



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

---

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Formas Normales y Bifurcaciones de Ciclos Límite en  
Sistemas Lineales por Pedazos Discontinuos

## T E S I S

Que para obtener el grado de:

**Doctor en Ciencias**  
(Matemáticas)

Presenta:

M.C. Juan Andres Castillo Valenzuela

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México,      13 de Febrero del 2017

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



## SINODALES

Dr. Fernando Verduzco González  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Baltazar Aguirre Hernández  
Universidad Autónoma Metropolitana, Ciudad de México.

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez  
IPICYT, San Luis Potosí, México.

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Horacio Leyva Castellanos  
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

# Dedicatoria

---

*A la memoria de mi Mamá, María del Rosario Valenzuela Ayala “Chalita”*  
1960-2014  
ASNF



# Agradecimientos

---

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haber financiado mis estudios Doctorales mediante la beca 320218 y también mediante apoyos del proyecto cb-2012/180266. A nuestra alma máter, la Universidad de Sonora y todas sus instancias desde el Posgrado en Matemáticas, Departamento de Matemáticas y la División de Ciencias Exactas y Naturales.

A mi Director de tesis, el Profesor, amigo y futuro colega Dr. Fernando Verduzco por prácticamente haberme formado como Matemático, desde mis estudios de Licenciatura hasta estas instancias; por acompañarme en el camino de desentrañar los secretos de este nuevo mundo llamado “la tierra no-suave”. Al Dr. Ricardo Femat del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT) por habernos mostrado una nueva dirección dentro de la investigación de los sistemas dinámicos.

A los Profesores de este Departamento, Dr. Armando Carrillo y Dr. Horacio Leyva por haberse dado el tiempo de revisar detalladamente este trabajo. A los sinodales externos Dr. Baltazar Aguirre de la Universidad Autónoma Metropolitana y Dr. Gonzalo Barajas del IPICYT por sus valiosos comentarios. Al Dr. Jaume Llibre de la Universidad Autónoma de Barcelona por haber colaborado en parte de la investigación reportada en este trabajo. Al Profesor Enrique Comer del Instituto Tecnológico de Tijuana por haber apoyado con la elaboración del software para visualizar la dinámica de los sistemas por pedazos.

Finalmente quiero agradecer a mi esposa Esmeralda y a mi hijo Oscar por su amor, apoyo, paciencia y comprensión en estos últimos años, ésta meta cumplida es por y para ustedes.



# Índice general

---

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Resultados Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Clasificación de equilibrios y singularidades . . . . .	1
1.2. Equivalencia topológica y bifurcaciones . . . . .	5
<b>2. Formas normales para SLPPD</b>	<b>11</b>
2.1. Existencia de puntos de doble-tangencia . . . . .	11
2.2. Forma normal en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	15
2.3. Forma normal en $\mathbb{R}^3$ para el caso con único punto de doble-tangencia . . . . .	21
2.4. Forma normal en $\mathbb{R}^3$ para el caso sin puntos de doble-tangencia . . . . .	26
<b>3. Bifurcación pseudo-Hopf</b>	<b>33</b>
3.1. Caso bidimensional . . . . .	33
3.2. Caso tridimensional . . . . .	46
3.3. Bifurcación pseudo-Hopf en sistemas en $\mathbb{R}^3$ sin puntos de doble-tangencia. . . . .	47
3.4. Bifurcación pseudo-Hopf en sistemas en $\mathbb{R}^3$ con un único punto de doble-tangencia. . . . .	52
3.5. Unicidad del ciclo límite para ambos casos en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	59
<b>4. Bifurcación de Hopf en los campos deslizantes</b>	<b>61</b>
4.1. Bifurcación de Hopf en el caso con un único punto de doble-tangencia . . . . .	61
4.2. Bifurcación de Hopf en el caso sin puntos de doble-tangencia . . . . .	68

<b>5. Bifurcaciones globales</b>	<b>73</b>
5.1. Conexiones globales . . . . .	73
5.2. Bifurcaciones globales: Un caso de estudio . . . . .	77
<b>6. Conclusiones</b>	<b>83</b>
6.1. Problemas abiertos . . . . .	84
6.2. Eventos . . . . .	84
6.3. Artículos de Investigación . . . . .	85
<b>A. Teoremas básicos</b>	<b>87</b>

# Resumen

---

El estudio de ciclos límite es uno de los problemas más importantes en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias y existen varios mecanismos para encontrarlos. Uno de ellos es cuando un segmento deslizante cambia de estabilidad, el cual se conoce ahora como la bifurcación pseudo-Hopf. En este trabajo, bajo condiciones genéricas, encontramos un desdoblamiento para tal bifurcación en sistemas lineales por pedazos discontinuos en dos dimensiones y probamos la existencia y unicidad de un ciclo límite de cruce para esta familia. En tres dimensiones mostramos la ocurrencia de tal fenómeno en un caso de estudio, aprovechando la presencia de planos invariantes los cuales funcionan de alguna forma como el análogo de la variedad central para sistemas suaves. Más aún, aprovechando el hecho de que las formas normales de este trabajo permiten un análisis más sencillo, podemos hacer un estudio de otras bifurcaciones que son propias de los sistemas discontinuos como las bifurcaciones deslizantes. Así, podemos estudiar no sólo la generación de ciclos límite mediante la bifurcación pseudo-Hopf, podemos estudiar otros mecanismos como las bifurcaciones globales.



# Abstract

---

The study of limit cycles is one of the most important problem in the qualitative theory of ordinary differential equations, and there are several mechanisms to find them. One of these is when a sliding segment changes its stability, which is known as pseudo-Hopf bifurcation. In this work, under generic conditions, we find an unfolding for such bifurcation in two-dimensional discontinuous piecewise linear systems, and we prove the existence and uniqueness of a crossing limit cycle for this family. In three dimensions we show the occurrence of such phenomenon in a study case, taking advantage of the presence of invariant planes which are in somehow the analog of the central manifold for smooth systems. In addition, taking advantage of the fact that the normal forms of this work allow a simpler analysis, we can make a study of other inherent bifurcations of discontinuos systems such the case of sliding bifurcations. Thus, we can not only study the generation of limit cycles by the pseudo-Hopf bifurcation, we can study other mechanisms like global bifurcations.



# Introducción

---

Los sistemas de ecuaciones diferenciales discontinuos aparecen de manera natural como modelos de procesos en los cuales el comportamiento dinámico puede cambiar abruptamente con el estado del sistema. Tales cambios abruptos se pueden modelar como discontinuidades. Algunas de las preguntas más importantes son ¿qué sucede en la discontinuidad?, ¿cómo se relacionan las dinámicas en las distintas regiones?, si una órbita alcanza la discontinuidad, ¿cómo se puede continuar?. A pesar de que el estudio de sistemas discontinuos empezó a principios de la década de 1930 con los trabajos de Andronov [4, 5], Kulebakin [60] y Nikolsky [84], fué hasta finales de la década de 1980 cuando se pudieron responder tales preguntas de manera sistemática por Aleksei Filippov [36], quién definió formalmente la dinámica de los sistemas discontinuos y allanó el camino para su posterior investigación. Tales sistemas son ahora llamados sistemas Filippov o sistemas suaves por pedazos (SSPP) discontinuos. Observemos que las soluciones de los sistemas Filippov son aún continuas incluso cuando éstas alcanzan una frontera de discontinuidad, donde los campos vectoriales se vuelven discontinuos. Ahora bien, la pérdida de continuidad en el sistema de ecuaciones diferenciales nos agrega más riqueza en la geometría del espacio de fase, es decir, en los sistemas Filippov se puede presentar un fenómeno que no puede ocurrir en los sistemas suaves, el llamado movimiento deslizante, el cual ocurre en la frontera de discontinuidad.

Muchos investigadores han seguido a Filippov y han continuado el estudio sobre sistemas discontinuos intentando comprender sus dinámicas, singularidades y bifurcaciones. En las últimas décadas se ha incrementado el interés en estudiar este tipo de sistemas y en parte es por la gran cantidad de fenómenos físicos y biológicos en los cuales se presentan, por ejemplo en la ingeniería, la ecología y la teoría de control, ver [10, 30, 32, 46, 61, 64, 78, 93, 96]. Desde un punto de vista puramente matemático, hubo esfuerzos paralelos para clasificar adecuadamente las singularidades y bifurcaciones en términos de sus propiedades cualitativas. Tales esfuerzos fueron encabezados por M.A. Teixeira en [98, 99], y en los últimos años se ha logrado tener un mayor entendimiento y extender a dimensiones más altas, ver [23, 25, 53]. En éstos trabajos podemos ver que la ocurrencia del movimiento deslizante en un SSPP discontinuo va de la mano con la presencia de un punto en el cual se indetermina el sistema, la *singularidad de doble-tangencia* (*two-fold singularity* en inglés).

En esta tesis nos limitaremos a estudiar los SSPP discontinuos en el caso más simple, esto es, sistemas lineales por pedazos discontinuos (SLPPD) con dos zonas, separadas por una recta en el caso bidimensional y por un plano en el caso tridimensional. Nuestra motivación para investigar éste tipo de sistemas se basa en el hecho de que los SLPPD resultan ser suficientes

para que ocurra todo tipo de dinámica, esto es, la linealidad por pedazos permite obtener un comportamiento topológicamente equivalente a los sistemas suaves no lineales (SSNL), siendo capaces de presentar una amplia gama de fenómenos característicos de los SSNL, tales como ciclos límite, órbitas homoclínicas y heteroclínicas, e inclusive atractores extraños. Ahora bien, como en los SLPPD se puede presentar movimiento deslizante en el segmento (región) de la recta (plano) de conmutación, aunado a todos los fenómenos antes mencionados, también se pueden presentar bifurcaciones propias de los SLPPD. Ejemplos de este tipo de bifurcaciones son las llamadas *bifurcaciones inducidas por la frontera de discontinuidad* (*discontinuity-induced bifurcations* en inglés).

En particular, el estudio de ciclos límite es uno de los problemas más importantes en la teoría cualitativa de los sistemas de ecuaciones diferenciales, sin embargo, la demostración de su existencia generalmente es muy complicada. En años recientes, se puede encontrar un gran número de artículos en la literatura acerca del surgimiento de ciclos límite en SSPP en el plano, y en éstos aparecen muchas técnicas para encontrarlos. En SSNL existe un mecanismo muy conocido para buscar la ocurrencia de ciclos límite, el Teorema de la bifurcación de Hopf, ver [48, 63]. Existen resultados análogos para SSPP, para el caso de los continuos ver por ejemplo [37, 65, 91, 92, 105, 106], y para el caso de los discontinuos ver [3, 40, 43, 47, 49, 62]. En los SSPP discontinuos los ciclos límite se clasifican en ciclos límite de cruce y ciclos límite deslizantes, dependiendo de si parte del ciclo es un segmento deslizante. En tres dimensiones se puede presentar la situación de que el ciclo límite quede totalmente contenido en el plano de conmutación. En tal caso, la aparición del ciclo límite se puede buscar con la herramienta existente para sistemas suaves, ya que el problema se vuelve bidimensional. En el caso de los ciclos límite de cruce, su aparición puede darse al menos de tres maneras: una debido al cambio de estabilidad de un situado de un lado de la recta o plano de conmutación (ver [42, 88]), otra debido a la perturbación de una órbita homoclínica de cruce (ver [75, 104]) y la tercera y no menos trivial es la que se da debido al cambio de estabilidad de un segmento deslizante (ver [62]). A nuestro juicio la tercera es la más interesante, ya que la aparición del ciclo límite de cruce no depende de la existencia de equilibrios fuera de la conmutación, sólo se necesita la colisión de dos puntos de tangencia invisibles.

En los SSPP discontinuos podemos tener más de un ciclo límite, ya sea sólo ciclos límite de cruce o incluyendo un ciclo límite deslizante, y de hecho el determinar el número de ciclos límite en SLPP en el plano ha sido el objeto de muchos trabajos recientes. Primeramente, Lum y Chua [77] conjeturaron que un SLPP continuo en el plano con dos zonas tenía a lo más un ciclo límite. Esta conjetura fué probada posteriormente por E. Freire et. al. en [38]. Han y Zhang [49] propusieron SLPPD en los escenarios foco-foco, foco-nodo, y nodo-nodo, y conjeturaron que el máximo número de ciclos límite para ésta clase de sistemas discontinuos era exactamene dos. Artés et. al. [7] mostraron que el escenario silla-silla también podía exhibir dos ciclos límite. J. Llibre et. al. [74] mostraron que en los casos foco-silla y nodo-silla había sistemas discontinuos presentando dos ciclos límite. Huan y Yang [50] proporcionaron una fuerte evidencia numérica sobre la existencia de tres ciclos límite en el caso foco-foco. Llibre y Ponce [72] dieron la demostración de la existencia de los tres ciclos límite. Buzzi et. al. [12], con diferentes técnicas, también obtuvieron tres ciclos límite. Freire et. al. [41] mostraron que la existencia de un foco en una zona es suficiente para tener tres ciclo límite, independientemente

de la dinámica en la otra zona. Finalmente Euzebio y Llibre en [34] demostraron que el número máximo de ciclos límite en un SLPPD con dos zonas es cuatro. Hasta el momento ésa es la cota máxima y el único requisito para la existencia de los cuatro ciclos límite es que el sistema tenga un foco en la recta de discontinuidad. Para ver investigaciones paralelas e intermedias al breve recuento anterior podemos citar también [51, 52, 73, 75, 79] y [68] a [71].

Cuando se considera la aparición de más de un ciclo límite, frecuentemente el mecanismo para obtenerlo es como se mencionó anteriormente, mediante la colisión de dos *puntos de tangencia invisibles*. Esto es, la creación o destrucción de un ciclo límite de cruce ocurre cuando un segmento deslizante cambia de estabilidad justo después de colapsar en la singularidad de doble-tangencia, éste fenómeno se presenta sin demostración en [62] y es llamado *bifurcación pseudo-Hopf*. En esta tesis consideramos una única forma normal para la *bifurcación pseudo-Hopf*, y mostramos que es posible desdoblar la bifurcación de tres tipos de puntos de doble-tangencia. El primer escenario es el de la *singularidad doble-tangencia invisible*, al igual que en [62], pero a diferencia de éste manuscrito, en el cual sólo se considera el caso con ambos campos sin equilibrios, aquí probamos la existencia y unicidad del ciclo límite de cruce en todas las configuraciones posibles de equilibrios: *silla-silla*, *foco-foco*, *nodo-nodo*, *silla-foco*, *silla-nodo*, *foco-nodo* y el caso sin equilibrios. El segundo escenario es aquel con un punto que es de tangencia invisible de un lado de la recta de conmutación y es un equilibrio frontera tipo foco del otro lado, esto es, la *singularidad tangencia-foco o singularidad foco-tangencia (fold-focus o focus-fold en inglés)* dependiendo del lado en el que esté definido el equilibrio, ver [43, 47]. Finalmente, el tercer escenario es el de la *singularidad foco-foco*, esto es, de dos equilibrios frontera tipo foco en el mismo punto de la recta de conmutación, ver [85]. De esta manera la forma normal que exhibimos permite unificar todas las formas en las que se obtuvo un ciclo límite de cruce debido al cambio de estabilidad de un segmento deslizante. A nuestro conocimiento, en éste trabajo es la primera vez que se presenta el desdoblamiento de la *bifurcación pseudo-Hopf*, ya que en la mayoría los artículos mencionados previamente el objetivo siempre fué determinar el número de ciclos límite.

