \Omega &= \tan^{-1}[h_1/(-h_2)] \\ i &= \tan^{-1}[(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}/h_3], \end{aligned}$$

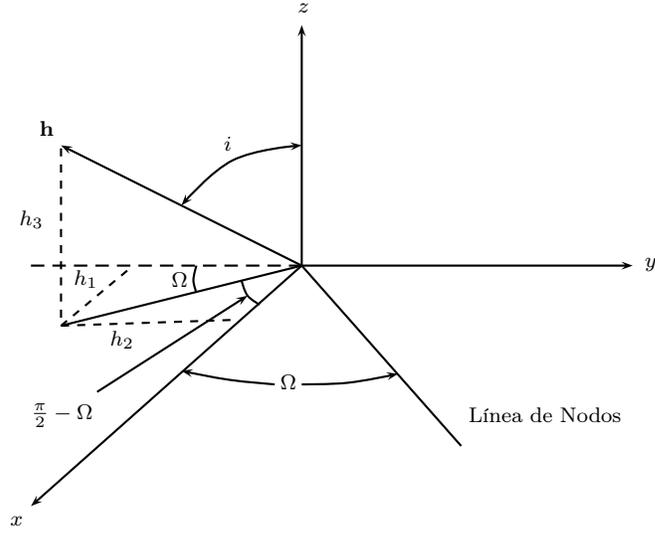


Figura 1.6: Vector de momento angular.

donde h_1, h_2, h_3 son los componentes del vector \mathbf{h} . Entonces, en el plano orbital sea

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}_1(\mathbf{i})\mathbf{R}_3(\Omega)\mathbf{x},$$

mientras que

$$\omega + f = \tan^{-1}(p_2/p_1).$$

De la ecuación (1.5), tenemos

$$\dot{r} = [v^2 - h^2/r^2]^{1/2};$$

de (1.39),

$$a = r\mu/(2\mu - rv^2);$$

de (1.13)

$$e = (1 - h^2/\mu a)^{1/2}.$$

Entonces de (1.29), (1.31) y (1.32), tendremos

$$\cos E = (a - r)/(ae)$$

$$\sen E = r\dot{r}/e(\mu a)^{1/2},$$

y finalmente de (1.36),

$$f = \tan^{-1}[\sqrt{1 - e^2} \sen E / (\cos E - e)].$$

Como conclusión del presente capítulo tenemos que en cualquier momento, la localización de un satélite que gira alrededor de la tierra y que tiene coordenadas inerciales fijas puede ser descrito por las componentes rectangulares de la posición $\{x, y, z\}$ y de la velocidad $\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$. En lugar de estos seis números, se pueden utilizar los seis números de la elipse Kepleriana $\{a, e, i, M, \omega, \Omega\}$. La relación entre ambos sistemas puede ser expresada por medio de la rotación desde un sistema coordinado en el plano orbital referente al perigeo, al sistema inercial fijo, dado por (1.36). La elipse Kepleriana $\{a, e, i, M, \omega, \Omega\}$ corresponde a la posición \mathbf{r} y la velocidad $\dot{\mathbf{r}}$ del satélite en un tiempo particular, conocida como la órbita instantánea.

Capítulo 2

El Campo Gravitacional Terrestre

De todas las perturbaciones que existen actuando sobre un satélite artificial, la que debe ser tomada en mayor consideración es aquella que surge debido a la no uniformidad del campo gravitacional terrestre. La no uniformidad del campo gravitacional terrestre tiene un origen complejo: La aceleración gravitacional es influenciada por la topografía, las variaciones de densidad dentro de la Tierra, y la rotación de la Tierra. Así pues, es necesario caracterizar, e interpretar el campo de la gravedad; siempre con respecto a una referencia específica en forma de una superficie equipotencial.

En el presente capítulo estudiaremos el potencial terrestre comenzando con el uso de campos potenciales para estudiar la estructura de la Tierra, los cuales tienen sus implicaciones:

1. Para un campo con simetría esférica el potencial, y entonces la aceleración gravitacional \mathbf{g} , está en función solamente de la distancia que existe entre el punto de observación, r , y el centro de la masa de densidad ρ . En coordenadas esféricas:

$$g(r) = -4\pi \frac{G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

Esto es importante para entender la variación en g con r hacia dentro de la Tierra.

2. Esta expresión no contiene toda la información sobre la distribución radial de la masa. Este genera un problema con las interpretaciones de gravedad no-únicas.

Es por esto que se busca determinar y explicar las desviaciones de las superficies equipotenciales (o, más precisamente, la diferencia de la altura en superficies equipotenciales). Esta diferencia en la altura tiene relación con g local. Las superficies importantes de referencia son:

El **geoide**: La superficie actual que coincide con el nivel del mar (ignorando las mareas y otros efectos dinámicos en el mar).

El **esferoide de referencia**: La forma teórica de la superficie del mar (independiente en longitud y con una variación suave en latitud) que más se parece al geoide.

La **forma hidrostática de la Tierra**: Es aquella forma hipotética de la Tierra si sabemos su densidad ρ y su velocidad angular ω .

En este segundo capítulo se revisa a fondo la ecuación de Laplace y su solución en términos de armónicos esféricos, para poder así hacer la aproximación al campo terrestre real. Se revisan las propiedades de los armónicos esféricos, mismas que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Se propone la utilización de un elipsoide como aproximación al geoide en función del achatamiento terrestre f , el mismo que nos permitirá describir el campo gravitacional que incluya la rotación terrestre.

2.1. Teoría de Potencial

De acuerdo a la ley de gravitación universal de Isaac Newton, la fuerza de atracción entre dos partículas de masa m y M es proporcional al producto de tales masas e inversamente proporcional al inverso del cuadrado de la distancia r que existe entre ellas, esto es

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad (2.1)$$

o en forma vectorial

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -G \frac{mM}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \hat{r}'.$$

donde \hat{r}' es un vector unitario en la dirección de $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. El signo negativo significa que el vector de la fuerza, \mathbf{F} , está en la dirección hacia adentro (es decir, hacia M), pero el vector unitario está en la dirección hacia afuera de M . En nuestro caso ponemos a M en el origen de nuestro sistema de coordenadas (tomar \mathbf{r}_0 a $\mathbf{0}$) para simplificar las ecuaciones (es decir, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$ y $\hat{r}' = \hat{\mathbf{r}}$). G es la constante de gravitación universal, $G = 6.673 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. Aplicando la segunda Ley de Newton a la ecuación (2.1)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{g} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

obtenemos la magnitud de la aceleración de la partícula m respecto al centro de masas de las dos partículas,

$$a = |\mathbf{a}| = \frac{GM}{r^2}. \quad (2.2)$$

Esta aceleración es la magnitud del vector dirigido a lo largo de la línea que une a las partículas. Debido a su posición en un campo gravitacional \mathbf{a} (o \mathbf{g}), generado por una masa M , cualquier masa m tiene energía potencial gravitacional. Se puede decir que esta energía es el trabajo W sobre una masa m (de la fuerza gravitacional debido a M) cuando movemos m de \mathbf{r}_{ref} a \mathbf{r} donde siempre $\mathbf{r}_{\text{ref}} = \infty$. El potencial gravitacional V es la energía potencial en el campo de M por unidad de masa. (En otras palabras, es el trabajo realizado por la fuerza gravitacional \mathbf{g} por unidad de masa). El potencial es un campo escalar que es más fácil de manejar que un campo vectorial, y podemos derivar el campo vectorial del campo escalar fácilmente. El campo de gravedad es un campo conservativo, así que el modo exacto en el que la masa m se ha movido de \mathbf{r}_{ref} a \mathbf{r} no es relevante; el trabajo hecho solamente depende de las posiciones iniciales y finales. Si seguimos la definición para el potencial negativo, tenemos para V

$$V = \int_{\mathbf{r}_{\text{ref}}}^{\mathbf{r}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_{\text{ref}}}^{\mathbf{r}} \frac{GM}{r'^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = GM \int_{\infty}^r \frac{1}{r'^2} dr' = -\frac{GM}{r}. \quad (2.3)$$

Nótese que $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = -dr$ porque $\hat{\mathbf{r}}$ y $d\mathbf{r}$ están en direcciones opuestas.

V representa el potencial gravitacional a una distancia r de una masa M . Note que se asume que $V(\infty) = 0$. El potencial es la integración sobre el espacio del campo de gravedad. Entonces, el campo de gravedad (la fuerza de gravedad por unidad de masa), es la derivada espacial (el gradiente) del potencial:

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{GM}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} V = -\nabla V. \quad (2.4)$$

De lo anterior se obtiene que como V se define negativo, cuando una masa m se acerca a la Tierra, su energía potencial decrece mientras su aceleración (debido a la atracción al centro de la Tierra) aumenta. Para una masa m despreciablemente pequeña en comparación con M , las ecuaciones (2.4) y (2.3) son consistentes con un sistema coordenado cuyo origen es el centro de masa de la partícula M . Para el efecto de varias partículas de masa M_i en las posiciones r_i , la aceleración puede ser expresada como el gradiente de un potencial, el cual es una suma de potenciales V_i expresados por la ecuación (2.3). Ahora, consideremos un cuerpo continuo formado por la unión de las masas M_i antes mencionadas, el cual tendrá una densidad variable ρ . La sumatoria de los potenciales viene a ser sustituida por una integración a lo largo del volúmen del cuerpo. Esto es

$$V = -G \iiint \frac{\rho(x, y, z)}{r(x, y, z)} dx dy dz. \quad (2.5)$$

Para una componente en particular a_x de \mathbf{a} la cual se deriva del potencial de masa puntual o ecuación (2.3), tenemos

$$a_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = GM \frac{x}{r^3} \quad (2.6)$$

y la segunda derivada es

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = GM \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right). \quad (2.7)$$

Haciendo lo mismo para las componentes a_y y a_z , y sumando sus segundas derivadas a la anterior calculada tendremos la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = GM \left(-\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = 0, \quad (2.8)$$

este mismo resultado se obtiene para cualquier elemento de masa $\rho \, dx \, dy \, dz$ en el potencial de la ecuación (2.5) y por ende para la sumatoria total.