El problema de encontrar ciclos límite en SSPP en tres dimensiones se vuelve mucho más complicado. Existen pocos trabajos en los que se demuestra la existencia de ciclos límite, y en ellos por lo regular se trata el caso de SSPP continuos o discontinuos pero con campos no-lineales, ver [16, 17, 39, 89, 101, 102]. En [23, 24, 53] los autores hablan sobre la creación de un ciclo límite de cruce cuando un pseudo-equilibrio<sup>1</sup> atraviesa la singularidad de doble-tangencia. En el tránsito a través de la singularidad, el pseudo-equilibrio pasa de ser un pseudo-nodo en la región de deslizamiento a ser una pseudo-silla en la región de escape. De hecho en [24] los autores dan una demostración formal de la existencia de un ciclo límite de cruce inestable, pero tanto en éste trabajo como en los otros no es el objetivo mostrar la ocurrencia de la bifurcación pseudo-Hopf. Como se verá en esta tesis, no es necesario pedir que la singularidad de doble-tangencia sea del tipo invisible-invisible para que nazca el ciclo límite, sólo que los campos sean antiparalelos en la singularidad al momento del tránsito del pseudo-equilibrio a través de ella.

Otro problema interesante de abordar es el de las conexiones globales. Recientemente en [18, 19, 70] se dieron demostraciones analíticas sobre la existencia de conexiones globales en

<sup>1</sup>Término introducido por M. Gatto et. al en [44]

un SLPP continuo, sin embargo la mayoría de la evidencia existente en la Literatura sobre conexiones globales es mediante métodos numéricos y casi siempre considerando SSPP continuos [6, 20, 26, 80, 81]. En esta tesis mostramos familias de SLPPD que presentan conexiones globales, las cuales encontramos aprovechando las formas normales que obtenemos para este tipo de sistemas. Vemos que a diferencia de los sistemas suaves, en los cuales es muy difícil encontrar conexiones globales sobretodo porque existen muy pocos métodos, en los SLPPD es muy fácil construir órbitas homoclínicas y heteroclínicas con un tratamiento puramente geométrico. Una pregunta natural es, ¿qué pasa si se perturba una órbita homoclínica?, ¿se creará un ciclo límite de cruce?. En el caso tridimensional es muy complicado establecer la ubicación de la perturbación tal que rompa la órbita homoclínica y provoque un ciclo límite de cruce. Para tratar de facilitar éste problema consideraremos una familia con dos parámetros y un plano invariante, tal que la dinámica sobre él esté dada por un SLPP en dos dimensiones en el cual es muy fácil establecer el lugar de la perturbación para obtener la bifurcación deseada. Así, estaremos dando otro mecanismo para obtener ciclos límite de cruce, en éste caso será debido al rompimiento de una órbita homoclínica. Dentro de la misma familia veremos también que la creación de un ciclo límite de cruce se da debido a la persistencia y transición de un ciclo límite deslizante. Los dos mecanismos previamente mencionados están dentro de las bifurcaciones globales que se proponen para el caso de dos dimensiones en [62].

No podemos dejar de mencionar el problema que más apasiona en la comunidad de sistemas dinámicos en las últimas décadas, nos referimos a la generación de caos. Recientemente en [94] se demostró formalmente que un SLPP continuo en tres dimensiones es capaz de generar un atractor extraño tipo Rossler, cuando un equilibrio estable colisiona con el plano de conmutación. En el caso de los SLPPD aún no se han mostrado mecanismos formales que demuestren la generación de caos, pero existe mucha evidencia numérica sobre la capacidad que éstos tienen para desplegar atractores extraños más complicados, tal es el caso de los atractores multi-rollo, ver [13, 14, 15, 83]. Aunque en esta tesis no se abordará el tema de los atractores extraños, el análisis que se realiza mediante formas normales nos puede dar luz para en un futuro establecer un mecanismo que detone la generación de éstos atractores.

El resto de la tesis se organiza como sigue. En el capítulo 1 se definen los conceptos y resultados sobre sistemas por pedazos discontinuos en los cuales se guiará el análisis y desarrollo del trabajo que presentamos en los capítulos subsecuentes. En el capítulo 2 presentamos las formas normales que permiten simplificar el análisis de los sistemas a tratar. En el capítulo 3 se desdobra la bifurcación pseudo-Hopf para sistemas en el plano a partir de la forma normal del capítulo previo, también se exhiben familias en tres dimensiones con la bifurcación en cuestión pero con la propiedad de poseer un plano invariante que captura la dinámica. En el capítulo 4 se analiza la ocurrencia de la bifurcación de Hopf para los campos deslizantes regularizados en dos dimensiones y conjeturamos mediante evidencia numérica que al suceder ésta bifurcación provoca otra bifurcación para el sistema tridimensional. En el capítulo 5 se muestra la ocurrencia de bifurcaciones globales en una familia tridimensional con un único punto de doble-tangencia. Finalmente en el capítulo 6 se dan las conclusiones del trabajo.

---

## Capítulo 1

# Resultados Preliminares

---

Considere el sistema lineal por pedazos discontinuo (SLPPD) en  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) con dos zonas separadas por el hiperplano de conmutación  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = c^T x - c_0 = 0\}$ ,

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1 x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2 x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b_1, b_2, c, c_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $c_0 \in \mathbb{R}$ .

Distinguimos tres conjuntos abiertos en el hiperplano de conmutación  $\Sigma$ , el *conjunto deslizante*:  $\Sigma_s = \{x \in \Sigma : c^T f^-(x) > 0 \text{ y } c^T f^+(x) < 0\}$ , el *conjunto de escape*:  $\Sigma_e = \{x \in \Sigma : c^T f^-(x) < 0 \text{ y } c^T f^+(x) > 0\}$ , y el *conjunto de cruce*:  $\Sigma_c = \{x \in \Sigma : (c^T f^-(x)) (c^T f^+(x)) > 0\}$ .

Se pueden construir las soluciones sobre  $\Sigma_s \cup \Sigma_e$  mediante el método convexo de Filippov, ver [36]. El método de Filippov toma la combinación convexa  $f_s(x)$  de los dos campos  $f^\mp(x)$  para cada punto deslizante  $x \in \Sigma_s \cup \Sigma_e$ , es decir,

$$f_s(x) = (1 - \gamma(x))f^-(x) + \gamma(x)f^+(x), \quad (1.2)$$

donde la función  $\gamma(x)$  se define como

$$\gamma(x) = \frac{c^T f^-(x)}{c^T (f^-(x) - f^+(x))} \in (0, 1) \quad \forall x \in \Sigma_s \cup \Sigma_e,$$

y es tal que  $c^T f_s(x) = 0$ , ver Figura 1.1.

Por tanto, tenemos una expresión explícita para el *campo deslizante*  $f_s(x)$  generado por (1.1),

$$f_s(x) = \frac{f_{reg}(x)}{\Delta(x)}, \quad (1.3)$$

donde  $f_{reg}(x) = (c^T f^-(x)) f^+(x) - (c^T f^+(x)) f^-(x)$  es llamado el *campo deslizante regularizado* y  $\Delta(x) = c^T (f^-(x) - f^+(x)) \neq 0$ .

### 1.1. Clasificación de equilibrios y singularidades

El primer paso para entender la dinámica de los SLPPD es la descripción de sus puntos singulares y de la dinámica local asociada a éstos. El conjunto de puntos singulares de un

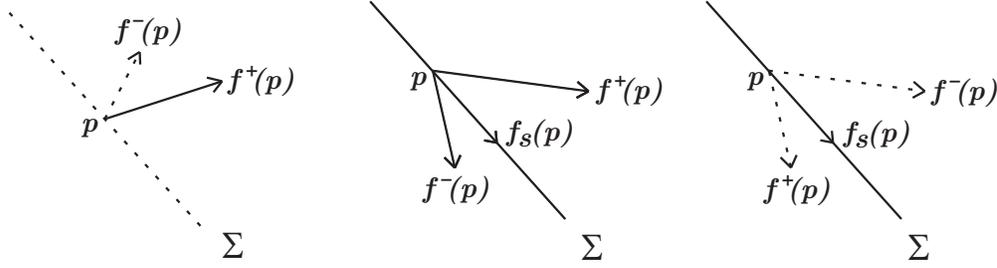


Figura 1.1: Definición del campo en  $\Sigma$  siguiendo la construcción de Filippov en los conjuntos de cruce, escape y deslizante.

SLPPD comprende a los puntos de equilibrio y puntos de tangencia, los cuales se describen en esta sección. Podemos identificar los siguientes tipos de equilibrios en el sistema (1.1), ver [32].

**Definición 1.** *i) Un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio admisible de (1.1) si*

$$f^-(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) < 0,$$

*o si*

$$f^+(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) > 0.$$

*ii)  $p \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio virtual de (1.1) si*

$$f^-(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) > 0,$$

*o si*

$$f^+(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) < 0.$$

*iii) Decimos que un punto  $\tilde{x} \in \Sigma$  es un pseudo-equilibrio de (1.1) si  $f_s(\tilde{x}) = 0$ . El pseudo-equilibrio es admisible si  $\tilde{x} \in \Sigma_s \cup \Sigma_e$ , o virtual si  $\tilde{x} \in \Sigma_c$ .*

*iv) Un punto  $\hat{x}$  es llamado un equilibrio frontera de (1.1) si*

$$f^-(\hat{x})f^+(\hat{x}) = 0, \text{ y } f_s(\hat{x}) = 0.$$

**Observación 1.** *Note que un pseudo-equilibrio admisible se comporta de alguna manera como un equilibrio admisible, esto es, en un pseudo-equilibrio admisible  $\tilde{x}$  se tiene que  $f_s(\tilde{x}) = 0$ , con  $(c^T f^-(\tilde{x}))(c^T f^+(\tilde{x})) < 0$ ; un simple cálculo muestra que  $f^+(\tilde{x}) = \left( \frac{c^T f^+(\tilde{x})}{c^T f^-(\tilde{x})} \right) f^-(\tilde{x})$ , por tanto  $f^-(\tilde{x})$  y  $f^+(\tilde{x})$  son antiparalelos.*

Ya que los tres tipos de conjuntos en  $\Sigma$  son relativamente abiertos, sus fronteras que denotamos como  $\partial\Sigma_s, \partial\Sigma_e, \partial\Sigma_c$  son llamadas *conjuntos de tangencia*:  $q \in \Sigma$  tales que  $c^T f^-(q) = 0$  o  $c^T f^+(q) = 0$ , ver [47, 62]. Esto es, puntos donde uno de los dos campos es tangente a  $\Sigma$ .

En particular, los equilibrios frontera son puntos de tangencia, ya que están localizados en la frontera de la región de deslizamiento o escape, donde uno de los campos se anula. La tangencia más simple es la tangencia cuadrática con  $\Sigma$ , llamada *fold singularity* en inglés, la cual se define como sigue.

**Definición 2** (ver [58, 59]). *Un punto  $q \in \Sigma$  es una singularidad de tangencia (o punto con tangencia cuadrática) de (1.1) si*

$$c^T f^-(q) = 0 \quad y \quad r_1 = c^T A_1 f^-(q) \neq 0,$$

o si

$$c^T f^+(q) = 0 \quad y \quad r_2 = c^T A_2 f^+(q) \neq 0.$$

$q \in \Sigma$  es una singularidad de tangencia invisible (visible) para  $f^-$  si

$$c^T f^-(q) = 0 \quad y \quad r_1 > 0 (< 0).$$

$q \in \Sigma$  es una singularidad de tangencia invisible (visible) para  $f^+$  si

$$c^T f^+(q) = 0 \quad y \quad r_2 < 0 (> 0).$$

Luego, para los fines de ésta tesis, introducimos la siguiente definición.

**Definición 3.** *Un punto  $q \in \Sigma$  será un punto de tangencia de (1.1) si*

- i)  $q$  es una singularidad de tangencia, o
- ii)  $q$  es un foco de  $f^-$  o  $f^+$ .

Esto es, un punto de tangencia es un punto con tangencia cuadrática con  $\Sigma$ , o es un foco frontera. El caso en el que el sistema (1.1) tiene una singularidad de tangencia para un campo, y un foco frontera para el otro en el mismo punto del hiperplano de conmutación, es llamado *equilibrio tangencia-foco (fold-focus* en inglés), ver [43]. Cuando el sistema (1.1) tiene un doble-foco frontera en el mismo punto del hiperplano de conmutación, esto es, cuando hay un foco frontera de ambos lados, a éste punto se llama *equilibrio foco-foco*, ver [85]. Finalmente, una *singularidad de doble-tangencia* es cuando el sistema (1.1) tiene una doble-tangencia cuadrática en el mismo punto sobre  $\Sigma$ , ver [22, 23, 24, 25, 35, 53, 97, 98, 99]. En las Figuras 1.2 y 1.3 se ilustran el equilibrio tangencia-foco, el equilibrio foco-foco y la singularidad de doble-tangencia en el caso de dos dimensiones.

Para el caso de la singularidad doble-tangencia *invisible*, en [62] se hace la siguiente distinción:

- Cuando los vectores  $f^-(q_0)$  y  $f^+(q_0)$  son antiparalelos, con  $q_0 \in \partial\Sigma_c$ , la singularidad es llamada *foco fundido (fused focus* en inglés).
- Cuando los vectores  $f^-(q_0)$  y  $f^+(q_0)$  son paralelos, con  $q_0 \in \partial\Sigma_s \cap \partial\Sigma_e$ , la singularidad es llamada *pseudo-foco fundido*.

En este trabajo llamaremos *punto de doble-tangencia* a la singularidad de doble-tangencia, al equilibrio tangencia-foco y al equilibrio foco-foco. Finalmente, el punto de doble-tangencia podrá ser de tres tipos:

- Visible: Si la tangencia es visible en ambos campos.
- Invisible: Si la tangencia es invisible en ambos campos.
- Visible-invisible: Si la tangencia es visible en un campo e invisible en el otro.

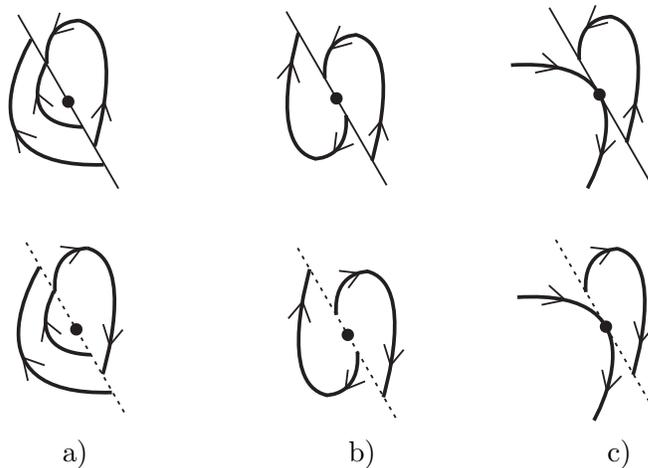


Figura 1.2: a) *Equilibrio tangencia-foco: el caso invisible.* b) *Equilibrio foco-foco.* c) *Equilibrio tangencia-foco: el caso visible.* Las líneas punteadas y continuas indican cruce y deslizamiento en  $\Sigma$  respectivamente.

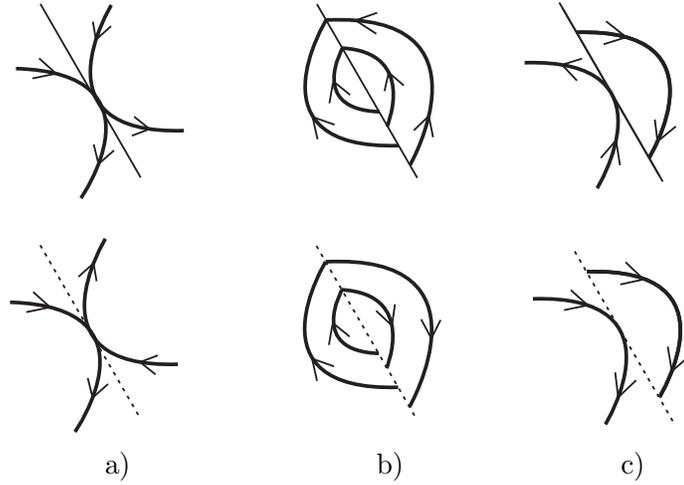


Figura 1.3: Tipos de singularidad doble-tangencia. a) Singularidad doble-tangencia visible. b) Singularidad doble-tangencia invisible. Arriba: pseudo-foco fundido inestable. Abajo: foco fundido inestable. c) Singularidad doble-tangencia visible-invisible. Las líneas punteadas y continuas indican cruce y deslizamiento en  $\Sigma$  respectivamente.

## 1.2. Equivalencia topológica y bifurcaciones

En esta sección presentamos dos diferentes definiciones de equivalencia topológica, las cuales nos conducen a comportamientos genéricos locales y a bifurcaciones de codimensiones 1 y 2. Ambas definiciones son tomadas de [47]. Ver también [11] y [62].

**Definición 4.** Dos campos  $f(x)$  y  $\tilde{f}(y)$  de la forma de (1.1), definidos en conjuntos abiertos  $U$  y  $\tilde{U}$  y con hiperplanos de conmutación  $\Sigma \subset U$  y  $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$  respectivamente, son  $\Sigma$ -equivalentes si existe un homeomorfismo  $h : U \rightarrow \tilde{U}$  el cual envía  $\Sigma$  en  $\tilde{\Sigma}$  y envía órbitas de  $f(x)$  en órbitas de  $\tilde{f}(y)$ .

**Definición 5.** Dos campos  $f(x)$  y  $\tilde{f}(y)$  de la forma de (1.1), definidos en conjuntos abiertos  $U$  y  $\tilde{U}$  y con hiperplanos de conmutación  $\Sigma \subset U$  y  $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$  respectivamente, son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo  $h : U \rightarrow \tilde{U}$ , el cual envía órbitas de  $f(x)$  en órbitas de  $\tilde{f}(y)$ .

De las definiciones anteriores es obvio que si dos campos son  $\Sigma$ -equivalentes también son topológicamente equivalentes, pero el recíproco en general no es cierto. Ahora considere un SLPPD dependiente de un parámetro

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \begin{cases} f^-(x, \mu) = A_1(\mu)x + b_1(\mu), & \text{si } \sigma(x, \mu) < 0, \\ f^+(x, \mu) = A_2(\mu)x + b_2(\mu), & \text{si } \sigma(x, \mu) > 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma(x, \mu) = c^T(\mu) - c_0(\mu)$ .

El sistema (1.4) exhibe una bifurcación en  $\mu = \mu_0$  si una pequeña perturbación del parámetro produce un sistema topológicamente no-equivalente al sistema sin perturbar. Todas las bifurcaciones de (1.4) se clasifican como *locales* o *globales*. Una bifurcación local se puede detectar al buscar una pequeña vecindad arbitraria de un punto en el espacio de estados. Cualquier otra bifurcación se clasifica como global.

### 1.2.1. Bifurcación pseudo-Hopf

Considere el SLPPD (1.4) en dos dimensiones. La dinámica alrededor de un punto de tangencia es persistente bajo pequeñas perturbaciones o cambios de los parámetros. En particular, cuando el parámetro del SLPPD provoca el movimiento de los puntos de tangencia a lo largo de la recta de conmutación y por tanto dos puntos de tangencia pueden collisionar. El tipo de bifurcación que ocurra cuando un punto de tangencia de  $f^-$  y un punto de tangencia de  $f^+$  collisionan en un punto  $q_0 \in \Sigma$  depende de la visibilidad de cada punto de tangencia y de si los campos  $f^-$  y  $f^+$  son paralelos o antiparalelos en  $q_0$ . En [62] se da una descripción completa de los distintos escenarios de bifurcación de puntos de doble-tangencia. La mayoría de éstos escenarios de bifurcación involucran cambios en la topología del segmento deslizante o de cruce, o cambios en la estabilidad del segmento deslizante. El caso excepcional se presenta en la Figura 1.4, donde dos puntos de tangencia invisible colisionan cuando  $f^-$  y  $f^+$  son antiparalelos. Este caso no solo involucra cambios del segmento deslizante y de cruce, también involucra la aparición de un ciclo límite de cruce. Por tal razón, a ésta bifurcación se le denominó *bifurcación pseudo-Hopf* en [62]. En dicho manuscrito se da una familia de sistemas que presentan esta bifurcación y le llaman erróneamente forma normal, ya que no todo sistema que presente la bifurcación pseudo-Hopf puede ser llevado bajo hipótesis genéricas a la forma normal presentada.

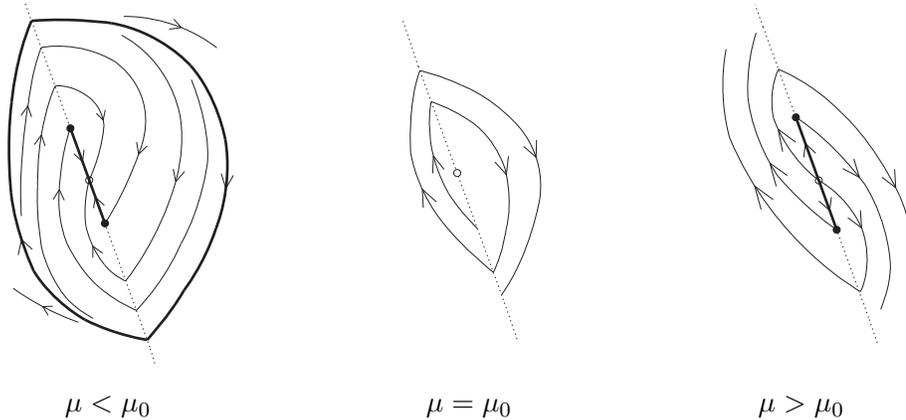


Figura 1.4: Colisión de dos puntos de tangencia invisibles: Bifurcación pseudo-Hopf. Para  $\mu < \mu_0$  se tiene un pseudo-nodo estable y un ciclo límite inestable, para  $\mu = \mu_0$  se tiene el foco fundido inestable y para  $\mu > \mu_0$  se tiene un pseudo-nodo inestable.

### 1.2.2. Bifurcaciones globales

#### Bifurcación bucle

Considere el SLPPD (1.4) en dos dimensiones. Supongamos que existe un ciclo deslizando para  $\mu < \mu_0$  y que, para  $\mu = \mu_0$  el segmento estándar del ciclo retorna al segmento deslizando en un punto de tangencia invisible. Si el punto de retorno del ciclo sobre  $\Sigma$  pasa del segmento deslizando al segmento de cruce con velocidad distinta de cero en  $\mu = \mu_0$ , entonces para  $\mu > \mu_0$  el ciclo permanece pero entra al lado  $\sigma(x) > 0$  antes de retornar al segmento deslizando, ver Figura 1.5.

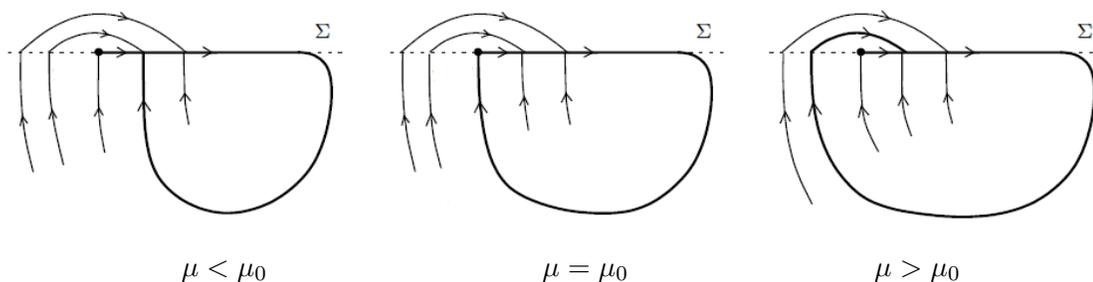


Figura 1.5: *Bifurcación bucle.*

#### Bifurcación ciclo límite de cruce crítico

Ahora supongamos que para  $\mu < \mu_0$  existe un ciclo deslizando con un único segmento deslizando con un extremo visible. Este segmento deslizando se compacta cuando  $\mu \rightarrow \mu_0$  y el ciclo se convierte para  $\mu = \mu_0$  en un ciclo de cruce. Para  $\mu > \mu_0$  el ciclo de cruce persiste y se aleja del segmento deslizando. Por tanto, esta bifurcación involucra una transición de un ciclo deslizando a un ciclo de cruce, ver Figura 1.6.

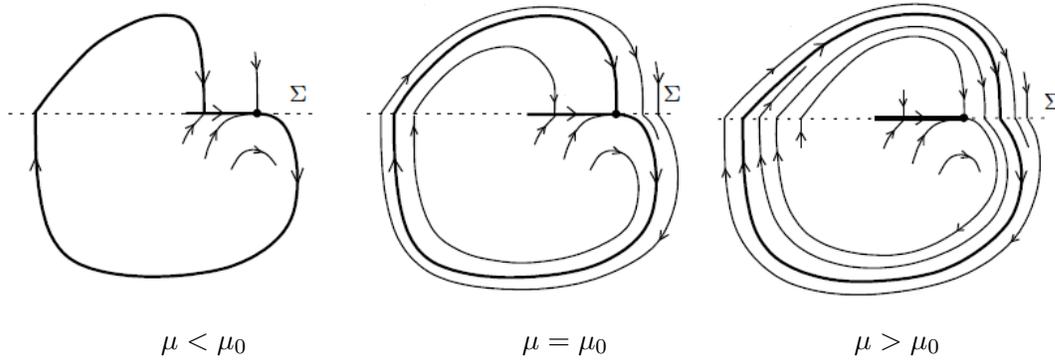


Figura 1.6: *Bifurcación ciclo límite de cruce crítico.*

Ambas bifurcaciones se proponen en [62] sin mostrar alguna forma normal. Posteriormente en [29] se muestra un ejemplo de aplicación donde se presentan éstas bifurcaciones. Luego en [47] se propone una familia la cual es demostrada después en [43]. Recientemente en [103] se dan condiciones necesarias y suficientes para que un SLPPD en el plano presente éstas y otras bifurcaciones.

### 1.2.3. Bifurcación de Hopf

Considerando el hecho de que los SLPPD en tres dimensiones generan campos deslizantes en dos dimensiones y que tales campos resultan ser de manera general no-lineales, podemos considerar la herramienta que se conoce para sistemas suaves y hacer un análisis de bifurcaciones. Para los fines de ésta tesis sólo consideramos bifurcaciones de ciclos límite y en éste caso podemos considerar el bien conocido Teorema de la bifurcación de Hopf, ver [48].

**Teorema 1** (Teorema de la bifurcación de Hopf). *Supongamos que el sistema no-lineal*

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  tiene un equilibrio  $(x_0, \mu_0)$  el cual satisface las siguientes propiedades:

(H1)  $D_x f(x_0, \mu_0)$  posee un único par de valores propios puramente imaginarios y ningún otro valor propio con parte real cero.

(H2) Sea  $\lambda(\mu)$ ,  $\bar{\lambda}(\mu)$  los valores propios de  $D_x f(x_0, \mu)$  los cuales son imaginarios en  $\mu = \mu_0$ , tales que

$$d = \frac{d}{d\mu} (\text{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} \neq 0 \quad (1.5)$$

Entonces existe una única variedad central tridimensional, pasando por  $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  y un sistema de coordenadas suave, cuya expansión en serie de Taylor, hasta grado tres sobre

la variedad central, esta dado, en forma polar, por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (d\mu + ar^2)r \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + c\mu + br^2 \end{aligned}$$

Si  $a \neq 0$  entonces existe una superficie de órbitas periódicas en la variedad central, las cuales tienen tangencia cuadrática con el eigenespacio generado por  $\lambda(\mu_0)$ ,  $\bar{\lambda}(\mu_0)$  el cual coincide en dimensión dos, con el paraboloides  $\mu = -\frac{a}{d}r^2$ . Si  $a < 0$ , entonces, esas soluciones periódicas son estables, mientras que si  $a > 0$ , son ciclos límite inestables.

**Observación 2.** Si  $a < 0$ , se dice que la bifurcación de Hopf es Supercrítica, mientras que si  $a > 0$ , se dice que la bifurcación de Hopf es Subcrítica. Los coeficientes de estabilidad  $d$  y  $a$  son llamados velocidad de cruce y primer coeficiente de Lyapunov, respectivamente.

Para sistemas en el plano, existe una expresión para calcular el llamado primer coeficiente de Lyapunov  $a$ .

Considere el sistema

$$\dot{x} = Jx + F(x),$$

donde  $J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$ ,  $F(0) = 0$  y  $DF(0) = 0$ . Entonces

$$a = \frac{1}{16\omega_0}(R_1 + \omega_0 R_2), \quad (1.6)$$

donde

$$\begin{aligned} R_1 &= (F_{1x_1x_2}(F_{1x_1x_1} + F_{1x_2x_2}) \\ &\quad - F_{2x_1x_2}(F_{2x_1x_1} + F_{2x_2x_2}) \\ &\quad - F_{1x_1x_1}F_{2x_1x_1} + F_{1x_2x_2}F_{2x_2x_2})|_{x=0} \\ R_2 &= (F_{1x_1x_1x_1} + F_{1x_1x_2x_2} + F_{2x_1x_1x_2} + F_{2x_2x_2x_2})|_{x=0}. \end{aligned}$$

En [100] se establece el siguiente teorema.

**Teorema 2** (Velocidad de cruce). Considere el sistema no-lineal

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$ , y  $f$  es suficientemente suave. Suponga que existe un punto  $(x_0, \mu_0)$  tal que

$$(C1) \quad f(x_0, \mu_0) = 0,$$

$$(C2) \quad \sigma(Df(x_0, \mu_0)) = \{\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, j = 3, \dots, n\}.$$

Si  $v = v_1 + iv_2 \in \mathbb{C}^n$  y  $w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C}^n$  son los vectores propios derecho e izquierdo de la matriz  $A = Df(x_0, \mu_0)$  con valor propio  $i\omega_0$ , respectivamente, tales que

$$w_i^T v_j = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j, \end{cases}$$

entonces la velocidad de cruce  $d$  está dada por

$$d = \frac{1}{2} ((w_1 \cdot \mathcal{S}) v_2 + (w_2 \cdot \mathcal{S}) v_1) \quad (1.7)$$

donde  $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{S}_n \end{pmatrix}$ , con  $\mathcal{S}_i = (\mathcal{S}_i^1 \ \mathcal{S}_i^2 \ \dots \ \mathcal{S}_i^n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,

y  $\mathcal{S}_i = f_{i\mu x}(x_0, \mu_0) - (A^{-1} f_{\mu}(x_0, \mu_0))^T D^2 f_i(x_0, \mu_0)$   
para  $i = 1, \dots, n$ .

**Observación 3.** Para el caso cuando  $n = 2$ , la fórmula (1.7) se escribe como sigue

$$d = \frac{1}{2} (\mathcal{S}_1^1 + \mathcal{S}_2^2) \quad (1.8)$$

En el siguiente capítulo haremos una distinción de los SLPPD en términos de la presencia o no de los puntos de doble-tangencia. A partir de ésta distinción podremos construir formas normales que nos permitirán analizar las bifurcaciones de ciclos límite que se presentaron en éste capítulo.