Ahora, para convertir la ecuación de Laplace, (2.8), a coordenadas esféricas, necesitamos los factores de escala asociados a la transformación del sistema coordenado rectangular al esférico. El vector posición es

$$\mathbf{r} = r \cos \phi \cos \lambda \hat{i} + r \cos \phi \sin \lambda \hat{j} + r \sin \phi \hat{k}$$

y los factores de escala están dados por

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|.$$

Así pues, con $u_1 = r$, $u_2 = \phi$ y $u_3 = \lambda$, tendremos que los factores de escala son

$$h_r = 1,$$

$$h_\phi = r,$$

$$h_\lambda = r \cos \lambda,$$

con los anteriores calculados, podemos construir el Laplaciano el cual está dado por [5]

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right]$$

para así tener

$$r^2 \nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (2.9)$$

Esta es la ecuación de Laplace en las coordenadas deseadas, a continuación estudiaremos las soluciones a dicha ecuación.

2.2. Armónicos Esféricos

Para expresar las variaciones del potencial V en el sistema de coordenadas esféricas, sería conveniente si V tuviera la forma

$$V = R(r)\Phi(\phi)\Lambda(\lambda). \quad (2.10)$$

Al sustituir la ecuación (2.10) en (2.9) y dividiendo por $R\Phi\Lambda$ tendremos

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi \cos \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\cos \phi \frac{d\Phi}{d\phi} \right) + \frac{1}{\Lambda \cos^2 \phi} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = 0. \quad (2.11)$$

Ya que el primer término de la ecuación (2.11) es el único que depende de r , este debe ser igual a una constante, la cual por conveniencia se toma igual a $l(l+1)$. Llevando a cabo la diferenciación y multiplicando por R , tendremos

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0. \quad (2.12)$$

La forma de la ecuación (2.12), en la cual R y cada una de sus derivadas es multiplicada por una potencia equivalente de r sugiere que R sea de la forma r^k . Sustituyendo esto en la ecuación (2.12) y resolviendo la ecuación resultante para k , tenemos l y $-l-1$ como las dos soluciones aceptables, o bien

$$R = Ar^l + Br^{-l-1}, \quad (2.13)$$

con A y B constantes arbitrarias. En nuestro caso de interés, el potencial cuando r tiende a infinito, debe tender a cero forzosamente, para lograr esto, hacemos $A = 0$. Al sustituir la constante de separación $l(l+1)$ en el primer término de la ecuación (2.11) y multiplicando por $\cos^2 \phi$, obtenemos la separación de la ecuación dependiente de λ . Así pues

$$l(l+1) \cos^2 \phi + \frac{\cos \phi}{\Phi} \frac{d}{d\phi} \left(\cos \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = 0. \quad (2.14)$$

El último término de la ecuación (2.14) es el único que depende de λ , así pues debe ser igual a una constante, en este caso será igual a $-m^2$, así pues tendremos

$$\Lambda = C \cos m\lambda + S \sin m\lambda, \quad (2.15)$$

con C y S constantes arbitrarias. Al sustituir $-m^2$ en el término dependiente de λ y multiplicando por $\Phi / \cos^2 \phi$, obtenemos una ecuación que depende únicamente de ϕ . Esto es

$$\frac{1}{\cos \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\cos \phi \frac{d\Phi}{d\phi} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\cos^2 \phi} \right] \Phi = 0 \quad (2.16)$$

o bien, sustituyendo μ por $\sin \phi$, y utilizando la regla de la cadena

$$\frac{d\Phi}{d\phi} = \frac{d\Phi}{d\mu} \frac{d\mu}{d\phi} = \cos \phi \frac{d\Phi}{d\mu}$$

tendremos

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\Phi}{d\mu} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] \Phi = 0. \quad (2.17)$$

La forma de la ecuación (2.17) con $m = 0$ es conocida como la ecuación de Legendre, la cual se resuelve representando a la función Φ en una serie de potencias en μ [1]. En el caso de que $m \neq 0$, el denominador $1 - \mu^2$ hace que la representación en series de potencias sea poco conveniente, así pues, la ecuación tiene que ser resuelta por corte y prueba. La función propuesta es que Φ sea de la forma

$$\Phi = (1 - \mu^2)^{m/2} \nu(\mu), \quad (2.18)$$

lo cual nos lleva a una ecuación para ν . Por lo tanto tendremos

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 \nu}{d\mu^2} - 2(m+1)\mu \frac{d\nu}{d\mu} + (l-m)(l+m+1)\nu = 0. \quad (2.19)$$

Asumimos que ν tiene la forma

$$\nu = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \mu^i, \quad (2.20)$$

la sustituimos en (2.19), y hacemos que los coeficientes de cada potencia de μ sean iguales a cero por separado, de esta manera obtenemos una relación de recurrencia entre los coeficientes alternantes de la serie de potencias. De los coeficientes de μ^k obtenemos

$$a_{k+2} = \frac{k(k+2m+1) - (l-m)(l+m+1)}{(k+1)(k+2)} a_k. \quad (2.21)$$

Para obtener el valor máximo de k , igualamos el numerador de la ecuación (2.21) a cero y resolvemos para k . El resultado obtenido que cumple con $k \geq 0$ es

$$k_{max} = l - m, \quad (2.22)$$

como consecuencia $m \leq l$, y si ν va a ser representada en series de potencias de μ , los valores aceptados serán $l - m - 2t$, donde t es un número no-negativo entero $\leq (l - m)/2$. Ahora, si sustituimos $(l - m - 2t)$ por k y la notación T_{lmt} por a_k y llevándose a cabo la cancelación de algunos términos en el numerador, la ecuación (2.21) adquiere una forma más compacta

$$T_{lmt} = -\frac{(l - m - 2t + 1)(l - m - 2t + 2)}{2t(2l - 2t + 1)} T_{lm(t-1)}. \quad (2.23)$$

Para esta solución aún tenemos que definir el valor de T_{lm0} . Ahora, ya que toda la expresión de la solución está multiplicada por las constantes arbitrarias BC y BS las cuales surgen de las ecuaciones (2.13) y (2.15), también T_{lm0} es arbitrario; cualquier cambio en el valor de T_{lm0} resulta en un cambio inversamente proporcionado de BC y BS . Así pues, la manera más común para definirlo es

$$T_{lm0} = \frac{(2l)!}{2^l l! (l-m)!}. \quad (2.24)$$

Aplicando la ecuación (2.23) sucesivamente a (2.24) tendremos

$$T_{lmt} = \frac{(-1)^t (2l-2t)!}{2^l t! (l-t)! (l-m-2t)!}. \quad (2.25)$$

La solución Φ de la ecuación (2.16) o (2.17) que corresponde particularmente a los subíndices l , m es la llamada función asociada de Legendre, $P_{lm}(\sin \phi)$ o $P_{lm}(\mu)$; entonces tenemos

$$P_{lm}(\sin \phi) = \cos^m \phi \sum_{t=0}^k T_{lmt} \sin^{l-m-2t} \phi, \quad (2.26)$$

con k la parte entera de $(l-m)/2$. Usando (2.13) con $A=0$, $B=1$, (2.15) y (2.26), la solución completa de la ecuación de Laplace, (2.9), es entonces

$$V = \sum_{lmi} \frac{1}{r^{l+1}} S_{lmi} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{l+1}} P_{lm}(\sin \phi) [C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda], \quad (2.27)$$

donde el subíndice i en el primer término denota el término $\cos m\lambda$ o $\sin m\lambda$.

Adicional a estas soluciones reales, existen soluciones imaginarias que no son aplicables al problema del potencial de nuestro interés.

2.2.1. Propiedades de los Armónicos Esféricos

Denotemos a los armónicos esféricos T_{lmt} como S_{lmi} . Una propiedad importante de los armónicos esféricos S_{lmi} es que son ortogonales; esto es

$$\int_{\text{esfera}} S_{lmi} S_{hkj} d\sigma = 0, \quad \text{si} \quad l \neq h \quad \text{o} \quad m \neq k \quad \text{o} \quad i \neq j \quad (2.28)$$

llevándose a cabo la integración sobre la superficie de una esfera. Esta propiedad hace que los armónicos esféricos sean las expresiones más comunes para la representación más general de una función sobre una superficie esférica, análogo a las series de Fourier para el caso de una función en un espacio rectilíneo. La integral del cuadrado de S_{lmi} es, por unidad de C_{lm} o S_{lm} ,

$$\int_{\text{esfera}} S_{lmi}^2 d\sigma = \left[\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l+1)(2-\delta_{0m})} \right] 4\pi, \quad (2.29)$$

donde la delta de Kronecker δ_{0m} es igual a 1 para $m = 0$ y 0 para $m \neq 0$. El factor $(l+m)!/(l-m)!$ indica que la magnitud de las funciones (y por ende de los coeficientes) varía considerablemente con el índice m . Para hacer los coeficientes más legibles en el presente trabajo, utilizaremos las funciones normalizadas,

$$\bar{S}_{lmi} = \left[\frac{(l-m)!(2l+1)(2-\delta_{0m})}{(l+m)!} \right]^{1/2} S_{lmi}. \quad (2.30)$$

Los armónicos esféricos son más fáciles de recordar en términos de sus ceros. Así pues, un armónico esférico S_{lmi} tendrá $(l-m)$ ceros a una distancia π a lo largo de un meridiano y m ceros en la misma distancia a lo largo de un paralelo. Es importante visualizar el comportamiento de los armónicos esféricos. Alguna terminología que recordar es que sobre la base de los valores de l y m se identifican tres tipos de armónicos.