---

## Capítulo 2

# Formas normales para SLPPD

---

En este capítulo encontraremos formas normales para SLPPD en dos y tres dimensiones, basándonos en la presencia o no de los puntos de doble-tangencia. En [40] se presentó una forma normal para SLPPD en el plano, la cual permite encontrar dinámicas de cruce sin tomar mucho en cuenta lo que ocurra en la recta de conmutación y a la fecha es la que se ha estado empleando en la comunidad dedicada a encontrar ciclos límite en SLPPD. En el caso de los SLPPD en tres dimensiones sólo podemos citar el trabajo de M.R. Jeffrey y A. Colombo [53, 23], aunque en éste se hace un análisis local alrededor de la singularidad de doble-tangencia y para los casos genéricos de  $f^-$  y  $f^+$ .

### 2.1. Existencia de puntos de doble-tangencia

Considere el SLPPD en  $\mathbb{R}^n$  con dos zonas separadas por el hiperplano de conmutación  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = c^T x - c_0 = 0\}$ ,

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1 x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2 x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b_1, b_2, c \in \mathbb{R}^n$  y  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Definimos los hiperplanos

$$\pi_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T f^-(x) = 0\},$$

$$\pi_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T f^+(x) = 0\}.$$

La peculiaridad de los hiperplanos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  es que están conformados por puntos en los cuales las órbitas de los campos  $f^-(x)$  y  $f^+(x)$  son paralelas al hiperplano  $\Sigma$ . En particular, los conjuntos de intersección de cada uno de los hiperplanos con el hiperplano  $\Sigma$  son los conjuntos de tangencia, esto es  $l_1 = \pi_1 \cap \Sigma$  y  $l_2 = \pi_2 \cap \Sigma$ . Entonces, para tener puntos de doble-tangencia, los conjuntos de tangencia se deben intersectar. Así, si consideramos el sistema lineal de ecuaciones algebraicas

$$Tx = b \quad (2.2)$$

donde  $T = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_1 \\ c^T A_2 \end{pmatrix}_{3 \times n}$ ,  $b = \begin{pmatrix} c_0 \\ -c^T b_1 \\ -c^T b_2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$ , y  $x \in \mathbb{R}^n$ , de acuerdo al Teorema de Rouché-Frobenius<sup>2</sup> (ver Apéndice A), el sistema (2.2) es compatible determinado (solución única) si se cumple que  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = n$  y compatible indeterminado (infinidad de soluciones) si  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) < n$ . De esta manera, la existencia de los puntos de doble-tangencia en el sistema (2.1) está determinada por la existencia de las soluciones del sistema (2.2).

Ahora bien, debido a que el sistema (2.2) está formado por tres ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas, la solución única podrá presentarse en las dimensiones  $n = 2$  y  $n = 3$ ; para dimensiones mayores sólo podrá presentarse el caso de infinidad de soluciones.

### 2.1.1. Caso: $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 3$

Supongamos que el sistema (2.1) satisface la condición  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 3$ . Para  $n = 3$  se tiene solución única y para  $n > 3$  se tiene una infinidad de soluciones, ver [25]. En esta situación, el hiperplano  $\Sigma$  siempre quedará dividido en los tres tipos de conjuntos,  $\Sigma_s$ ,  $\Sigma_e$ ,  $\Sigma_c$ , siendo delimitados por el conjunto de puntos de doble-tangencia  $l = l_1 \cap l_2$ , ver Figura 2.1.

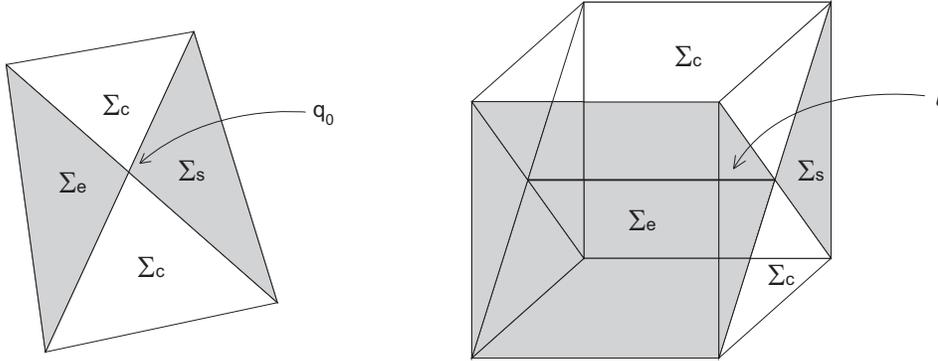


Figura 2.1: Izquierda: En tres dimensiones las rectas de puntos de tangencia  $l_1$  y  $l_2$  se intersectan en un único punto de doble-tangencia  $q_0$ . Derecha: En cuatro dimensiones los planos de puntos de tangencia  $l_1$  y  $l_2$  se intersectan en la recta de puntos de doble-tangencia  $l$ .

### 2.1.2. Caso: $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 2$

Supongamos que el sistema (2.1) satisface la condición  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 2$ . Para  $n = 2$  se tiene solución única y para  $n > 2$  se tiene una infinidad de soluciones. En cualquiera de los casos, podemos considerar sin pérdida de generalidad que existen escalares  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , tales que,

$$A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c,$$

<sup>2</sup>También conocido como Teorema de Rouché-Capelli

y

$$c^T b_2 = -\gamma_1 c_0 + \gamma_2 c^T b_1.$$

**Proposición 1.** *Si el sistema (2.1) satisface  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 2$ , entonces*

- *Si  $\gamma_2 < 0$  entonces  $\Sigma = \Sigma_s \cup l \cup \Sigma_e$ , es decir,  $l \in \partial\Sigma_s \cap \partial\Sigma_e$ .*
- *Si  $\gamma_2 > 0$  entonces  $\Sigma = \Sigma_c \cup l$ , es decir,  $l \in \partial\Sigma_c$ .*

*Demostración.* Es suficiente con considerar el producto  $(c^T f^-(x))(c^T f^+(x))$  para  $x \in \Sigma$ ,

$$\begin{aligned} (c^T f^-(x))(c^T f^+(x)) &= (c^T f^-(x))(c^T A_2 x + c^T b_2) \\ &= (c^T f^-(x))(\gamma_1 c^T x + \gamma_2 c^T A_1 x - \gamma_1 c_0 + \gamma_2 c^T b_1 x) \\ &= (c^T f^-(x))(\gamma_1 (c^T x - c_0) + \gamma_2 (c^T f^-(x))) \\ &= \gamma_2 (c^T f^-(x))^2 \end{aligned}$$

□

Ahora, en el caso  $\gamma_2 < 0$ , como el deslizamiento ocurre en  $\Sigma - \{l\}$  y  $l \in \partial\Sigma_s \cap \partial\Sigma_e$ , es decir, el conjunto  $l$  es la única frontera del conjunto de deslizamiento, por tanto, el valor de  $\gamma(x)$  dada por (1.2) debe ser constante para cada punto deslizante. En efecto, se verifica que

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{c^T(A_1 x + b_1)}{c^T((A_1 - A_2)x + (b_1 - b_2))} \\ &= \frac{c^T(A_1 x + b_1)}{c^T A_1 x - \gamma_1 c^T x - \gamma_2 c^T A_1 x + c^T b_1 - \gamma_2 c^T b_1 + \gamma_1 c^T q_0} \\ &= \frac{c^T(A_1 x + b_1)}{c^T A_1 x(1 - \gamma_2) + c^T b_1(1 - \gamma_2)} \\ &= \frac{1}{1 - \gamma_2} \end{aligned}$$

De aquí que el campo deslizante sea lineal, esto es, siguiendo (1.2),

$$\begin{aligned} f_s(x) &= A_1 x + b_1 + \frac{1}{1 - \gamma_2} ((A_2 - A_1)x + (b_2 - b_1)) \\ &= \frac{1}{1 - \gamma_2} ((A_2 - \gamma_2 A_1)x + b_2 - \gamma_2 b_1) \\ &= \frac{1}{1 - \gamma_2} (\bar{A}x + \bar{b}), \end{aligned}$$

donde  $\bar{A} = A_2 - \gamma_2 A_1$  y  $\bar{b} = b_2 - \gamma_2 b_1$ .

**Observación 4.** *Si  $\gamma_2 = 0$  entonces  $f_s(x) = f^+(x)$ , lo cual significa que el hiperplano  $\pi_2$  colapsa al hiperplano  $\Sigma$ , es decir, los hiperplanos  $\pi_2$  y  $\Sigma$  son coplanares. En este caso  $\Sigma = \Sigma_s \cup l \cup \Sigma_c$ , es decir, el movimiento deslizante existe sólo a un lado de  $l$ . En contraste, si  $\gamma_1 = 0$  entonces los hiperplanos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son coplanares, y esto no contradice a la Proposición 1.*

En la Figura 2.2 se muestra el caso para para  $n = 3$ , en ésta los planos  $\Sigma$ ,  $\pi_1$ , y  $\pi_2$  se intersectan en una recta compuesta de puntos de doble-tangencia.

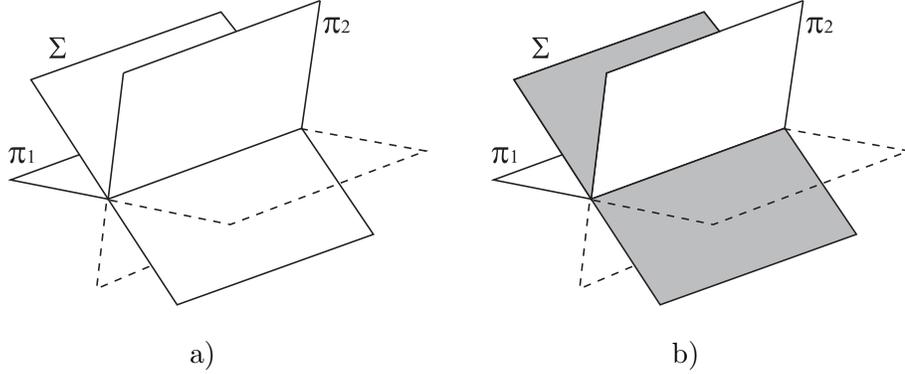


Figura 2.2: En a) no hay deslizamiento, en b)  $\Sigma - \{l\}$  es deslizante, y en ambos casos los tres planos se intersectan en una recta de puntos de doble-tangencia. Cada una de los planos están en posición genérica con respecto al otro, implicando que ninguno es coplanar. Las líneas punteadas denotan los pedazos virtuales de cada plano.

En Teoría de Control es frecuente encontrarnos con el caso descrito en esta sección, ver [1, 2, 95].

### 2.1.3. Caso: $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 1$

Ahora supongamos que el sistema (2.1) satisface la condición  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 1$ , entonces el par de vectores  $\{c, A_1^T c\}$  y  $\{c, A_2^T c\}$  son linealmente dependientes. Según el Teorema de Rouché-Frobenius los hiperplanos  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  y  $\Sigma$  son coplanares, y por lo tanto  $\Sigma$  está constituido enteramente de puntos de doble-tangencia. La siguiente proposición muestra que no hay deslizamiento para este caso.

**Proposición 2.** Si el sistema (2.1) satisface  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 1$  entonces no hay deslizamiento en  $\Sigma$ .

*Demostración.* Supongamos sin pérdida de generalidad que  $T = \begin{pmatrix} c^T \\ \gamma_1 c^T \\ \gamma_2 c^T \end{pmatrix}$  y  $T|b = \begin{pmatrix} c^T, c_0 \\ \gamma_1 c^T, \gamma_1 c_0 \\ \gamma_2 c^T, \gamma_2 c_0 \end{pmatrix}$  y consideremos el producto  $c^T(A_1 x + b_1)c^T(A_2 x + b_2)$ , con  $x \in \Sigma$ ,

$$\begin{aligned} c^T(A_1 x + b_1)c^T(A_2 x + b_2) &= (\gamma_1 c^T x - \gamma_1 c_0) (\gamma_2 c^T x - \gamma_2 c_0) \\ &= \gamma_1 \gamma_2 (c^T x - c_0)^2 \\ &= 0 \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \end{aligned}$$

Por tanto no podemos construir un campo deslizante para este caso.  $\square$

**Observación 5.** Observe que  $c$  es vector propio de las matrices  $A_1^T$  y  $A_2^T$ , es decir,  $A_i^T c = \gamma_i c$ .

En resumen estaremos interesados en los casos  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 3$  y  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 2$ , ya que son los escenarios que permiten hacer una búsqueda de ciclos límite de cruce. En tres dimensiones el caso  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 3$  es el más estudiado hasta ahora y es el más interesante desde el punto de vista matemático ya que siempre existe un punto de doble-tangencia, sin embargo, en las aplicaciones es más factible que se nos presente el otro caso. De cualquier manera, consideraremos ambos casos y encontraremos formas normales para posteriormente hacer la búsqueda de ciclos límite. En el caso  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 2$  se vuelve determinante considerar  $\gamma_2 > 0$  para poder crear un conjunto deslizante, esto es, consideraremos SLPPD que de manera genérica tengan dos conjuntos de tangencia y que al hacer tender a cero cierto parámetro éstos conjuntos colapsen en un conjunto de puntos de doble-tangencia.

## 2.2. Forma normal en $\mathbb{R}^2$

Considere el SLPPD con dos zonas separadas por la recta de conmutación

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(x) = c^T x - c_0 = 0\},$$

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1 x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2 x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

donde  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $b_1, b_2, c, \in \mathbb{R}^2$  y  $c_0 \in \mathbb{R}$ .

La idea es desdoblar el punto de doble-tangencia  $q_0$  de tal forma que dos puntos de tangencia,  $q_1$  y  $q_2$ , de  $f^-$  y  $f^+$ , respectivamente, delimiten un segmento deslizante, y cuando éstos cambien su posición relativa en  $\Sigma$ , después de colapsar en  $q_0$ , el segmento deslizante cambie su estabilidad. Ver Figura 2.3.

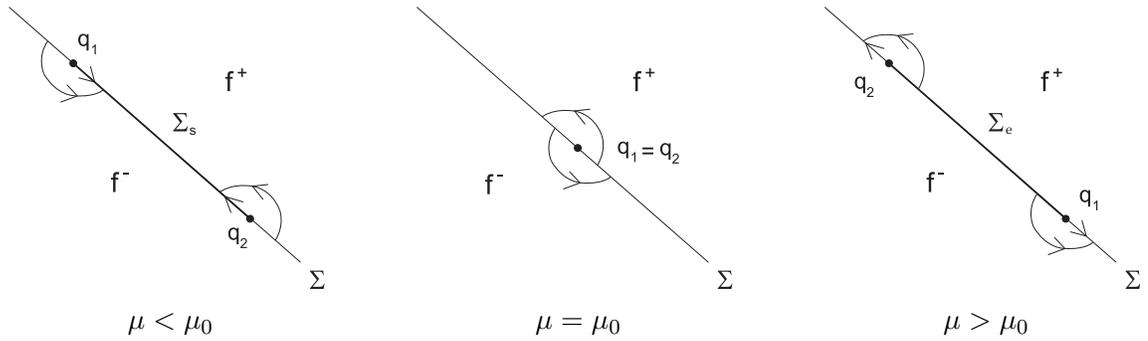


Figura 2.3: Cambio de estabilidad del segmento deslizante para el caso de dos puntos de tangencia invisible.

Con esta idea, asumimos que  $f(x)$  satisface la siguiente hipótesis genérica:

( $H_0$ ) Los pares de vectores  $\{c, A_1^T c\}$  y  $\{c, A_2^T c\}$  son linealmente independientes.