1. Los armónicos zonales tienen la forma $P_l^0(\cos \lambda) = P_l(\cos \lambda)$. La superposición de estos polinomios de Legendre describen variaciones con la latitud; no dependen de la longitud. Los armónicos zonales desaparecen ($V = 0$) en l pequeños círculos sobre el globo, dividiendo las esferas en zonas latitudinales. Por ejemplo, en la figura 2.1, el caso $lm = 30$.
2. Los armónicos sectoriales tienen la forma $\sin m\phi P_m^m(\cos \lambda)$ o $\cos m\phi P_m^m(\cos \lambda)$. Como desaparecen en $2m$ meridianos (líneas longitudinales, entonces m gran círculos), ellos dividen la esfera en sectores. Por ejemplo, en la figura 2.1, el caso $lm = 22$.
3. Los armónicos teserales tienen la forma $\sin m\phi P_l^m(\cos \lambda)$ o $\cos m\phi P_l^m(\cos \lambda)$ para $l \neq m$. La amplitud de un armónico esférico superficial de algún grado l y orden m desaparece en $4m$ meridianos de longitud y en $(l-m)$ paralelos de latitud. Por ejemplo, en la figura 2.1, los casos $lm = 41$ y $lm = 64$.

En otras palabras, el grado l da el número total de líneas nodales y el orden m controla cómo este número está distribuido sobre los meridianos nodales y paralelos nodales.

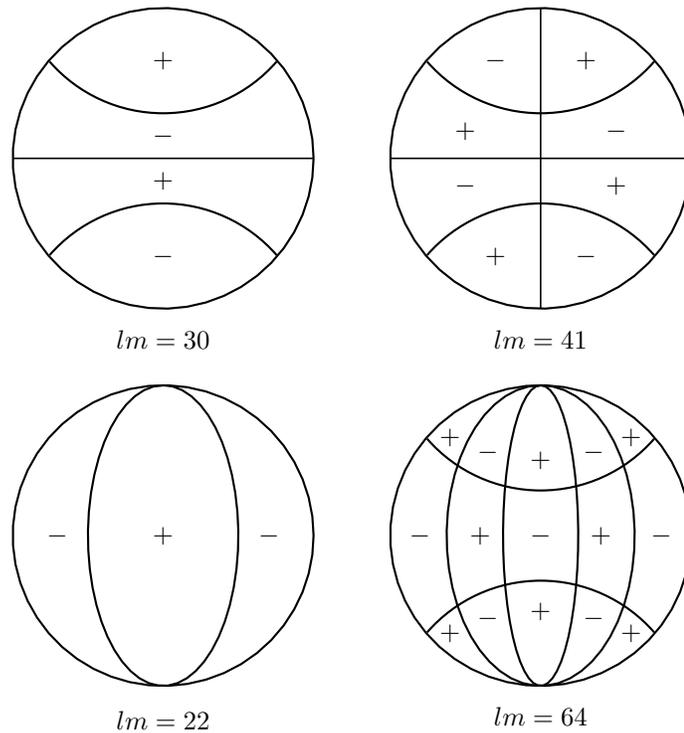


Figura 2.1: Ejemplos de armónicos esféricos.

2.3. Potencial del Elipsoide

La geometría terrestre se ve modificada en un tipo achatamiento en los polos y un ensanchamiento ecuatorial debido a la rotación del planeta sobre su propio eje. Es por esta razón por la cual se utiliza el nombre *geoide* para referirnos a la forma actual del planeta. La forma del geoide puede determinarse por medio de los siguientes métodos experimentales:

- a) Medidas de las anomalías gravitatorias las cuales se obtienen a partir de la magnitud de la intensidad de la gravedad en numerosos puntos de la superficie terrestre. Dado que es similar a un esferoide (esfera achatada en los polos), la aceleración de la gravedad va disminuyendo desde el ecuador hasta los polos. Estas mediciones de la gravedad terrestre tienen que ser corregidas para eliminar las anomalías locales debido a variaciones de la densidad.
- b) Mediciones astronómicas: Se fundan en medir la vertical del lugar y ver sus variaciones. Esta variación se relaciona con su forma.
- c) Medición de las deformaciones producidas en la órbita de los satélites, las cuales son causadas

por la no homogeneidad de la geometría terrestre. Así se ha determinado un geoide con decenas de abultamientos o depresiones respecto al esferoide teórico. Estas irregularidades son menores de 100 metros.

De esta manera, el potencial del geoide se ve modificado de la misma manera, siendo ahora, no solo el potencial gravitacional V , sino que también se debe tomar en cuenta el potencial producido por el efecto de la rotación para así tener

$$U_{\text{gravedad}} = U_{\text{gravitacional}} + U_{\text{rot}} \quad (2.31)$$

o bien

$$U_{\text{gravedad}} = V + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \phi, \quad (2.32)$$

con ω la razón de rotación y $V = U_{\text{gravitacional}}$. Se obtiene como resultado experimental de los métodos mencionados en **a)**, **b)** y **c)** que el geoide se aproxima en un 10^{-5} al radio vector de un elipsoide. La forma de este elipsoide se expresa convencionalmente por medio del achatamiento f

$$f = (a - b)/a, \quad (2.33)$$

con a el radio ecuatorial y b el radio polar o bien, el semi eje mayor y el semi eje menor respectivamente del elipsoide. El valor de f es de aproximadamente 3.353×10^{-3} . Así pues, para encontrar la diferencia de 10^{-5} del campo gravitacional terrestre de un potencial referencia V_0 de un elipsoide, es necesario expresar a V_0 en términos de la masa M , el radio a , la rotación ω y el achatamiento f hasta un orden de magnitud f^2 . Las simetrías de un elipsoide de revolución nos indican que su radio vector puede ser expresado como una sumatoria de armónicos esféricos zonales pares. Entonces, tenemos [9]

$$r = r_0(1 + \alpha_2 P_{20} + \alpha_4 P_{40} + \dots), \quad (2.34)$$

donde P_{20} , P_{40} están definidos por (2.25) y (2.26). La manera más usual de representar al campo de gravedad terrestre es

$$U_{\text{gravedad}} = \frac{GM}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_{20} - J_4 \left(\frac{a}{r}\right)^4 P_{40} - \dots \right] + \frac{1}{3} \frac{g_e m}{a} r^2 (1 - P_{20}), \quad (2.35)$$

con

$$m = \frac{\omega^2 a}{g_e}, \quad (2.36)$$

donde g_e es la aceleración de la gravedad en el ecuador y J_n son los coeficientes del término del potencial zonal [3]. Desarrollando la ecuación (2.34) por medio del teorema del binomio obtenemos

$$r^n = r_0^n \left\{ 1 + \frac{n(n-1)}{10} \alpha_2^2 + \left[n\alpha_2 + \frac{n(n+1)}{7} \alpha_2^2 \right] P_{20} + \left[n\alpha_4 + \frac{9n(n-1)}{35} \alpha_2^2 \right] P_{40} + \dots \right\} \quad (2.37)$$

donde hemos utilizado la identidad [5]

$$P_{20}^2 = \frac{18}{35} P_{40} + \frac{2}{7} P_{20} + \frac{1}{5}. \quad (2.38)$$

Sustituyendo la ecuación (2.37) en (2.35), usando (2.38), y despreciando términos como $P_{20}P_{40}$ y P_{40}^2 , obtenemos una forma del potencial U_{gravedad} para la superficie del elipsoide, la cual es

$$\begin{aligned} U_{\text{gravedad}} &= U_0(g_e, m, r_0, \alpha_2, a, kM, J_2) \\ &\quad + C_2(g_e, m, r_0, \alpha_2, a, kM, J_2) P_{20} \\ &\quad + C_4(g_e, m, r_0, \alpha_2, a, kM, J_2) P_{40}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{GM}{r_0} + \frac{g_e m}{3a} r^2 + O(f^2) \\ C_2 &= -\frac{GM}{r_0} \left[\alpha_2 + J_2 \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 \right] - \frac{g_e m}{3a} r_0^2 + O(f^2) \\ C_4 &= O(f^2). \end{aligned}$$

Si la superficie elipsoidal es una equipotencial, entonces U_{gravedad} debe ser constante e igual a U_0 . En consecuencia, de la ecuación 2.39, para que se cumpla la condición $U_{\text{gravedad}} = U_0$, los coeficientes C_2 y C_4 deben ser iguales a cero, lo cual nos proporciona dos ecuaciones para GM , J_2 y J_4 en términos de otros parámetros. La tercera ecuación se obtiene usando la condición de que la negativa de la derivada radial de U_{gravedad} debe ser igual a g_e en el ecuador. Así pues

$$-g_e = \frac{-GM}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 - \frac{15}{8} J_4 \right) + g_e m. \quad (2.40)$$

Las tres ecuaciones se resuelven simultáneamente para GM , J_2 , y J_4 . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} GM &= a^2 g_e [1 + 3m/2 + 2\alpha_2/2 + O(f^2)] \\ J_2 &= -m/3 - \alpha_2 + O(f^2), \\ J_4 &= O(f^2). \end{aligned}$$