Bajo la hipótesis ( $H_0$ ), el SLPPD (2.3) tiene dos puntos de tangencia,  $q_1, q_2$ . Esto es claro, ya que como el sistema es planar entonces los hiperplanos  $\pi_i$  representan rectas

$$\pi_i : c^T(A_i x + b_i) = 0, \text{ entonces } \pi_i \cap \Sigma = \{q_i\},$$

para  $i = 1, 2$ . Luego, existen escalares  $\gamma_1, \gamma_2$ , con  $\gamma_2 > 0$ , tales que,

$$A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c.$$

El siguiente teorema nos dá una forma normal para SLPPD que satisfacen la hipótesis genérica ( $H_0$ ).

**Teorema 3.** *Bajo la hipótesis ( $H_0$ ), el cambio de coordenadas*

$$y = h(x) = \begin{cases} \gamma_2 Q_1(x - q_1), & \text{si } \sigma(x) \leq 0, \\ Q_2(x - q_1), & \text{si } \sigma(x) \geq 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde  $Q_1 = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_1 \end{pmatrix}$ ,  $Q_2 = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_2 \end{pmatrix}$ , transforma (2.3) en

$$\dot{y} = f(y) = \begin{cases} \tilde{f}^-(y) = \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1, & \text{si } y_1 < 0, \\ \tilde{f}^+(y) = \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix}$  y  $\tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} b \\ r_2 + d_2 b \end{pmatrix}$ ,  
con

$$\begin{aligned} c_1 &= -\det(A_1), \\ c_2 &= \text{tr}(A_1), \\ d_1 &= -\det(A_2), \\ d_2 &= \text{tr}(A_2), \\ r_1 &= c^T A_1 (A_1 q_1 + b_1), \\ r_2 &= c^T A_2 (A_2 q_2 + b_2), \\ b &= c^T (A_2 q_1 + b_2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

**Observación 6.** a) Si  $q_2 \rightarrow q_1$  entonces  $b \rightarrow 0$ , esto es, en  $b = 0$ , los puntos de tangencia colapsan en  $q_0$ .

b) Si  $r_1 > 0 (< 0)$  entonces  $q_1$  es un punto de tangencia invisible(visible).

c) Si  $r_2 < 0 (> 0)$  entonces  $q_2$  es un punto de tangencia invisible(visible).

**Observación 7.** Si consideramos  $\det(\tilde{A}_1) \neq 0$  y  $\det(\tilde{A}_2) \neq 0$ , entonces los equilibrios de los campos  $\tilde{f}^-$  y  $\tilde{f}^+$  son  $p_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_2 r_1}{c_1} \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $p_2 = \begin{pmatrix} -\frac{r_2}{d_1} \\ -b \end{pmatrix}$ , respectivamente. Luego, se cumple lo siguiente:

Caso:  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$

- Si  $\det(\tilde{A}_j) < 0$  entonces  $p_j$  es admisible, para  $j = 1, 2$ .
- Si  $\det(\tilde{A}_j) > 0$  entonces  $p_j$  es virtual, para  $j = 1, 2$ .

Caso:  $r_1 < 0$  y  $r_2 > 0$

- Si  $\det(\tilde{A}_j) < 0$  entonces  $p_j$  es virtual, para  $j = 1, 2$ .
- Si  $\det(\tilde{A}_j) > 0$  entonces  $p_j$  es admisible, para  $j = 1, 2$ .

Caso:  $r_1 > 0$  y  $r_2 > 0$

- Si  $\det(\tilde{A}_1) < 0(> 0)$  entonces  $p_1$  es admisible(virtual).
- Si  $\det(\tilde{A}_2) < 0(> 0)$  entonces  $p_2$  es virtual(admisible).

Caso:  $r_1 < 0$  y  $r_2 < 0$

- Si  $\det(\tilde{A}_1) < 0(> 0)$  entonces  $p_1$  es virtual(admisible).
- Si  $\det(\tilde{A}_2) < 0(> 0)$  entonces  $p_2$  es admisible(virtual).

Caso:  $r_j = 0$

- En este caso  $q_j$  es un equilibrio frontera, el cual debe ser un foco frontera, con valores propios  $\alpha_j \pm i\beta_j$ , con  $\beta_j > 0$ , para  $j = 1, 2$ .

El siguiente corolario establece la  $\Sigma$ -equivalencia del cambio de coordenadas (2.4), ver [47].

**Corolario 1.** Si  $\gamma_2 > 0$  entonces  $h(\Sigma_a) = \tilde{\Sigma}_a$ , para  $a \in \{s, e, c\}$ .

*Demostración.* Para  $x \in \Sigma$ ,  $h(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 c^T A_1(x - q_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c^T A_2(x - q_1) \end{pmatrix}$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} e_1^T \tilde{f}^-(h(x)) &= (1, 0) \begin{pmatrix} \gamma_2 c^T A_1(x - q_1) \\ c_2 c^T A_1(x - q_1) + \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} \\ &= \gamma_2 c^T A_1(x - q_1) + \gamma_2 c^T b_1 - \gamma_2 c^T b_1 \\ &= \gamma_2 c^T A_1(x + b_1) - \gamma_2 c^T (A_1 q_1 + b_1) \\ &= \gamma_2 c^T f^-(x), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
e_1^T \tilde{f}^+(h(x)) &= (1, 0) \begin{pmatrix} c^T A_2(x - q_1) + b \\ r_2 + d_2(c^T A_2(x - q_1) + b) \end{pmatrix} \\
&= c^T A_2(x - q_1) + c^T(A_2 q_1 + b_2) \\
&= c^T(A_2 x + b_2) + c^T A_2 q_1 - c^T A_2 q_1 \\
&= c^T f^+(x).
\end{aligned}$$

□

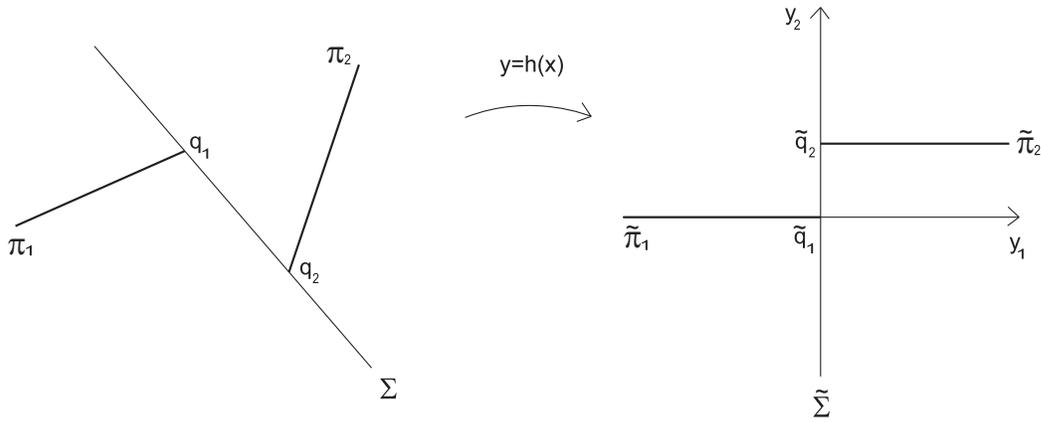


Figura 2.4: Cambio de coordenadas (2.4)

La Figura 2.4 muestra el efecto de ortogonalización del cambio de coordenadas (2.4). De la forma normal (2.5), para  $b = 0$ , tenemos nueve escenarios distintos en los cuales se puede desdoblar el punto de doble-tangencia de tal forma que es posible observar un cambio de estabilidad en un segmento deslizante. Ver Figura 2.5.

### 2.2.1. Demostración del Teorema 3

Para  $x \in \Sigma$ ,

$$h(x) = \begin{cases} \gamma_2 Q_1(x - q_1) = \begin{pmatrix} \gamma_2 c^T(x - q_1) \\ \gamma_2 c^T A_1(x - q_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c^T A_2(x - q_1) \end{pmatrix}, & \text{si } \sigma(x) \leq 0, \\ Q_2(x - q_1) = \begin{pmatrix} c^T(x - q_1) \\ c^T A_2(x - q_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c^T A_2(x - q_1) \end{pmatrix}, & \text{si } \sigma(x) \geq 0, \end{cases}$$

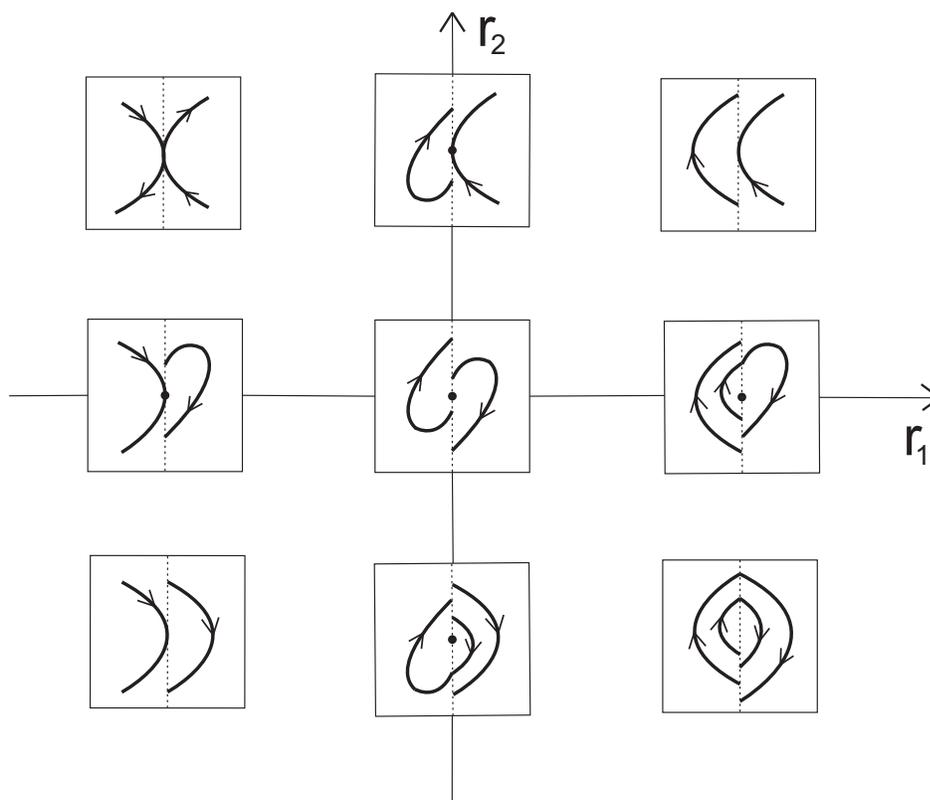


Figura 2.5: *Desdoblamientos del punto de doble-tangencia.*

esto es,  $h$  envía  $\Sigma$  en  $y_1 = 0$ .

Para  $\sigma(x) \leq 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \dot{y} = \tilde{f}^-(y) &= \gamma_2 Q_1 \dot{x} \\
 &= \gamma_2 Q_1 (A_1 x + b_1) \\
 &= \gamma_2 Q_1 \left( A_1 \left( \frac{1}{\gamma_2} Q_1^{-1} y + q_1 \right) + b_1 \right) \\
 &= Q_1 A_1 Q_1^{-1} y + \gamma_2 Q_1 (A_1 q_1 + b_1) \\
 &= \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1,
 \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{A}_1 = Q_1 A_1 Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} c^T A_1 Q_1^{-1} & \\ c^T A_1^2 Q_1^{-1} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix},$$

ya que

$$Q_i Q_i^{-1} = \begin{pmatrix} c^T Q_i^{-1} \\ c^T A_i Q_i^{-1} \end{pmatrix} = I, \text{ para } i = 1, 2,$$

y

$$\tilde{b}_1 = \gamma_2 Q_1 (A_1 q_1 + b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix}.$$

Para  $\sigma(x) \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{y} = \tilde{f}^+(y) &= Q_2 \dot{x} \\ &= Q_2 (A_2 x + b_2) \\ &= Q_2 (A_2 (Q_2^{-1} y + q_1) + b_2) \\ &= Q_2 A_2 Q_2^{-1} y + Q_2 (A_2 q_1 + b_2) \\ &= \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2, \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{A}_2 = Q_2 A_2 Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} c^T A_2 Q_2^{-1} & 0 \\ c^T A_2^2 Q_2^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix},$$

y

$$\tilde{b}_2 = Q_2 (A_2 q_1 + b_2) = \begin{pmatrix} c^T (A_2 q_1 + b_2) \\ c^T A_2 (A_2 q_1 + b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \hat{b} \end{pmatrix}.$$

Si  $Q_2^{-1} = (v_1 \ v_2)$  entonces  $Q_2 Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_2 \end{pmatrix} (v_1 \ v_2) = I$ . Observe que es posible normalizar  $c$  de tal forma que  $\|v_2\| = 1$ . Definamos  $v = q_2 - q_1$ , entonces

$$\hat{b} = c^T A_2 (A_2 q_1 + b_2) = c^T A_2 (A_2 (q_2 - v) + b_2) = c^T A_2 (A_2 q_2 + b_2) - c^T A_2^2 v = r_2 - c^T A_2^2 v.$$

Luego, existen  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $v = s_1 v_1 + s_2 v_2$ , pero  $0 = c^T v = s_1 c^T v_1 + s_2 c^T v_2 = s_1$ , entonces

$$v = s_2 v_2. \quad (2.7)$$

Ahora bien,  $c^T A_2^2 v = s_2 c^T A_2^2 v_2 = s_2 d_2$ , y  $c^T A_2 v = s_2 c^T A_2 v_2 = s_2$ , esto es,

$$s_2 = c^T A_2 v = c^T A_2 (q_2 - q_1) + c^T b_2 - c^T b_2 = -c^T (A_2 q_1 + b_2) = -b, \quad (2.8)$$

Esto termina la demostración. □

**Observación 8.** De (2.7) y (2.8) se sigue que

$$\|q_2 - q_1\| = |b|.$$

### 2.2.2. Dinámica normalizada en las regiones de deslizamiento y escape

De (1.2), el campo deslizante se expresa como

$$f_s(y) = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} 0 \\ (c_2 - d_2) y_2^2 + ((c_2 - d_2)b + \gamma_2 r_1 - r_2) y_2 + \gamma_2 r_1 b \end{pmatrix}$$

Omitiendo la componente trivial, definimos el campo deslizante regularizado como sigue

$$\dot{z} = f_{reg}(z) = (c_2 - d_2) z^2 + ((c_2 - d_2)b + \gamma_2 r_1 - r_2) z + \gamma_2 r_1 b \quad (2.9)$$

**Observación 9.** *Los campos  $f_s$  y  $f_{reg}(-f_{reg})$  son topológicamente equivalentes en  $\tilde{\Sigma}_e(\tilde{\Sigma}_s)$ .*

**Proposición 3.** *Si  $r_1 r_2 < 0$  entonces el campo  $f_{reg}(z)$  tiene un único punto de equilibrio, el cual será un pseudo-nodo si  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$ , o una pseudo-silla si  $r_1 < 0$  y  $r_2 > 0$ .*

*Demostración.* Considere el caso invisible-invisible, esto es,  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$ . Es suficiente con evaluar (2.9) en las fronteras del segmento deslizante, es decir, en  $z = 0$  y  $z = -b$

$$\begin{aligned}\dot{z}|_0 &= \gamma_2 r_1 b > 0 (< 0) \text{ si } b > 0 (< 0), \\ \dot{z}|_{-b} &= \gamma_2 r_1 b < 0 (> 0) \text{ si } b > 0 (< 0).\end{aligned}$$

Ahora considere el caso visible-visible, esto es,  $r_1 < 0$  y  $r_2 > 0$ . Nuevamente evaluamos en  $z = 0$  y  $z = -b$

$$\begin{aligned}\dot{z}|_0 &= \gamma_2 r_1 b > 0 (< 0) \text{ si } b < 0 (> 0), \\ \dot{z}|_{-b} &= \gamma_2 r_1 b < 0 (> 0) \text{ si } b < 0 (> 0).\end{aligned}$$

□

### 2.3. Forma normal en $\mathbb{R}^3$ para el caso con único punto de doble-tangencia

Considere el SLPPD con dos zonas separadas por el plano de conmutación  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : \sigma(x) = c^T x - c_0 = 0\}$ ,

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1 x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2 x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

donde  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $b_1, b_2, c \in \mathbb{R}^3$  y  $c_0 \in \mathbb{R}$ .