Para poder obtener los valores r_0 , α_2 , y α_4 en términos de parámetros convencionales para un elipsoide, a y f , tenemos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (2.41)$$

Ahora, sustituyendo las coordenadas esféricas (1.1) en la anterior, usando (2.33) para eliminar a y b , resolviendo para r^2 y aplicando el teorema del binomio para obtener r , obtenemos

$$r = a \left[1 - \left(f + \frac{3}{2}f^2 + \dots \right) \sin^2 \phi + \frac{3}{2}f^2 \sin^4 \phi - \dots \right] \quad (2.42)$$

Integrando (2.42) de 0 a 1 respecto a $\sin \phi$, obtenemos r_0 ,

$$r_0 = a[1 - f/3 + O(f^2)],$$

y así pues

$$\alpha_2 = -2f/3 + O(f^2),$$

$$\alpha_4 = O(f^2).$$

Sustituyendo todo lo anterior en las ecuaciones para GM , J_2 y J_4 nos da la solución completa de (2.35),

$$GM = a^2 g_e \left(1 - f + \frac{3}{2}m - \frac{15}{14}mf + \dots \right), \quad (2.43)$$

$$J_2 = \frac{2}{3}f \left(1 - \frac{1}{2}f \right) - \frac{1}{3}m \left(1 - \frac{3}{2}m - \frac{2}{7}f \right) + \dots, \quad (2.44)$$

$$J_4 = -\frac{4}{35}f(7f - 5m) + \dots. \quad (2.45)$$

Como conclusión del presente capítulo, podemos considerar el campo gravitacional de la Tierra como un potencial normal de un elipsoide de revolución dado por (2.35), más pequeñas variaciones irregulares expresadas por la suma de armónicos esféricos como los que aparecen en (2.27). También obtuvimos la forma de representar al campo gravitacional en términos del achatamiento polar f .

Capítulo 3

La Órbita Perturbada.

En los capítulos anteriores obtuvimos las ecuaciones de movimiento de un cuerpo alrededor de la tierra suponiendo que no existen perturbaciones externas, i.e., los desarrollos precedentes aplican solo para el movimiento en un campo central. Para esto se utilizaron los conceptos de la ecuación de Kepler en términos de los elementos keplerianos para facilitar su interpretación. En este capítulo se tratan las perturbaciones que hay que tomar en cuenta a la hora de estudiar la órbita de un satélite que gira alrededor de la tierra, mismas que son denotadas en términos de los armónicos esféricos. Haciendo uso de las simetrías de las ecuaciones dinámicas para los seis elementos keplerianos se obtienen las ecuaciones simplificadas de Delaunay y se obtienen las expresiones para el potencial perturbador en términos de los elementos Keplerianos.

3.1. Las Ecuaciones Perturbadas de Movimiento

Nuestro interés en la geodesia satelital se debe principalmente al hecho de que el campo gravitacional no es del todo central; i.e., la ecuación (1.2) debe ser reemplazada por

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla V,$$

donde V tiene una forma no-central tal como (2.27) o (2.35). Sin embargo, aún para este campo no-central la elipse Kepleriana y su orientación pueden ser consideradas como un sistema coordenado, alternativo al sistema rectangular o polar, análogo al uso de las geodésicas de latitud, longitud y altitud en un sistema fijo a tierra. Si el campo potencial V difiere del campo central, esta elipse cambiará continuamente. Sin embargo, si el campo varía muy poco respecto al campo central—como en el caso para la tierra—debemos esperar que los parámetros de la elipse varíen lentamente, y en consecuencia la elipse puede constituir un sistema coordenado conveniente para representar la posición y la velocidad de la partícula. El problema consiste en transformar las ecuaciones de movimiento desde las coordenadas rectangulares a las coordenadas Keplerianas, o

elementos Keplerianos, como se les llama comúnmente. Primero cambiaremos de notación vectorial a notación de subíndices, y segundo cambiaremos las ecuaciones de movimiento desde las tres ecuaciones de segundo orden a seis ecuaciones de primer orden. Esto se lleva acabo tratando las componentes de la velocidad como variables, al igual que las componentes de la posición. Por consiguiente

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_i &= \dot{x}_i, & i &= 1, 2, 3 \\ \frac{d}{dt}\dot{x}_i &= \frac{\partial V}{\partial x_i}, & i &= 1, 2, 3,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde x_i , \dot{x}_i denotan las componentes fijas inerciales rectangulares de la posición y velocidad respectivamente. Las razones de cambio dx_i/dt y $d\dot{x}_i/dt$ en (3.1) pueden ser expresadas como funciones de las razones de cambio ds_k/dt de los seis elementos Keplerianos, donde s_k representa cualquier a , e , i , M , ω u Ω . Así pues

$$\sum_{k=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} = \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3,\tag{3.2}$$

$$\sum_{k=1}^6 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3,\tag{3.3}$$

donde $\partial x_i/\partial s_k$ se obtiene diferenciando a (1.36) y (1.37), y $\partial \dot{x}_i/\partial s_k$ se obtiene diferenciando a (1.36) y a (1.38). En las ecuaciones (3.2) y (3.3) hemos seguido la convención de Einstein. Con el fin de completar la conversión, para cada elemento s_l se lleva acabo lo siguiente:

- (1) multiplicamos (3.2) por $-\partial \dot{x}_i/\partial s_l$,
- (2) multiplicamos (3.3) por $\partial x_i/\partial s_l$, y
- (3) sumamos las anteriores.

Con esto tenemos

$$-\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} = -\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_l} \dot{x}_i + \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i}\tag{3.4}$$

o bien

$$[s_l, s_k] \frac{ds_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial s_l}\tag{3.5}$$

sumando sobre k . Donde

$$[s_l, s_k] = \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial s_k},\tag{3.6}$$

a lo cual se le conoce como los corchetes de Lagrange, y

$$F = V - T. \quad (3.7)$$

F es conocida como la función fuerza; es la negativa de la energía total como la conocemos en física. V es la energía potencial negativa, y T es la energía cinética. Así pues, sumando sobre i ,

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i. \quad (3.8)$$

Existen ahora dos problemas que son importantes:

- (1) la formulación de los corchetes de Lagrange $[s_l, s_k]$, y
- (2) la transformación del potencial V desde coordenadas rectangulares o polares, tales como (2.27), a elementos Keplerianos.

La forma de (3.6) nos indica que $[s_l, s_k]$ es el negativo de $[s_k, s_l]$ y que $[s_k, s_k]$ se hace cero, así pues hay quince corchetes de Lagrange distintos por determinar por medio de la diferenciación de (1.36). Antes de esto cabe señalar que existe una propiedad de los corchetes de Lagrange la cual facilita su evaluación, dicha propiedad es la invarianza de tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [s_l, s_k] &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial s_l \partial t} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} + \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial^2 \dot{x}_i}{\partial s_l \partial t} - \frac{\partial^2 \dot{x}_i}{\partial s_l \partial t} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial s_k} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial^2 x_i}{\partial s_k \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial s_l} \left[\frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} - \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial s_k} \left[\frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_l} - \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial s_l} \left[\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_k} - \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \ddot{x}_i \right] - \frac{\partial}{\partial s_k} \left[\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial s_l} - \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \ddot{x}_i \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial s_l} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (v^2)}{\partial s_k} - \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \cdot \frac{\partial (\mu/r)}{\partial x_i} \right] - \frac{\partial}{\partial s_k} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (v^2)}{\partial s_l} - \frac{\partial x_i}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial (\mu/r)}{\partial x_i} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (v^2)}{\partial s_l \partial s_k} - \frac{\partial^2 (\mu/r)}{\partial s_l \partial s_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (v^2)}{\partial s_l \partial s_k} + \frac{\partial^2 (\mu/r)}{\partial s_l \partial s_k} = 0. \end{aligned}$$

Así pues las coordenadas \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ que aparecen en (1.36) para \mathbf{x} y $\dot{\mathbf{x}}$, y sus derivadas, pueden ser evaluadas en un punto conveniente, como lo es el perigeo, donde $E = 0$ (que es la anomalía excéntrica, no la energía). Evaluando \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ en el perigeo, obtenemos de (1.36)—(1.38) sustituidas en (3.6)

$$[s_l, s_k] = \left(\frac{\partial r_{i1}}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial r_{i2}}{\partial s_k} - \frac{\partial r_{i2}}{\partial s_l} \cdot \frac{\partial r_{i1}}{\partial s_k} \right) na^2 \sqrt{1 - e^2}$$

$$\begin{aligned}
& \text{si } s_l = \Omega, i, \omega \quad \text{y} \quad \text{si } s_k = \Omega, i, \omega; \\
[s_l, s_k] &= a(1-e) \frac{\partial r_{i1}}{\partial s_l} \left(r_{i1} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k} + r_{i2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial s_k} \right) \\
& \quad - \frac{\sqrt{1-e^2}na}{1-e} \cdot \frac{\partial r_{i2}}{\partial s_l} \left(r_{i1} \frac{\partial q_1}{\partial s_k} + r_{i2} \frac{\partial q_2}{\partial s_k} \right) \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{si } s_l = \Omega, i, \omega \quad \text{y} \quad \text{si } s_k = a, e, M; \\
[s_l, s_k] &= r_{i1}r_{i1} \left(\frac{\partial q_1}{\partial s_l} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial s_k} - \frac{\partial q_1}{\partial s_k} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial s_l} \right) + r_{i1}r_{i2} \left(\frac{\partial q_1}{\partial s_l} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial s_k} - \frac{\partial q_1}{\partial s_k} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial s_l} \right) \\
& \quad + r_{i2}r_{i1} \left(\frac{\partial q_2}{\partial s_l} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial s_k} - \frac{\partial q_2}{\partial s_k} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial s_l} \right) + r_{i2}r_{i2} \left(\frac{\partial q_2}{\partial s_l} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial s_k} - \frac{\partial q_2}{\partial s_k} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial s_l} \right) \\
& \text{si } s_l = a, e, M \quad \text{y} \quad \text{si } s_k = a, e, M;
\end{aligned}$$

con r_{11} y r_{12} elementos de la matriz (1.26). Para $[\Omega, i]$, por ejemplo, utilizando lo anterior tenemos

$$[\Omega, i] = \frac{\partial x_i}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial i} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial i}$$

con

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \text{sen } \Omega \cos i \text{ sen } \omega \\ \text{sen } \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \text{ sen } \omega \\ \text{sen } i \text{ sen } \omega \end{bmatrix} a(1-e)$$

y

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\cos \Omega \text{ sen } \omega - \text{sen } \Omega \cos i \cos \omega \\ -\text{sen } \Omega \text{ sen } \omega + \cos \Omega \cos i \cos \omega \\ \text{sen } i \cos \omega \end{bmatrix} \frac{na\sqrt{1-e^2}}{1-e}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
[\Omega, i] &= \left(\frac{\partial r_{i1}}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial r_{i2}}{\partial i} - \frac{\partial r_{i2}}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial r_{i1}}{\partial i} \right) na^2 \sqrt{1-e^2} \\
&= [(-\text{sen } \Omega \cos \omega - \cos \Omega \cos i \text{ sen } \omega) \text{ sen } \Omega \text{ sen } i \cos \omega \\
& \quad - (\cos \Omega \cos \omega - \text{sen } \Omega \cos i \text{ sen } \omega) \cos \Omega \text{ sen } i \cos \omega \\
& \quad - (\text{sen } \Omega \text{ sen } \omega - \cos \Omega \cos i \cos \omega) \text{ sen } \Omega \text{ sen } i \text{ sen } \omega \\
& \quad - (\cos \Omega \text{ sen } \omega + \text{sen } \Omega \cos i \cos \omega) \cos \Omega \text{ sen } i \text{ sen } \omega] na^2 \sqrt{1-e^2} \\
&= -na^2 \sqrt{1-e^2} \text{ sen } i. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Calculando los corchetes de Lagrange para los seis elementos Keplerianos, los únicos que resultan distintos de cero son:

$$\begin{aligned}
[\Omega, i] &= -[i, \Omega] = -na^2(1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen} i, \\
[\Omega, a] &= -[a, \Omega] = (1 - e^2)^{1/2} \cos i \cdot na/2, \\
[\Omega, e] &= -[e, \Omega] = -na^2e \cos i / (1 - e^2)^{1/2}, \\
[\omega, a] &= -[a, \omega] = (1 - e^2)^{1/2} na/2, \\
[\omega, e] &= -[e, \omega] = -na^2e / (1 - e^2)^{1/2}, \\
[a, M] &= -[M, a] = -na/2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

La sustitución de (3.11) en (3.5) y la solución de las seis ecuaciones simultáneas para ds_k/dt nos da

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial F}{\partial M}, \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1 - e^2}{na^2e} \frac{\partial F}{\partial M} - \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial F}{\partial \omega}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial F}{\partial i} + \frac{(1 - e)^{1/2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial F}{\partial e}, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial F}{\partial \Omega}, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2(1 - e)^{1/2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial F}{\partial i}, \\
\frac{dM}{dt} &= -\frac{1 - e^2}{na^2e} \frac{\partial F}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial F}{\partial a}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Expresaremos la función fuerza como

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\mu}{r} + R - T \\
&= \frac{\mu}{2a} + R,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde se ha utilizado (1.39). La función R , que comprende todos los términos de V excepto el término de campo central, se conoce como la función perturbadora. Entonces en todas las ecuaciones de (3.12) F puede ser reemplazada por R excepto en la última, ya que el segundo término de dicha ecuación se deriva a la función F respecto a la variable a , y como se observa de (3.13), existe una dependencia explícita de a en F . Entonces utilizando (1.34) queda

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1 - e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a}. \tag{3.14}$$

Las simetrías y similitudes de los brackets en (3.11) sugieren que se pueden llevar a cabo simplificaciones por medio de un cambio de variables. Para esto, intentemos encontrar un conjunto L , G , H tales que

$$\begin{aligned} [M, L] &= 1, & [M, G] &= 0, & [M, H] &= 0, \\ [\omega, L] &= 0, & [\omega, G] &= 1, & [\omega, H] &= 0, \\ [\Omega, L] &= 0, & [\Omega, G] &= 0, & [\Omega, H] &= 1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

El único bracket distinto de cero que incluye la inclinación i en (3.11) es el primero. De (3.6) debemos tener

$$[\Omega, H] \frac{\partial H}{\partial i} = [\Omega, i] = -na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i \quad (3.16)$$

mientras que

$$H = na^2(1 - e^2)^{1/2} \cos i. \quad (3.17)$$

A modo de verificación (recordando que n es $\mu^{1/2}a^{-3/2}$) tenemos que

$$[\Omega, H] \frac{\partial H}{\partial e} = [\Omega, e], \quad [\Omega, H] \frac{\partial H}{\partial a} = [\Omega, a]. \quad (3.18)$$

De igual manera, de $[\omega, G] \partial G / \partial e$ y $[M, L] \partial L / \partial a$, tenemos

$$G = na^2(1 - e^2)^{1/2} \quad (3.19)$$

y

$$L = na^2 = \mu^{1/2}a^{1/2}. \quad (3.20)$$

Es así como obtenemos (3.21), que son las ecuaciones de Delaunay simplificadas

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial M}, & \frac{dM}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \omega}, & \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \Omega}, & \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Cuando se utilizan las variables de Delaunay, utilizamos la notación l , g , h [la cual no debe ser confundida con h de (1.5)] en vez de M , ω y Ω respectivamente.

3.2. Conversión de la Función Perturbadora a Esféricos Armónicos

COS

Para poder convertir el potencial armónico (2.27) a elementos Keplerianos, requerimos de ciertas identidades trigonométricas, tales como

$$\cos mx = \operatorname{Re} \exp(mjx) = \operatorname{Re}(\cos x + j \operatorname{sen} x)^m \quad (3.22)$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} j^s \cos^{m-s} x \operatorname{sen}^s x \quad (3.23)$$

donde Re denota la parte real, j es $\sqrt{-1}$ (para evitarse la confusión con el vector de inclinación i), y $\binom{m}{s}$ es el coeficiente binomial:

$$\binom{m}{s} = \frac{m!}{s!(m-s)!}, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} mx &= \operatorname{Re}[-j \exp(mjx)] = \operatorname{Re}[-j(\cos x + j \operatorname{sen} x)^m] \\ &= \operatorname{Re} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} j^{s-1} \cos^{m-s} x \operatorname{sen}^s x, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^a x \cos^b x &= \left[-\frac{j}{2}(e^{jx} - e^{-jx}) \right]^a \left[\frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \right]^b \\ &= \frac{(-1)^a j^a}{2^a} \sum_{c=0}^a \binom{a}{c} e^{(a-c)jx} (-1)^c e^{-cjx} \cdot \frac{1}{2^b} \sum_{d=0}^b \binom{b}{d} \cdot e^{(b-d)jx} e^{-djx} \\ &= \frac{(-1)^a j^a}{2^{a+b}} \sum_{c=0}^a \sum_{d=0}^b \binom{a}{c} \binom{b}{d} e^{(a+b-2c-2d)jx} (-1)^c \\ &= \frac{(-1)^a j^a}{2^{a+b}} \sum_{c=0}^a \sum_{d=0}^b \binom{a}{c} \binom{b}{d} (-1)^c \\ &\quad \times [\cos(a+b-2c-2d)x \\ &\quad + j \operatorname{sen}(a+b-2c-2d)x], \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b), \\ \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b &= -\frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b), \\ \operatorname{sen} a \cos b &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(a+b) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(a-b), \\ \cos a \operatorname{sen} b &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(a+b) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(a-b). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sea

$$V_{lm} = \frac{\mu a_e^l}{r^{l+1}} P_{lm}(\sin \phi) (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) \quad (3.28)$$

un término particular de (2.27). Hemos hecho a los coeficientes C_{lm} y S_{lm} adimensionales por medio de la inclusión del factor μa_e^l , donde a_e es el radio ecuatorial de la tierra. Entonces sustituímos $[m(\alpha - \Omega) + m(\Omega - \theta)]$ en $m\lambda$, donde α es la ascensión recta y θ es el GST:

$$\cos m\lambda = \cos m(\alpha - \Omega) \cos m(\Omega - \theta) - \sin m(\alpha - \Omega) \sin m(\Omega - \theta), \quad (3.29)$$

$$\sin m\lambda = \sin m(\alpha - \Omega) \cos m(\Omega - \theta) + \cos m(\alpha - \Omega) \sin m(\Omega - \theta).$$