Supongamos que este sistema satisface la condición  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 3$ , donde  $T = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_1 \\ c^T A_2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ . En esta situación, el plano  $\Sigma$  siempre quedará dividido en los tres tipos

de regiones alrededor del punto de doble-tangencia  $x = q_0$  (ver Figura 2.6).

Enseguida, introduciremos un cambio de coordenadas para transformar al sistema (2.10) en una forma normal. De hecho, usamos la matriz  $T$  aprovechando que es invertible.

**Teorema 4.** *El cambio de coordenadas*

$$y = h(x) = T(x - q_0),$$

donde  $T = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_1 \\ c^T A_2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ , transforma al sistema (2.10) en

$$\dot{y} = f(y) = \begin{cases} \tilde{f}^-(y) = \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1, & \text{si } y_1 < 0, \\ \tilde{f}^+(y) = \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

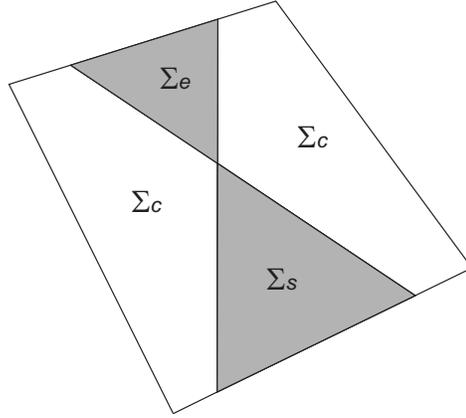


Figura 2.6: Regiones alrededor del punto de doble-tangencia.

$$\text{donde } \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}, \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix}, \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ b_{13} \end{pmatrix}, \text{ y } \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{22} \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Observe que

$$TT^{-1} = I \iff \begin{pmatrix} c^T T^{-1} \\ c^T A_1 T^{-1} \\ c^T A_2 T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el cambio de variable al plano  $\Sigma$

$$\begin{aligned} c^T(T^{-1}y + q_0) - c_0 = 0 &\iff c^T T^{-1}y + c^T q_0 - c_0 = 0 \\ &\iff e_1^T y = 0 \\ &\iff y_1 = 0 \end{aligned}$$

Entonces ahora el nuevo plano de conmutación es  $\tilde{\Sigma} = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 = 0\}$ .

Ahora, al aplicar el cambio de variable a los campos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= T\dot{x} \\ &= T(A_i x + b_i) \\ &= T A_i (T^{-1}y + q_0) + T b_i \\ &= T A_i T^{-1}y + T(A_i q_0 + b_i) \\ &= \tilde{A}_i y + \tilde{b}_i, \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{A}_1 = T A_1 T^{-1} = \begin{pmatrix} c^T A_1 T^{-1} \\ c^T A_1^2 T^{-1} \\ c^T A_2 A_1 T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2^T \\ c^T A_1^2 T^{-1} \\ c^T A_2 A_1 T^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_2 = T A_2 T^{-1} = \begin{pmatrix} c^T A_2 T^{-1} \\ c^T A_1 A_2 T^{-1} \\ c^T A_2^2 T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_3^T \\ c^T A_1 A_2 T^{-1} \\ c^T A_2^2 T^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}_1 = T(A_1 q_0 + b_1) = \begin{pmatrix} c^T (A_1 q_0 + b_1) \\ c^T A_1 (A_1 q_0 + b_1) \\ c^T A_2 (A_1 q_0 + b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ c^T A_2 (A_1 q_0 + b_1) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}_2 = T(A_2 q_0 + b_2) = \begin{pmatrix} c^T (A_2 q_0 + b_2) \\ c^T A_1 (A_2 q_0 + b_2) \\ c^T A_2 (A_2 q_0 + b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c^T A_1 (A_2 q_0 + b_2) \\ r_2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

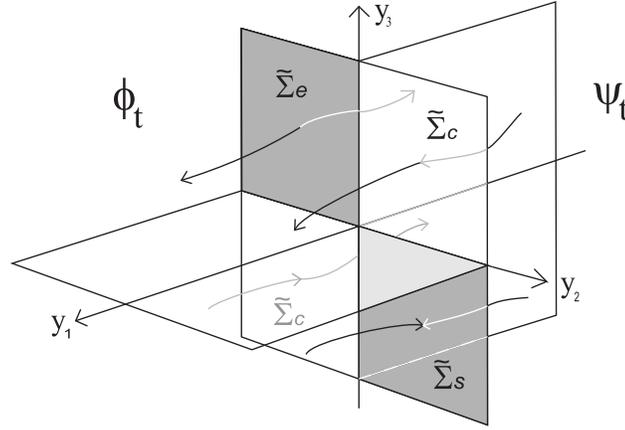


Figura 2.7: *Flujos y regiones en forma normal. Podemos ver como el flujo de cada lado golpea ( $\tilde{\Sigma}_s$ ), jala ( $\tilde{\Sigma}_e$ ) ó cruza ( $\tilde{\Sigma}_c$ ) el plano de conmutación  $\tilde{\Sigma}$ .*

**Observación 10.** *Observe que al aplicar este cambio de coordenadas a los planos  $\pi_i$ , obtenemos los nuevos planos*

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1 &= \{y \in \mathbb{R}^3 : y_2 = 0\}, \\ \tilde{\pi}_2 &= \{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 = 0\}. \end{aligned}$$

*Así, en el sistema normalizado, las regiones de deslizamiento, escape y cruce se identifican fácilmente. Ver Figura 2.7.*

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_s &= \left\{ y \in \tilde{\Sigma} : y_2 > 0 \text{ y } y_3 < 0 \right\}, \\ \tilde{\Sigma}_e &= \left\{ y \in \tilde{\Sigma} : y_2 < 0 \text{ y } y_3 > 0 \right\}, \\ \tilde{\Sigma}_c &= \left\{ y \in \tilde{\Sigma} : y_2 y_3 > 0 \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Las fronteras de la región de deslizamiento son las rectas

$$\tilde{l}_1 = \tilde{\Sigma} \cap \tilde{\pi}_1 \quad \text{y} \quad \tilde{l}_2 = \tilde{\Sigma} \cap \tilde{\pi}_2,$$

y el punto de doble-tangencia es el origen.

El siguiente corolario establece la  $\Sigma$ -equivalencia del cambio de coordenadas

**Corolario 2.**  $h(\Sigma_a) = \tilde{\Sigma}_a$ , para  $a \in \{s, e, c\}$ .

*Demostración.* Para  $x \in \Sigma$ ,  $h(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ c^T A_1(x - q_0) \\ c^T A_2(x - q_0) \end{pmatrix}$ , entonces

$$\begin{aligned} e_1^T \tilde{f}^-(h(x)) &= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} c^T A_1(x - q_0) \\ c_2 c^T A_1(x - q_0) + c_3 c^T A_2(x - q_0) + r_1 \\ c_5 c^T A_1(x - q_0) + c_6 c^T A_2(x - q_0) + b_{13} \end{pmatrix} \\ &= c^T A_1(x - q_0) + c^T b_1 - c^T b_1 \\ &= c^T (A_1 x + b_1) - c^T (A_1 q_0 + b_1) \\ &= c^T f^-(x), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} e_1^T \tilde{f}^+(h(x)) &= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} c^T A_2(x - q_0) \\ d_2 c^T A_1(x - q_0) + d_3 c^T A_2(x - q_0) + b_{22} \\ d_5 c^T A_1(x - q_0) + d_6 c^T A_2(x - q_0) + r_2 \end{pmatrix} \\ &= c^T A_2(x - q_0) + c^T b_2 - c^T b_2 \\ &= c^T (A_2 x + b_2) - c^T (A_2 q_0 + b_2) \\ &= c^T f^+(x). \end{aligned}$$

□

Siguiendo [22, 23, 24, 53, 54], el punto de doble-tangencia se puede clasificar para el caso en que sea una singularidad, de acuerdo con la tangencia con las rectas  $\tilde{l}_1$  y  $\tilde{l}_2$ . Observe que del lado  $\{y_1 < 0\}$  se tiene que

$$e_1^T \dot{y}|_0 = e_1^T \tilde{A}_1 \tilde{f}^-(0) = r_1,$$

y del lado  $\{y_1 > 0\}$  se tiene que

$$e_1^T \dot{y}|_0 = e_1^T \tilde{A}_2 \tilde{f}^+(0) = r_2.$$

Entonces el punto de doble-tangencia del sistema en forma normal (2.11) se clasifica de acuerdo a las mismas cantidades que en el sistema original (2.10):

- Si  $r_2 < 0 < r_1$ , el origen es una singularidad de doble-tangencia invisible.

- Si  $r_1 < 0 < r_2$ , el origen es una singularidad de doble-tangencia visible.
- Si  $r_1 r_2 > 0$ , entonces el origen es una singularidad de doble-tangencia visible-invisible.

**Observación 11.** Si consideramos  $\det(\tilde{A}_1) \neq 0$  y  $\det(\tilde{A}_2) \neq 0$ , entonces los equilibrios de los

campos  $\tilde{f}^-$  y  $\tilde{f}^+$  son  $p_1 = \begin{pmatrix} \frac{c_6 r_1 - c_3 b_{13}}{\det(\tilde{A}_1)} \\ 0 \\ \frac{c_1 b_{13} - c_4 r_1}{\det(\tilde{A}_1)} \end{pmatrix}$  y  $p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d_2 r_2 - d_5 b_{22}}{\det(\tilde{A}_2)} \\ \frac{d_4 b_{22} - d_1 r_2}{\det(\tilde{A}_2)} \end{pmatrix}$ , respectivamente. Luego, se cumple lo siguiente:

- Si  $c_6 r_1 - c_3 b_{13} = 0$  entonces  $p_1$  será un equilibrio frontera, el cual debe ser un foco frontera, con valores propios  $\alpha_j \pm i\beta_j$ , con  $\beta_j > 0$ , para  $j = 1, 2$ . En particular,  $p_1$  será un punto de doble-tangencia si  $r_1 = b_{13} = 0$ .
- Si  $d_2 r_2 - d_5 b_{22} = 0$  entonces  $p_2$  será un equilibrio frontera, el cual debe ser un foco frontera, con valores propios  $\alpha_j \pm i\beta_j$ , con  $\beta_j > 0$ , para  $j = 1, 2$ . En particular,  $p_2$  será un punto de doble-tangencia si  $r_2 = b_{22} = 0$ .

### 2.3.1. Dinámica normalizada en las regiones de deslizamiento y escape

De (1.2), el campo deslizante se expresa como

$$\tilde{f}_s(y) = \frac{1}{y_2 - y_3} \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 y_2^2 + (d_3 - c_2) y_2 y_3 - c_3 y_3^2 + b_{22} y_2 - r_1 y_3 \\ d_5 y_2^2 + (d_6 - c_5) y_2 y_3 - c_6 y_3^2 + r_2 y_2 - b_{13} y_3 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Considerando  $z = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ , esto es, omitiendo la componente trivial de (2.13), definimos el campo deslizante regularizado planar como sigue

$$f_{reg}(z) = \begin{pmatrix} d_2 z_1^2 + (d_3 - c_2) z_1 z_2 - c_3 z_2^2 + b_{22} z_1 - r_1 z_2 \\ d_5 z_1^2 + (d_6 - c_5) z_1 z_2 - c_6 z_2^2 + r_2 z_1 - b_{13} z_2 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

**Observación 12.** Observe que  $\tilde{f}_s(y)$  y  $f_{reg}(z)(-f_{reg}(z))$  son topológicamente equivalentes en  $\tilde{\Sigma}_s(\tilde{\Sigma}_e)$ .

Podemos buscar los equilibrios de  $\tilde{f}_s(y)$  en el plano  $\tilde{\Sigma}$ , resolviendo el sistema  $f_{reg}(z) = 0$ . Ahora, resolver este sistema es equivalente a encontrar el número de intersecciones entre dos cónicas, el cual es a lo más cuatro si no consideramos casos degenerados, de otra forma es posible tener una infinidad de intersecciones. Es claro que el origen es una de esas intersecciones, sin embargo en este punto sabemos que el campo deslizante  $\tilde{f}_s(y)$  está indeterminado, entonces podemos decir que el número de equilibrios de  $\tilde{f}_s(y)$  es a lo más tres para el caso finito.

**Observación 13.** *El campo deslizante  $\tilde{f}_s(y)$  será lineal si éste satisface las siguientes condiciones*

$$\begin{aligned} d_3 - c_2 &= c_3 - d_2, \\ d_6 - c_5 &= c_6 - d_5, \\ r_1 &= b_{22}, \\ b_{13} &= r_2, \end{aligned}$$

Para ver ejemplos de sistemas que presentan ésta característica se pueden revisar la citas [21, 102].

## 2.4. Forma normal en $\mathbb{R}^3$ para el caso sin puntos de doble-tangencia

El sistema (2.1) no presentará puntos de doble-tangencia cuando  $\text{rang}(T) \neq \text{rang}(T|b)$ , donde  $T = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_1 \\ c^T A_2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ . En tres dimensiones la condición anterior se cumplirá sólo de dos maneras:

con  $\text{rang}(T) = 1$  y  $\text{rang}(T|b) = 2$ , ó con  $\text{rang}(T) = 2$  y  $\text{rang}(T|b) = 3$ . Sólo consideraremos el segundo caso, al final de la sección se muestra el porqué se descarta el primer caso.

Considere entonces el SLPPD en tres dimensiones

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1 x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2 x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

satisfaciendo  $\text{rang}(T) = 2$  y  $\text{rang}(T|b) = 3$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c, \quad (2.16)$$

En este caso, de acuerdo al Teorema de Rouché-Frobenius para  $n = 3$ , los planos  $\Sigma$ ,  $\pi_1$ , y  $\pi_2$  no se intersectan simultáneamente, ver Figura 2.8.

**Observación 14.** *Observe que si  $\gamma_1 = 0$  en (2.16), entonces los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son paralelos.*

Enseguida, consideraremos un cambio de coordenadas para transformar al sistema (2.15) en una forma normal, en la cual el análisis será más sencillo. Siempre es posible encontrar un

vector  $r$  de tal forma que la matriz  $P = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_1 \\ r^T \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  sea invertible.