Del triángulo esférico formado por la órbita, el ecuador y el meridiano del satélite (figura 3.1) tenemos

$$\cos(\omega + f) = \cos(\alpha - \Omega) \cos \phi + \sin(\alpha - \Omega) \sin \phi \cos \pi/2,$$

$$\cos \phi = \cos(\omega + f) \cos(\alpha - \Omega) + \sin(\omega + f) \sin(\alpha - \Omega) \cos i,$$

mientras que

$$\cos(\alpha - \Omega) = \cos(\omega + f) / \cos \phi \quad (3.30)$$

$$\sin(\alpha - \Omega) = \sin(\omega + f) \cos i / \cos \phi,$$

y

$$\sin \phi = \sin i \sin(\omega + f). \quad (3.31)$$

Si aplicamos (3.22) y (3.25) a las funciones $(\alpha - \Omega)$ en (3.29) y además susituímos en ella las

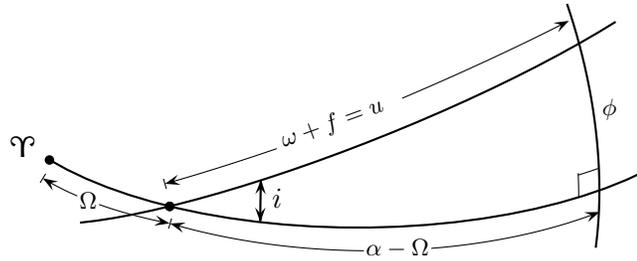


Figura 3.1: Triángulo orbital

ecuaciones (3.30), obtenemos

$$\begin{aligned} \cos m\lambda &= \operatorname{Re} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} j^s \frac{\cos^{m-s}(\omega + f) \sin^s(\omega + f) \cos^s i}{\cos^m \phi} \times [\cos m(\Omega - \theta) + j \sin m(\Omega - \theta)], \\ \sin m\lambda &= \operatorname{Re} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} j^s \frac{\cos^{m-s}(\omega + f) \sin^s(\omega + f) \cos^s i}{\cos^m \phi} \times [\sin m(\Omega - \theta) + j \cos m(\Omega - \theta)]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Si sustituímos (3.31) en (2.26), que es la definición de P_{lm} , y después sustituímos (2.26) y (3.32) en (3.28), cancelando los términos $\cos^m \phi$'s, tenemos

$$\begin{aligned}
 V_{lm} &= \frac{\mu a_e^l}{r^{l+1}} \sum_{t=0}^k T_{lmt} \operatorname{sen}^{l-m-2t} i \operatorname{Re}[(C_{lm} - jS_{lm}) \cos m(\Omega - \theta) \\
 &\quad + (S_{lm} + jC_{lm}) \operatorname{sen} m(\Omega - \theta)] \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} j^s \operatorname{sen}^{l-m-2t+s}(\omega + f) \\
 &\quad \times \cos^{m-s}(\omega + f) \cos^s i,
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde k es la parte entera de $(l - m)/2$.

Aplicando (3.26) a (3.33), con $a = l - m - 2t + s$, y $b = m - s$,

$$\begin{aligned}
 V_{lm} &= \frac{\mu a_e^l}{r^{l+1}} \sum_{t=0}^k T_{lmt} \operatorname{sen}^{l-m-2t} i \operatorname{Re}[(C_{lm} - jS_{lm}) \cos m(\Omega - \theta) \\
 &\quad + (S_{lm} + jC_{lm}) \operatorname{sen} m(\Omega - \theta)] \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} j^s \cos^s i \frac{[-j]^{-m-2t+s}}{2^{l-2t}} \\
 &\quad \times \sum_{c=0}^{l-m-2t+s} \sum_{d=0}^{m-s} \binom{l-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{d} (-1)^c \\
 &\quad \times [\cos(l-2t-2c-2d)(\omega + f) + j \operatorname{sen}(l-2t-2c-2d)(\omega + f)].
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Sustituyendo (3.27) en los productos de $(\Omega - \theta)$ y $(\omega + f)$ de (3.34), y no tomando en cuenta todos aquellos términos que tengan como coeficiente a potencias impares de j (ya que V_{lm} es real, dicho término tiene otro término que lo cancela), tendremos

$$\begin{aligned}
 V_{lm} &= \frac{\mu a_e^l}{r^{l+1}} \sum_{t=0}^k T_{lmt} \operatorname{sen}^{l-m-2t} i (-1)^{k+t} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \frac{\cos^s i}{2^{l-2t}} \\
 &\quad \times \sum_{c=0}^{l-m-2t+s} \sum_{d=0}^{m-s} \binom{l-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{d} (-1)^c \\
 &\quad \times \left\{ \begin{array}{l} [C_{lm}]_{l-m \text{ par}}^{l-m} \\ [-S_{lm}]_{l-m \text{ impar}} \end{array} \cos[(l-2t-2c-2d)(\omega + f) + m(\Omega - \theta)] \right. \\
 &\quad \left. \times \begin{array}{l} [S_{lm}]_{l-m \text{ par}}^{l-m} \\ [C_{lm}]_{l-m \text{ impar}} \end{array} \operatorname{sen}[(l-2t-2c-2d)(\omega + f) + m(\Omega - \theta)] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Lo que deseamos hacer ahora es transformar (3.35) para que los términos del argumento $[(l - 2p)(\omega + f) + m(\Omega - \theta)]$ aparezcan juntos. El hecho de sustituir p por $(t + c + d)$ nos deja en la

necesidad de eliminar un subíndice de los factores. Así pues, sustituir $p-t-c$ por d parece lo más conveniente. Los límites de sumatoria de d nos proporcionan los límites sobre los posibles valores de c , que resultan ser simplemente aquellos que hacen los coeficientes del binomio distintos de cero. Adicionalmente, $t \leq p$.

Así pues la expresión V_{lm} se convierte en

$$V_{lm} = \frac{\mu a_e^l}{r^{l+1}} \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \left[\begin{array}{l} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{array} \right]_{l-m \text{ impar}}^{l-m \text{ par}} \cos[(l-2p)(\omega+f) + m(\Omega-\theta)] \\ + \left[\begin{array}{l} S_{lm} \\ C_{lm} \end{array} \right]_{l-m \text{ impar}}^{l-m \text{ par}} \text{sen}[(l-2p)(\omega+f) + m(\Omega-\theta)] \quad (3.36)$$

donde, sustituyendo de (2.25),

$$F_{lmp}(i) = \sum_t \frac{(2l-2t)!}{t!(l-t)!(l-m-2t)!2^{2l-2t}} \text{sen}^{l-m-2t} i \\ \times \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \cos^s i \sum_c \binom{l-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-k}. \quad (3.37)$$

Aquí k representa la parte entera de $(l-m)/2$, t corre desde 0 hasta el mínimo de p o k , y c corre para todos los valores para los cuales los coeficientes del binomio son distintos de cero. Una ecuación tal como (3.37) nos proporciona una tabla para expresiones de $F_{lmp}(i)$. En la tabla A del apéndice en la página 50 se muestran los valores de $F_{lmp}(i)$ hasta $lmp = 444$.

La transformación final necesaria para obtener una función perturbadora consistente con (3.12) es reemplazar r y f en (3.36) con a , M y e , para así obtener

$$\frac{1}{r^{l+1}} \left[\begin{array}{l} \cos \\ \text{sen} \end{array} \right] [(l-2p)(\omega+f) + m(\Omega-\theta)] = \frac{1}{a^{l+1}} \sum_q G_{lpq}(e) \left[\begin{array}{l} \cos \\ \text{sen} \end{array} \right] [(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega-\theta)].$$

Para poder obtener términos a períodos largos—aquellos términos para los cuales M no aparece—podemos promediar (3.36) respecto a M , i.e., podemos integrar respecto a M desde 0 hasta 2π y después dividir entre 2π . Entonces tendremos de (1.5), (1.13) y de (1.34),

$$dM = \frac{r^2 df}{a^2(1-e^2)^{1/2}}, \quad (3.38)$$

y de (1.10),

$$\frac{r^2}{r^{l+1}} = \left[\frac{(1+e \cos f)}{a(1-e^2)} \right]^{l-1}. \quad (3.39)$$

Desarrollando el binomio $(1 + e \cos f)^{l-1}$, aplicando (3.26), (3.27) y omitiendo términos imaginarios, obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{l+1}} \left[\begin{array}{c} \cos \\ \text{sen} \end{array} \right] [(l-2p)(\omega + f) + m(\Omega - \theta)] dM \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^{l+1}(1-e^2)^{l-(1/2)}} \sum_{b=0}^{l-1} \binom{l-1}{b} \left(\frac{e}{2}\right)^2 \\
 & \times \sum_{d=0}^b \binom{b}{d} \frac{1}{2} \left\{ \left[\begin{array}{c} \cos \\ \text{sen} \end{array} \right] [(l-2p)\omega + (l+b-2p-2d)f + m(\Omega - \theta)] \right. \\
 & \quad \left. + \left[\begin{array}{c} \cos \\ \text{sen} \end{array} \right] [(l-2p)\omega + (l-b-2p+2d)f + m(\Omega - \theta)] \right\} df \\
 &= \frac{1}{a^{l+1}} G_{lp(2p-l)}(e) \left[\begin{array}{c} \cos \\ \text{sen} \end{array} \right] [(l-2p)\omega + m(\Omega - \theta)],
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

donde

$$G_{lp(2p-l)}(e) = \frac{1}{(1-e^2)^{l-(1/2)}} \sum_{d=0}^{p'-1} \binom{l-1}{2d+l-2p'} \binom{2d+l-2p'}{d} \left(\frac{e}{2}\right)^{2d+l-2p'}, \tag{3.41}$$

para el cual

$$\begin{aligned}
 p' &= p \quad \text{para } p \leq l/2, \\
 p' &= l-p \quad \text{para } p \geq l/2;
 \end{aligned}$$

el factor “1/2” dentro de la sumatoria d de la ecuación (3.40) ha desaparecido ya que los dos términos que satisfacen la condición para variaciones de período largo $(l-2p) \pm (b-2d) = 0$, son coeficientes que aparecen de una manera simétrica en la expansión binomial, y por ende, se pueden combinar por medio de la sustitución de $(2d+l-2p')$ por b en (3.41).