**Teorema 5.** *El cambio de coordenadas*

$$y = h(x) = P(x - q_1),$$

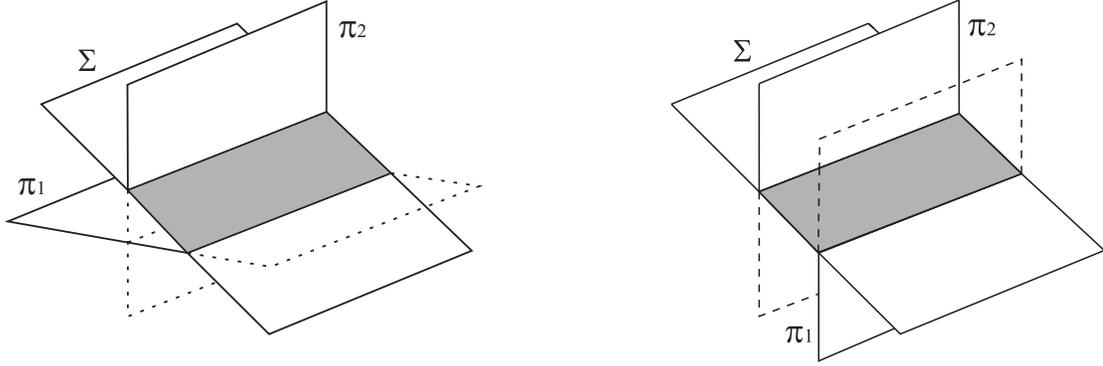


Figura 2.8: Izquierda: Deslizamiento (ó escape) entre dos rectas. Derecha: Caso particular cuando  $\gamma_1 = 0$ . Las líneas punteadas denotan los pedazos virtuales de cada plano.

donde  $P = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_1 \\ r^T \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  y  $q_1 \in \Sigma \cap \pi_1$ , transforma al SLPPD (2.15) en

$$\dot{y} = f(y) = \begin{cases} \tilde{f}^-(y) = \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1, & \text{si } y_1 < 0, \\ \tilde{f}^+(y) = \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

donde  $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix}$ , y  $\tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} \delta \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix}$ .

*Demostración.* Observe que

$$PP^{-1} = I \iff \begin{pmatrix} c^T P^{-1} \\ c^T A_1 P^{-1} \\ r^T P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el cambio de variable al plano  $\Sigma$

$$\begin{aligned} c^T(P^{-1}y + q_1) - c_0 = 0 &\iff c^T P^{-1}y + c^T q_1 - c_0 = 0 \\ &\iff e_1^T y = 0 \\ &\iff y_1 = 0 \end{aligned}$$

Entonces ahora el nuevo plano de conmutación es  $\tilde{\Sigma} = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 = 0\}$ .

Ahora, al aplicar el cambio de variable a los campos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= P\dot{x}, \\ &= P(A_i x + b_i) \\ &= P A_i (P^{-1}y + q_1) + P b_i \\ &= P A_i P^{-1}y + P(A_i q_1 + b_i) \\ &= \tilde{A}_i y + \tilde{b}_i, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 &= PA_1P^{-1} = \begin{pmatrix} c^T A_1 P^{-1} \\ c^T A_1^2 P^{-1} \\ r^T A_1 P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2^T \\ c^T A_1^2 P^{-1} \\ r^T A_1 P^{-1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_2 &= PA_2P^{-1} = \begin{pmatrix} c^T A_2 P^{-1} \\ c^T A_1 A_2 P^{-1} \\ r^T A_2 P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 e_1^T + \gamma_2 e_2^T \\ c^T A_1 A_2 P^{-1} \\ r^T A_2 P^{-1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{b}_1 &= P(A_1 q_1 + b_1) = \begin{pmatrix} c^T(A_1 q_1 + b_1) \\ c^T A_1(A_1 q_1 + b_1) \\ r^T(A_1 q_1 + b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ r^T(A_1 q_1 + b_1) \end{pmatrix}, \\ \tilde{b}_2 &= P(A_2 q_1 + b_2) = \begin{pmatrix} c^T(A_2 q_1 + b_2) \\ c^T A_1(A_2 q_1 + b_2) \\ r^T(A_2 q_1 + b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ b_{22} \\ r^T(A_2 q_1 + b_2) \end{pmatrix}. \quad \square\end{aligned}$$

**Observación 15.** Al aplicar este cambio de coordenadas a los planos  $\pi_i$ , obtenemos los nuevos planos

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_1 &= \{y \in \mathbb{R}^3 : y_2 = 0\}, \\ \tilde{\pi}_2 &= \{y \in \mathbb{R}^3 : \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \delta = 0\},\end{aligned}$$

y el nuevo plano de conmutación  $\tilde{\Sigma} = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 = 0\}$ . Las fronteras de la región de deslizamiento (ó escape) son las rectas

$$\tilde{l}_1 = \tilde{\Sigma} \cap \tilde{\pi}_1 \quad \text{y} \quad \tilde{l}_2 = \tilde{\Sigma} \cap \tilde{\pi}_2.$$

Así, en el sistema normalizado se identifican fácilmente las regiones de deslizamiento, escape y cruce.

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_s &= \{y \in \tilde{\Sigma} : y_2 > 0 \text{ y } \gamma_2 y_2 + \delta < 0\}, \\ \tilde{\Sigma}_e &= \{y \in \tilde{\Sigma} : y_2 < 0 \text{ y } \gamma_2 y_2 + \delta > 0\}, \\ \tilde{\Sigma}_c &= \{y \in \tilde{\Sigma} : y_2(\gamma_2 y_2 + \delta) > 0\}.\end{aligned}$$

El siguiente corolario establece la  $\Sigma$ -equivalencia del cambio de coordenadas

**Corolario 3.**  $h(\Sigma_a) = \tilde{\Sigma}_a$ , para  $a \in \{s, e, c\}$ .

*Demostración.* Para  $x \in \Sigma$ ,  $h(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ c^T A_1(x - q_1) \\ r^T(x - q_1) \end{pmatrix}$ , entonces

$$\begin{aligned}e_1^T \tilde{f}^-(h(x)) &= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} c^T A_1(x - q_1) \\ c_2 c^T A_1(x - q_1) + c_3 r^T(x - q_1) + b_{12} \\ c_5 c^T A_1(x - q_1) + c_6 r^T(x - q_1) + b_{13} \end{pmatrix} \\ &= c^T A_1(x - q_1) + c^T b_1 - c^T b_1 \\ &= c^T(A_1 x + b_1) - c^T(A_1 q_1 + b_1) \\ &= c^T f^-(x),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
e_1^T \tilde{f}^+(h(x)) &= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} \gamma_2 c^T A_1(x - q_1) + \delta \\ d_2 c^T A_1(x - q_1) + d_3 r^T(x - q_1) + b_{22} \\ d_5 c^T A_1(x - q_1) + d_6 r^T(x - q_1) + b_{13} \end{pmatrix} \\
&= \gamma_2 c^T A_1(x - q_1) + c^T(A_2 q_1 + b_2) \\
&= c^T A_2(x - q_1) + c^T(A_2 q_1 + b_2) \\
&= c^T f^+(x).
\end{aligned}$$

□

De aquí, podemos establecer la siguiente

**Proposición 4.** *Para el SLPPD (2.17) se verifican las siguientes afirmaciones.*

- (i) *Si  $\gamma_2 > 0$ , la región de deslizamiento (ó escape) está entre  $\tilde{l}_1$  y  $\tilde{l}_2$ . Si  $\delta < 0$  habrá deslizamiento y si  $\delta > 0$  habrá escape.*
- (ii) *Si  $\gamma_2 < 0$ , la región de cruce está entre  $\tilde{l}_1$  y  $\tilde{l}_2$ . Si  $\delta < 0$  entonces  $\tilde{l}_1$  es la frontera de la región de deslizamiento y  $\tilde{l}_2$  es la frontera de la región de escape, si  $\delta > 0$  tenemos lo contrario.*
- (iii) *Si  $\gamma_2 = 0$  entonces habrá deslizamiento si  $\delta < 0$  ó habrá escape si  $\delta > 0$  y en ambos casos se tendrá sólo a  $\tilde{l}_1$  como frontera.*

De esta manera, tenemos los distintos escenarios mostrados en la Figura 2.9. En ella podemos ver como el flujo de cada lado golpea( $\tilde{\Sigma}_s$ ), jala( $\tilde{\Sigma}_e$ ) ó cruza( $\tilde{\Sigma}_c$ ) el plano de conmutación  $\tilde{\Sigma}$ .

**Observación 16.** *Claramente los escenarios descritos en (ii) y (iii) de la proposición 4 no son factibles de tener alguna dinámica de cruce interesante.*

**Observación 17.** *Note que si  $\delta = 0$  en la forma normal (2.17) entonces el SLPPD satisface  $\text{rang}(T) = 2$  y  $\text{rang}(T|b) = 2$ . En este caso, de acuerdo al Teorema de Rouché-Frobenius para  $n = 3$ , los planos  $\tilde{\Sigma}$ ,  $\tilde{\pi}_1$ , y  $\tilde{\pi}_2$  se intersectan en la recta  $\tilde{l}_1$ , la cual está ahora compuesta por puntos de doble-tangencia. Aquí, la existencia del movimiento deslizante solo estará determinado por el parámetro  $\gamma_2$ , esto es, si  $\gamma_2 < 0$  entonces  $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}_s \cup \tilde{l}_1 \cup \tilde{\Sigma}_e$ , y si  $\gamma_2 > 0$  entonces  $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}_c \cup \tilde{l}_1$ .*

Sean  $\tilde{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{13} \end{pmatrix} \in \tilde{l}_1$  y  $\tilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\delta}{\gamma_2} \\ q_{23} \end{pmatrix} \in \tilde{l}_2$ , observe que del lado  $\{y_1 < 0\}$  se tiene que

$$e_1^T \ddot{y}|_0 = e_1^T \tilde{A}_1 \tilde{f}^-(\tilde{q}_1) = r_1 + c_3 q_{13} = \tilde{r}_1,$$

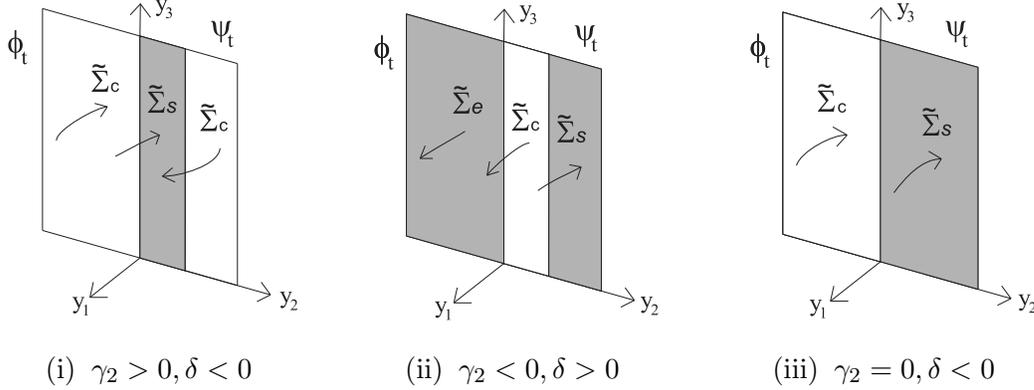


Figura 2.9: Escenarios de deslizamiento en la forma normal (2.17).  $\psi_t$  es el flujo en la mitad del espacio  $\{y_1 < 0\}$ , y  $\phi_t$  es el flujo en la mitad del espacio  $\{y_1 > 0\}$ .

y del lado  $\{y_1 > 0\}$  se tiene que

$$e_1^T \ddot{y}|_0 = e_1^T \tilde{A}_2 \tilde{f}^+(\tilde{q}_2) = (b_{22} + d_3 q_{23})\gamma_2 - d_2 \delta = \tilde{r}_2.$$

Entonces las rectas  $\tilde{l}_i$  consistirán de puntos de tangencia visibles (invisibles) si

$$\tilde{r}_1 < 0 (> 0) \text{ y } \tilde{r}_2 > 0 (< 0).$$

**Observación 18.** Si consideramos  $\det(\tilde{A}_1) \neq 0$  y  $\det(\tilde{A}_2) \neq 0$ , entonces los equilibrios de los

campos  $\tilde{f}^-$  y  $\tilde{f}^+$  son  $p_1 = \begin{pmatrix} \frac{c_6 r_1 - c_3 b_{13}}{\det(\tilde{A}_1)} \\ 0 \\ \frac{c_1 b_{13} - c_4 r_1}{\det(\tilde{A}_1)} \end{pmatrix}$  y  $p_2 = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_2(d_6 b_{22} - d_3 b_{23}) + \delta(d_3 d_5 - d_2 d_6)}{\det(\tilde{A}_2)} \\ \frac{\gamma_2(d_3 b_{23} - d_6 b_{22}) + \delta(d_1 d_6 - d_3 d_4)}{\det(\tilde{A}_2)} \\ \frac{\gamma_1(d_5 b_{22} - d_2 b_{23}) + \gamma_2(d_1 b_{23} - d_4 b_{22}) + \delta(d_2 d_4 - d_1 d_5)}{\det(\tilde{A}_2)} \end{pmatrix}$ ,

respectivamente. Luego, se cumple lo siguiente:

- Si  $c_6 r_1 - c_3 b_{13} = 0$  entonces  $p_1$  será un equilibrio frontera, el cual debe ser un foco frontera, con valores propios  $\alpha_j \pm i\beta_j$ , con  $\beta_j > 0$ , para  $j = 1, 2$ . En particular,  $p_1$  será un punto de doble-tangencia si  $r_1 = b_{13} = 0$ .
- Si  $\gamma_2(d_6 b_{22} - d_3 b_{23}) + \delta(d_3 d_5 - d_2 d_6) = 0$  entonces  $p_2$  será un equilibrio frontera, el cual debe ser un foco frontera, con valores propios  $\alpha_j \pm i\beta_j$ , con  $\beta_j > 0$ , para  $j = 1, 2$ . En particular,  $p_2$  será un punto de doble-tangencia si también se cumple que  $\gamma_2(d_3 b_{23} - d_6 b_{22}) + \delta(d_1 d_6 - d_3 d_4)$ .

#### 2.4.1. Dinámica normalizada en las regiones de deslizamiento y escape

Nuevamente, considerando  $z = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ , y siguiendo (1.2), el campo deslizante se expresa como

$$\tilde{f}_s(z) = \frac{f_{reg}(z)}{(1 - \gamma_2)z_1 - \delta}, \quad (2.18)$$

donde

$$f_{reg}(z) = \begin{pmatrix} (d_2 - c_2\gamma_2)z_1^2 + (d_3 - c_3\gamma_2)z_1z_2 + \omega_1z_1 - c_3\delta z_2 - b_{12}\delta \\ (d_5 - c_5\gamma_2)z_1^2 + (d_6 - c_6\gamma_2)z_1z_2 + \omega_2z_1 - c_6\delta z_2 - b_{13}\delta \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

con  $\omega_1 = b_{22} - b_{12}\gamma_2 - c_2\delta$  y  $\omega_2 = b_{23} - b_{13}\gamma_2 - c_5\delta$ .

**Proposición 5.** *El campo deslizante (2.18) no tiene singularidades.*

*Demostración.* La recta  $z_1 = \frac{\delta}{1-\gamma_2} \in \tilde{\Sigma}_c$ , es decir,

$$\begin{aligned} z_1(\gamma_2 z_1 + \delta) &= \left( \frac{\delta}{1-\gamma_2} \right) \left( \frac{\gamma_2 \delta}{1-\gamma_2} + \delta \right) \\ &= \frac{\delta^2}{1-\gamma_2} \left( \frac{\gamma_2}{1-\gamma_2} + 1 \right) \\ &= \frac{\delta^2}{(1-\gamma_2)^2} > 0 \end{aligned}$$

□

**Observación 19.** ■ *Si  $\gamma_2 < 0$  entonces  $\tilde{f}_s(z)$  y  $f_{reg}(z)(-f_{reg}(z))$  son topológicamente equivalentes en  $\tilde{\Sigma}_s(\tilde{\Sigma}_e)$ .*

- *Si  $\gamma_2 \geq 0$  y  $\delta < 0$  entonces  $\tilde{f}_s(z)$  y  $f_{reg}(z)$  son topológicamente equivalentes en  $\tilde{\Sigma}_s$ .*
- *Si  $\gamma_2 \geq 0$  y  $\delta > 0$  entonces  $\tilde{f}_s(z)$  y  $-f_{reg}(z)$  son topológicamente equivalentes en  $\tilde{\Sigma}_e$ .*

Podemos encontrar los puntos de equilibrio de  $\tilde{f}_s(z)$  resolviendo el sistema  $f_{reg}(z) = 0$ , y concluimos que ellos tienen al menos cuatro puntos de equilibrio (si no consideramos casos degenerados), ya que el sistema  $f_{reg}(z) = 0$  consiste de dos ecuaciones cuadráticas.