Para los términos de período corto, $l-2p+q \neq 0$, solo se muestra una solución del desarrollo de $G_{lpq}(e)$:

$$G_{lpq}(e) = (-1)^{|q|} (1 + \beta^2)^l \beta^{|q|} \sum_{k=0}^{\infty} P_{lpqk} Q_{lpqk} \beta^{2k}, \tag{3.42}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}; \\
 P_{lpqk} &= \sum_{r=0}^h \binom{2p'-2l}{h-r} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{(l-2p'+q')e}{2\beta} \right)^r, \\
 h &= k + q', \quad q' > 0; \quad h = k, \quad q' < 0;
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

y

$$Q_{lpqk} = \sum_{r=0}^h \binom{-2p'}{h-r} \frac{1}{r!} \left(\frac{(l-2p'+q')e}{2\beta} \right)^r,$$

$$h = k, \quad q' > 0; \quad h = k - q', \quad q' < 0;$$

$$p' = p, \quad q' = q \text{ para } p \leq l/2;$$

$$p' = l - p, \quad q' = -q \text{ para } p > l/2.$$
(3.44)

Las expresiones para $G_{lpq}(e)$ hasta $lpq = 442$ están dadas en la tabla B del apéndice en la página 52.

Así pues, el resultado final de la transformación de V_{lm} en coordenadas esféricas, (3.28), hacia coordenadas orbitales se puede expresar como

$$V_{lm} = \frac{\mu a_e^l}{a^{l+1}} \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) S_{lmpq}(\omega, M, \Omega, \theta),$$
(3.45)

donde

$$S_{lmpq} = \begin{cases} C_{lm}^{l-m \text{ par}} \\ -S_{lm}^{l-m \text{ impar}} \end{cases} \cos[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta)]$$

$$+ \begin{cases} S_{lm}^{l-m \text{ par}} \\ C_{lm}^{l-m \text{ impar}} \end{cases} \cos[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta)].$$
(3.46)

3.3. Perturbaciones Lineales

El término del campo gravitacional que domina a la función perturbadora R es V_{20} , ya que C_{20} (o J_2) es al menos 100 veces más grande que cualquier otro C_{lm} . Así pues

$$V_{20} = \frac{\mu C_{20}}{a} \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \sum_{pq} F_{20p}(i) G_{2pq}(e) \cos[(2-2p)\omega + (2-2p+q)M]$$
(3.47)

con a_e el radio ecuatorial medio.

Asumiendo que los coeficientes de V_{20} son aproximadamente del mismo orden de magnitud, deberíamos esperar que los términos de (3.47) que no contengan a M —pues $(2-2p+q)$ es cero—sean de un efecto apreciablemente mayor después de la integración en comparación a aquellos que si contengan a M , ya que estos últimos harán un ciclo completo en el tiempo (relativamente corto) que le toma al satélite dar una revolución completa. El límite de la sumatoria en (3.41)

indica que los términos con superíndices (p, q) de $(0, -2)$ y $(2, 2)$ no existen, así pues el único término de V_{20} en el cual no aparece M es

$$V_{2010} = \frac{\mu C_{20}}{a} \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 F_{201}(i) G_{201}(e). \quad (3.48)$$

Evalutando F_{201} con (3.37), G_{201} con (3.41), y utilizando $\frac{\mu}{a} + V_{2010}$ como F en las ecuaciones Lagrangianas de (3.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0, \\ \frac{de}{dt} &= 0, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\mu C_{20} a_e^2}{n(1-e^2)^{1/2} a^5} \left[-\cot i \frac{\partial F_{201}}{\partial i} G_{201} + \frac{(1-e^2)}{e} F_{201} \frac{\partial G_{210}}{\partial e} \right], \\ &= \frac{3n C_{20} a_e^2}{4(1-e^2)^2 a^2} [1 - 5 \cos^2 i], \\ \frac{di}{dt} &= 0, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\mu C_{20} a_e^2 G_{210}}{n(1-e^2)^{1/2} a^5 \sin i} \cdot \frac{\partial F_{201}}{\partial i}, \\ &= \frac{3n C_{20} a_e^2}{2(1-e^2)^2 a^2} \cos i, \\ \frac{dM}{dt} &= n + \frac{\mu C_{20} a_e^2 F_{201}}{n a^5} \left[-\frac{1-e^2}{e} \cdot \frac{\partial G_{210}}{\partial e} + 6G_{210} \right]. \\ &= n - \frac{3n C_{20} a_e^2}{4(1-e^2)^{3/2} a^2} (3 \cos^2 i - 1). \end{aligned} \quad (3.49)$$

El valor de C_{20} es de -0.0010827; si tomamos los valores de $e = 0.01$ y $a = 1.12a_e$ que son los típicos de un satélite geodésico, las ecuaciones anteriores quedan

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &\approx +3.55(5 \cos^2 i - 1) \text{ grados/día}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &\approx -6.70 \cos i \text{ grados/día}, \\ \frac{dM}{dt} &\approx 14.37 + 0.0093(3 \cos^2 i - 1) \text{ revoluciones/día}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Es un hecho observado que los movimientos seculares tales como los de (3.50) son las perturbaciones predominantes de los satélites geodésicos—esto es, los que se encuentran a una altura

suficiente para no sentir en exceso el arrastre causado por la atmósfera, pero lo suficientemente bajos como para ser perceptiblemente perturbados por las variaciones del campo gravitacional.

En este capítulo las ideas de las secciones previas fueron utilizadas para crear las variables de ángulo-acción para el problema de Kepler (el problema de fuerza central con la ley de atracción del inverso cuadrado). Éstas variables se conocen como *variables de Delaunay*, llamadas así en honor al astrónomo francés del siglo XIX quien utilizó estos elementos para desarrollar su teoría del movimiento de la Luna. Los elementos o variables de Delaunay son válidas únicamente en el dominio del espacio fase para órbitas elípticas en el problema de Kepler. El caso en el que las órbitas se encuentran en la vecindad de las órbitas circulares, los elementos de Delaunay pasan a ser los *elementos de Poincaré*.

También se llevaron a cabo las transformaciones necesarias para describir el potencial en términos de los elementos Keplerianos y para poder obtener las expresiones de dicho potencial a períodos largos, en términos de las funciones $F_{lmp}(i)$, y en términos de las funciones $G_{lpq}(e)$. Obtuvimos además las ecuaciones de movimiento para un satélite de órbita baja que se encuentra bajo la influencia del potencial gravitacional V_{2010} .

Conclusiones | *Conclusiones*

El propósito de este trabajo ha sido desarrollar la teoría de órbitas satelitales bajas en el contexto de un tratamiento geodético, esto es, describir un fenómeno particular conectado con el campo gravitacional no uniforme terrestre. Así pues, este trabajo no ha sido una discusión completa del tema de los satélites de órbitas bajas, sino que se ha enfatizado en los aspectos de interés peculiares a la geodesia, tales como el desarrollo de la función perturbadora para las variaciones armónico esféricas en el campo gravitacional.

Se ha desarrollado la teoría del movimiento de un satélite artificial en el campo gravitacional terrestre, sin una referencia específica a algún observador. La única geometría introducida ha sido la necesaria para llevar a cabo las transformaciones del potencial y para estudiar la dinámica de la órbita.

Se convirtió el potencial dado en (2.27)

$$V = \sum_{lmi} \frac{1}{r^{l+1}} S_{lmi} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{l+1}} P_{lm}(\sin \phi) [C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda],$$

a elementos Keplerianos utilizando identidades trigonométricas en superficies esféricas en las cuales se hacen los cambios de variables necesarios ($\lambda \rightarrow (\alpha - \Omega) + (\Omega - \theta)$) con α la ascensión recta y θ el GST, los cuales se obtienen del triángulo esférico formado por la órbita, el ecuador y el meridiano del satélite.

Se obtuvo el potencial perturbador V_{lm} en términos de las funciones $F_{lmp}(i)$ y se llevó a cabo una transformación final necesaria, para así obtener una función perturbadora consistente con las seis ecuaciones simultáneas para los elementos ds_k/dt . Promediamos al elemento M para poder obtener términos a períodos largos y el resultado final de la transformación del potencial V_{lm} en coordenadas orbitales en término de las funciones $G_{lpq}(e)$.

Se obtuvieron las ecuaciones seculares para el movimiento de los satélites geodésicos bajo la influencia del potencial

$$V_{2010} = \frac{\mu C_{20}}{a} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 F_{201}(i) G_{201}(e),$$

en función de los parámetros de los mismos, las cuales concuerdan con las observaciones.

A futuro se planea expandir las ideas tratadas en este trabajo a satélites geoestacionarios (y geosíncronos), incluir perturbaciones del tipo de presión de radiación y utilizar la teoría tratada en este trabajo para desarrollar un software, el cual tendrá como objetivo la determinación de órbitas de satélites, en función de datos de azimut, elevación y rango; así como el cálculo de las maniobras necesarias para contrarrestar las perturbaciones que inciden sobre los satélites, para poder llevar a cabo la propagación de efemérides (las cuales contendrán las perturbaciones naturales y las que surgen debido al acoplamiento de las maniobras) que son las estimaciones de la trayectoria del satélite.

Apéndice A

Funciones de Inclinación

$F_{lmp}(i)$

Tabla A.1: Funciones inclinación $F_{lmp}(i)$ a partir de (3.37)

l	m	p	$F_{lmp}(i)$
2	0	0	$-3 \operatorname{sen}^2 i/8$
2	0	1	$3 \operatorname{sen}^2 i/4 - 1/2$
2	0	2	$-3 \operatorname{sen}^2 i/8$
2	1	0	$3 \operatorname{sen} i(1 + \cos i)/4$
2	1	1	$-3 \operatorname{sen} i \cos i/2$
2	1	2	$-3 \operatorname{sen} i(1 - \cos i)/4$
2	0	0	$3(1 + \cos i)^2/4$
2	2	1	$3 \operatorname{sen}^2 i/2$
2	2	2	$3(1 - \cos i)^2/4$
3	0	0	$-5 \operatorname{sen}^3 i/16$
3	0	1	$15 \operatorname{sen}^3 i/16 - 3 \operatorname{sen} i/4$
3	0	2	$-15 \operatorname{sen}^3 i/16 + 3 \operatorname{sen} i/4$
3	0	3	$5 \operatorname{sen}^3 i/16$
3	1	0	$-15 \operatorname{sen}^2 i(1 + \cos i)/16$
3	1	1	$15 \operatorname{sen}^2 i(1 + 3 \cos i)/16 - 3(1 + \cos i)/4$
3	1	2	$15 \operatorname{sen}^2 i(1 - 3 \cos i)/16 - 3(1 - \cos i)/4$
3	1	3	$-15 \operatorname{sen}^2 i(1 - \cos i)/16$
3	2	0	$15 \operatorname{sen} i(1 + \cos i)^2/8$
3	2	1	$15 \operatorname{sen} i(1 - 2 \cos i - 3 \cos^2 i)/8$
3	2	2	$-15 \operatorname{sen} i(1 + 2 \cos i - 3 \cos^2 i)/8$
3	2	3	$-15 \operatorname{sen} i(1 - \cos i)^2/8$

3	3	0	$15(1 + \cos i)^3/8$
3	3	1	$45 \operatorname{sen}^2 i(1 + \cos i)/8$
3	3	2	$45 \operatorname{sen}^2 i(1 - \cos i)/8$
3	3	3	$15(1 - \cos i)^3/8$
4	0	0	$35 \operatorname{sen}^4 i/128$
4	0	1	$-35 \operatorname{sen}^4 i/32 + \operatorname{sen}^2 i/16$
4	0	2	$(105/64) \operatorname{sen}^4 i - (15/8) \operatorname{sen}^2 i + 3/8$
4	0	3	$-(35/32) \operatorname{sen}^4 i + (15/16) \operatorname{sen}^2 i$
4	0	4	$(35/128) \operatorname{sen}^4 i$
4	1	0	$-(35/32) \operatorname{sen}^3 i(1 + \cos i)$
4	1	1	$(35/16) \operatorname{sen}^3 i(1 + 2 \cos i) - (15/8)(1 + \cos i) \operatorname{sen} i$
4	1	2	$\cos i(15 \operatorname{sen} i/4 - 105 \operatorname{sen}^3 i/16)$
4	1	3	$-(35/16) \operatorname{sen}^3 i(1 - 2 \cos i) + (15/8) \operatorname{sen} i(1 - \cos i)$
4	1	4	$(35/32) \operatorname{sen}^3 i(1 - \cos i)$
4	2	0	$-(105/32) \operatorname{sen} i(1 + \cos i)^2$
4	2	1	$(105/8) \operatorname{sen}^2 i \cos i(1 + \cos i) - (15/8)(1 + \cos i)^2$
4	2	2	$(105/16) \operatorname{sen}^2 i(1 - 3 \cos^2 i) + (15/4) \operatorname{sen}^2 i$
4	2	3	$-(105/8) \operatorname{sen}^2 i \cos i(1 - \cos i) - (15/8)(1 - \cos i)^2$
4	2	4	$-(105/32) \operatorname{sen}^2 i(1 - \cos i)^2$
4	3	0	$(105/16) \operatorname{sen} i(1 + \cos i)^3$
4	3	1	$(105/8) \operatorname{sen} i(1 - 3 \cos^2 i - 2 \cos^3 i)$
4	3	2	$-(315/8) \operatorname{sen}^3 i \cos i$
4	3	3	$-(105/8) \operatorname{sen} i(1 - 3 \cos^2 i + 2 \cos^3 i)$
4	3	4	$-(105/16) \operatorname{sen} i(1 - \cos i)^3$
4	4	0	$(105/16)(1 + \cos i)^4$
4	4	1	$(105/4) \operatorname{sen}^2 i(1 + \cos i)^2$
4	4	2	$(315/8) \operatorname{sen}^4 i$
4	4	3	$(105/4) \operatorname{sen}^2 i(1 - \cos i)^2$
4	4	4	$(105/16)(1 - \cos i)^4$

Apéndice B

Funciones de excentricidad $G_{lpq}(i)$

Tabla B.1: Funciones de excentricidad $G_{lpq}(e)$ a partir de (3.41)

l	p	q	l	p	q	$G_{lpq}(e)$
2	0	-2	2	2	2	0
2	0	-1	2	2	1	$-e/2 + e^3/16 + \dots$
2	0	0	2	2	0	$1 - 5e^2/2 + 13e^4/16 + \dots$
2	0	1	2	2	-1	$7e/2 - 123e^3/16 + \dots$
2	0	2	2	2	-2	$17e^2/2 - 115e^4/6 + \dots$
2	1	-2	2	1	2	$9e^2/4 + 7e^4/4 + \dots$
2	1	-1	2	1	1	$3e/2 + 27e^3/16 + \dots$
			2	1	0	$(1 - e^2)^{-3/2}$
3	0	-2	3	3	2	$e^2/8 + e^4/48 + \dots$
3	0	-1	3	3	1	$-e + 5e^3/4 + \dots$
3	0	0	3	3	0	$1 - 6e^2 + 423e^4/64 + \dots$
3	0	1	3	3	-1	$5e - 22e^3 + \dots$
3	0	2	3	3	-2	$127e^2/8 - 3065e^4/48 + \dots$
3	1	-2	3	2	2	$11e^2/8 + 49e^4/16 + \dots$
3	1	-1	3	2	1	$e(1 - e^2)^{-5/2} + \dots$
3	1	0	3	2	0	$1 + 2e^2 + 239e^4/64 + \dots$
3	1	1	3	2	-1	$3e + 11e^3/4 + \dots$
3	1	2	3	2	-2	$53e^2/8 + 39e^4/16 + \dots$
4	0	-2	4	4	2	$e^2 - e^4/3 + \dots$
4	0	-1	4	4	1	$-3e/2 + 75e^3/16 + \dots$
4	0	0	4	4	0	$1 - 11e^2 + 199e^4/8 + \dots$

4	0	1	4	4	-1	$13e/2 - 765e^3/16 + \dots$
4	0	2	4	4	-2	$51e^2/2 - 321e^4/2 + \dots$
4	1	-2	4	3	2	$(3e^2/4)(1 - e^2)^{-7/2} + \dots$
4	1	-1	4	3	1	$e/2 + 33e^2/16 + \dots$
4	1	0	4	3	0	$1 + e^2 + 65e^4/16 + \dots$
4	1	1	4	3	-1	$9e/2 - 3e^3/16 + \dots$
4	1	2	4	3	-2	$53e^2/4 - 179e^4/24 + \dots$
4	1	0	4	3	0	$1 + e^2 + 65e^4/16 + \dots$
4	1	1	4	3	-1	$9e/2 - 3e^3/16 + \dots$
4	1	2	4	3	-2	$53e^2/4 - 179e^4/24 + \dots$
4	2	-2	4	2	2	$5e^2 + 155e^4/12 + \dots$
4	2	-1	4	2	1	$5e/2 + 135e^3/16 + \dots$
			4	2	0	$(1 + 3e^2/2)(1 - e^2)^{-7/2} + \dots$

Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York; (1965).
- [2] Anderle, R. J. *Observations of Resonance Effects on Satellite Orbits*. J. Geophys. Res. 70, 4613 (1965).
- [3] Brouwer, D. *Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag*. Astronomical J. 64, 378 (1959)
- [4] Brouwer, D. and Clemence, G. *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press; (1961)
- [5] Butkov, E. *Mathematical Physics*. Facsímil (1968)
- [6] Cain, F. *How many Satellites are in Space?*. Universe Today; (2013).
- [7] Danby, J. M. A. *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Willmann-Bell; (1988)
- [8] Hajiyev, C. and Ata M. *Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*. Dover; (1960)
- [9] King-Hele, D. G. and Cook G. E. *The Even Zonal Harmonics of the Earth's Gravitational Potential*. Geophysical J. 10, 17 (1965).
- [10] Kozai, Y. *Notes on the Motion of a Close Earth Satellite with Small Eccentricity*. Astronomical J. 66, 132 (1961)
- [11] Moulton, F. R. *Celestial Mechanics*. MacMillan; (1914)
- [12] Peat, C. *ISS-Orbit*. Heavens Above; Retrieved January; (2015).
- [13] Plummer, H. C. *Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*. Dover; (1960)

-
- [14] Rising, D. *Satellite hits Atlantic-but what about the next one?*. Seattle Times; (2013).
- [15] Szebehely, V. G. *Adventures in Celestial Mechanics*. John Wiley & Sons; (1998)
- [16] Whittaker, E. T. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge Mathematical Library; (1989)
- [17] UCS Satellite Database, Union of Concerned Scientists *UCS Satellite Database*. Retrieved 2013-11-12.