#### 2.4.2. Caso excluido: $\text{rang}(T) = 1$ y $\text{rang}(T|b) = 2$

Este es el caso más estudiado en la Literatura, específicamente en Teoría de Control. El problema se enfoca frecuentemente en estabilizar sistemas en la forma de (2.15) mediante modos deslizantes. Este tipo de sistemas son forzados a tener un único punto de equilibrio en el campo deslizante, el cual se define en todo el plano de conmutación. En este caso, de acuerdo al Teorema de Rouché-Frobenius para  $n = 3$ , los planos  $\Sigma$ ,  $\pi_1$ , y  $\pi_2$  son paralelos.

**Proposición 6.** *Si el SLPPD (2.15) satisface  $|T| = 0$ , con  $\text{rang}(T) = 1$  y  $\text{rang}(T|b) = 2$  entonces no hay deslizamiento en  $\Sigma$  ó el plano  $\Sigma$  por completo presenta deslizamiento.*

*Demostración.* Supongamos sin pérdida de generalidad que  $T = \begin{pmatrix} c^T \\ \gamma_1 c^T \\ \gamma_2 c^T \end{pmatrix}$  y  $T|b = \begin{pmatrix} c^T, c_0 \\ \gamma_1 c^T, -c^T b_1 \\ \gamma_2 c^T, -c^T b_2 \end{pmatrix}$

y considere el producto  $c^T(A_1x + b_1)c^T(A_2x + b_2)$ , con  $x \in \Sigma$ .

$$\begin{aligned} c^T(A_1x + b_1)c^T(A_2x + b_2) &= (\gamma_1 c^T x + c^T b_1) (\gamma_2 c^T x + c^T b_2) \\ &= (\gamma_1 c_0 + c^T b_1) (\gamma_2 c_0 + c^T b_2). \end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned}\Sigma &= \Sigma_s \text{ si } (\gamma_1 c_0 + c^T b_1) > 0 \text{ y } (\gamma_2 c_0 + c^T b_2) < 0, \\ \Sigma &= \Sigma_e \text{ si } (\gamma_1 c_0 + c^T b_1) < 0 \text{ y } (\gamma_2 c_0 + c^T b_2) > 0, \\ \Sigma &= \Sigma_c \text{ si } (\gamma_1 c_0 + c^T b_1) (\gamma_2 c_0 + c^T b_2) > 0.\end{aligned}$$

□

Claramente  $\partial\Sigma_s \cup \partial\Sigma_e \cup \partial\Sigma_c = \emptyset$ , por tanto el sistema no presenta puntos de tangencia.

**Observación 20.** Consideremos  $(\gamma_1 c_0 + c^T b_1) (\gamma_2 c_0 + c^T b_2) < 0$ , mediante el método conve-xo de Filippov se verifica que el campo deslizante es lineal,

$$f_s(x) = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} ((\eta_1 A_2 - \eta_2 A_1)x + \eta_1 b_2 - \eta_2 b_1),$$

donde  $\eta_1 = \gamma_1 c_0 + c^T b_1$  y  $\eta_2 = \gamma_2 c_0 + c^T b_2$ .

**Observación 21.** Observe que  $c$  es vector propio de las matrices  $A_1^T$  y  $A_2^T$ , es decir,  $A_i^T c = \gamma_i c$ .

Ahora que ya tenemos las formas normales para SLPPD en dos y tres dimensiones podemos empezar la búsqueda de ciclos límite. Primeramente la haremos mediante la bifurcación pseudo-Hopf en el próximo capítulo.

---

## Capítulo 3

# Bifurcación pseudo-Hopf

---

El presente capítulo representa la parte más importante de esta tesis, ya que aquí se desdobra la bifurcación pseudo-Hopf para SLPPD en el plano y se exhiben familias en tres dimensiones que hasta la fecha no se han reportado en la teoría de bifurcaciones para SLPPD. El desdoblamiento en dos dimensiones permite unificar todos los resultados hechos hasta ahora mediante casos de estudio y más aún, la demostración que presentaremos es más sencilla y natural. En tres dimensiones, en el caso  $\text{rang}(T) = \text{rang}(T|b) = 3$ , veremos que no es necesario pedirle al sistema la presencia de dos rectas de tangencia invisible para que ocurra la bifurcación pseudo-Hopf.

### 3.1. Caso bidimensional

Considere el SLPPD

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

satisfaciendo la hipótesis  $(H_0)$ . Consideremos también la forma normal

$$\dot{y} = f(y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} b \\ r_2 + d_2 b \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= -\det(A_1), \\ c_2 &= \text{tr}(A_1), \\ d_1 &= -\det(A_2), \\ d_2 &= \text{tr}(A_2), \\ r_1 &= c^T A_1 (A_1 q_1 + b_1), \\ r_2 &= c^T A_2 (A_2 q_2 + b_2), \\ b &= c^T (A_2 q_1 + b_2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

El siguiente teorema establece que la forma normal (3.2) presenta la bifurcación pseudo-Hopf sólo en cuatro casos ( $r_1 \geq 0$  y  $r_2 \leq 0$ ).

**Teorema 6 (Teorema de la bifurcación pseudo-Hopf).** *Suponga que el SLPPD (3.1) satisface ( $H_0$ ) con  $\gamma_2 > 0$ . Si  $r_1 \geq 0$ , y  $r_2 \leq 0$ , entonces para cada  $b$  suficientemente pequeña, con  $b\Lambda_0 < 0$ , el sistema (3.1) tiene un único ciclo límite de cruce. Si  $\Lambda_0 < 0$ , el ciclo límite es estable, mientras que si  $\Lambda_0 > 0$ , es inestable, donde*

$$\Lambda_0 = \begin{cases} \frac{c_2}{\gamma_2 r_1} - \frac{d_2}{r_2} & \text{si } r_1 > 0, \quad r_2 < 0, \quad (\text{foco-fundido}) \\ \alpha_2 & \text{si } r_1 > 0, \quad r_2 = 0, \quad (\text{tangencia-foco}) \\ \alpha_1 & \text{si } r_1 = 0, \quad r_2 < 0, \quad (\text{tangencia-foco}) \\ \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} & \text{si } r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad (\text{foco-foco}) \end{cases}$$

**Observación 22.** *No es necesario transformar el SLPPD original (3.1) en la forma normal (3.2) para usar el Teorema 6, es suficiente con calcular las expresiones dadas en (3.3), las cuales están escritas en términos del SLPPD original.*

**Observación 23.** *Debemos aclarar que al decir que el ciclo límite es único, nos referimos a que es el único creado mediante el mecanismo de la bifurcación pseudo-Hopf.*

### 3.1.1. Demostración del Teorema 6

Llamemos  $\phi_t$  y  $\psi_t$  al flujo para  $y_1 < 0$  y  $y_1 > 0$ , respectivamente. Para probar la existencia de un ciclo límite de cruce encontraremos  $\hat{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$  y  $\hat{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ , con  $u > 0$ ,  $v < 0$  y tiempos  $t_1, t_2$ , tales que el sistema

$$S_1 = \phi_{t_1}(\hat{q}_2) - \hat{q}_1 = 0, \quad (3.4)$$

$$S_2 = \psi_{t_2}(\hat{q}_1) - \hat{q}_2 = 0, \quad (3.5)$$

tenga solución única. Ver Figura 3.1.

Renombramos  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}$  y consideramos  $\sigma(A_1) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  y  $\sigma(A_2) = \{\delta_1, \delta_2\}$ .

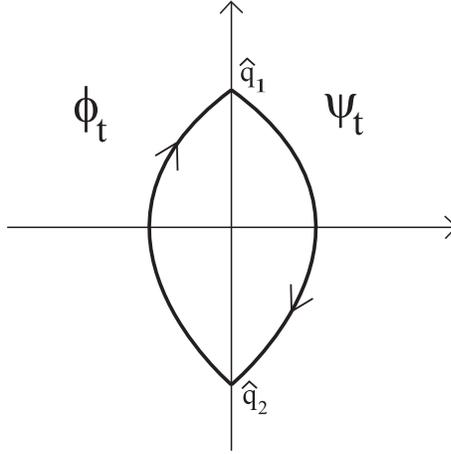
### 3.1.2. Singularidad foco-fundido: $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$ .

**Caso:**  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\delta_1 \delta_2 \neq 0$ ,  $\delta_1 \neq \delta_2$ .

Para este caso,

$$S_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(e^{\lambda_1 t_1} - e^{\lambda_2 t_1})\lambda_1 \lambda_2 v + \gamma_2 r_1 ((1 - e^{\lambda_2 t_1})\lambda_1 + (e^{\lambda_1 t_1} - 1)\lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)} = 0 \\ \frac{e^{\lambda_1 t_1} (\gamma_2 r_1 + \lambda_1 v) - e^{\lambda_2 t_1} (\gamma_2 r_1 + \lambda_2 v) + (\lambda_2 - \lambda_1)u}{\lambda_1 - \lambda_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\lambda_1 t_1} = \frac{\gamma_2 r_1 + \lambda_1 u}{\gamma_2 r_1 + \lambda_1 v} = \frac{1 + \tilde{\lambda}_1 u}{1 + \tilde{\lambda}_1 v} \\ e^{\lambda_2 t_1} = \frac{\gamma_2 r_1 + \lambda_2 u}{\gamma_2 r_1 + \lambda_2 v} = \frac{1 + \tilde{\lambda}_2 u}{1 + \tilde{\lambda}_2 v} \end{cases}$$

Figura 3.1: *Ciclo límite de cruce.*

donde  $\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\gamma_2 r_1}$ .

Observe que, para  $u > 0$ ,  $v < 0$  y  $\tilde{\lambda}_i \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{1 + \tilde{\lambda}_i u}{1 + \tilde{\lambda}_i v} > 0 \Leftrightarrow 1 + \tilde{\lambda}_i u > 0 \text{ y } 1 + \tilde{\lambda}_i v > 0, \text{ para } i = 1, 2,$$

por tanto que,  $e^{\lambda_i t_1} = \frac{1 + \tilde{\lambda}_i u}{1 + \tilde{\lambda}_i v} \Leftrightarrow e^{t_1} = \left( \frac{1 + \tilde{\lambda}_i u}{1 + \tilde{\lambda}_i v} \right)^{\frac{1}{\lambda_i}} = \frac{(1 + \tilde{\lambda}_i u)^{\frac{1}{\lambda_i}}}{(1 + \tilde{\lambda}_i v)^{\frac{1}{\lambda_i}}}$ , entonces,

$$S_1 = 0 \Leftrightarrow G_1(u, v) = \frac{(1 + \tilde{\lambda}_1 u)^{\frac{1}{\lambda_1}}}{(1 + \tilde{\lambda}_2 u)^{\frac{1}{\lambda_2}}} - \frac{(1 + \tilde{\lambda}_1 v)^{\frac{1}{\lambda_1}}}{(1 + \tilde{\lambda}_2 v)^{\frac{1}{\lambda_2}}} = 0.$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} S_2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(e^{\delta_1 t_2} - e^{\delta_2 t_2})\delta_1 \delta_2 (u+b) + r_2 ((1 - e^{\delta_2 t_2})\delta_1 + (e^{\delta_1 t_2} - 1)\delta_2)}{\delta_1 \delta_2 (\delta_1 - \delta_2)} = 0 \\ \frac{e^{\delta_1 t_2} (r_2 + \delta_1 (u+b)) - e^{\delta_2 t_2} (r_2 + \delta_2 (u+b)) + (\delta_2 - \delta_1)u}{\delta_1 - \delta_2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\delta_1 t_2} = \frac{r_2 + \delta_1 (v+b)}{r_2 + \delta_1 (u+b)} = \frac{1 + \tilde{\delta}_1 (-v-b)}{1 + \tilde{\delta}_1 (-u-b)} \\ e^{\delta_2 t_2} = \frac{r_2 + \delta_2 (v+b)}{r_2 + \delta_2 (u+b)} = \frac{1 + \tilde{\delta}_2 (-v-b)}{1 + \tilde{\delta}_2 (-u-b)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow G_2(u, v) = \frac{(1 + \tilde{\delta}_1 (-v-b))^{\frac{1}{\delta_1}}}{(1 + \tilde{\delta}_2 (-v-b))^{\frac{1}{\delta_2}}} - \frac{(1 + \tilde{\delta}_1 (-u-b))^{\frac{1}{\delta_1}}}{(1 + \tilde{\delta}_2 (-u-b))^{\frac{1}{\delta_2}}} = 0, \end{aligned}$$

donde  $\tilde{\delta}_i = -\frac{\delta_i}{r_2}$ .

**Observación 24.** Al considerar  $u$  y  $v$  suficientemente pequeñas se descarta que se cumpla  $(1 + \tilde{\lambda}_i v)(1 + \tilde{\delta}_i(-u - b)) = 0$ .

Observe que  $G_1(0, 0) = 0$  y para  $b = 0$ ,  $G_2(0, 0) = 0$ . Luego, si  $\lambda_i = \delta_i$  y  $\frac{1}{\gamma_2 r_1} = -\frac{1}{r_2}$ , entonces  $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\delta}_i$ , para  $i = 1, 2$  y

$$G_2(u, v) = G_1(-v + b, -(u + b)), \quad (3.6)$$

esto es, la curva  $G_2(u, v) = 0$  se puede obtener mediante la reflexión de la curva  $G_1(u, v) = 0$ , con respecto a la recta  $v = -u$  seguida de la traslación  $(-b, -b)^T$ . Ver Figura 3.2. Entonces, es suficiente con resolver  $G_1(u, v) = 0$ .

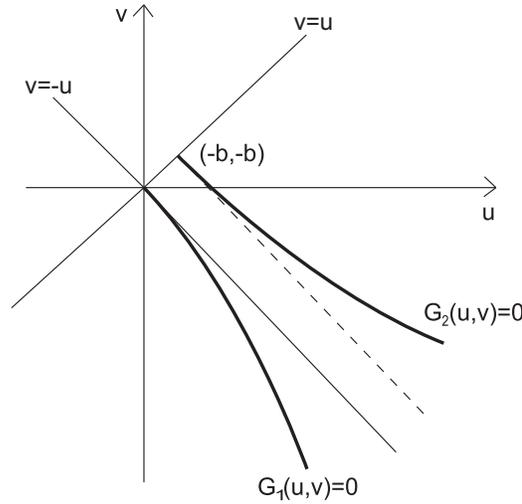


Figura 3.2: Curva de soluciones.

**Lema 1.** Existe una función suave  $h_1 : (-\varepsilon_1, 0] \rightarrow [0, \varepsilon_2)$  tal que

$$G_1(h_1(v), v) = 0,$$

para cada  $v \in (-\varepsilon_1, 0]$ . Luego,  $h_1(0) = 0$ ,  $h_1'(0) = -1$  y  $h_1''(0) = \frac{4c_2}{3\gamma_2 r_1}$ .

*Demostración.* Primero, observe que

$$G_1(u, v) = 0 \Leftrightarrow H(u) = H(v),$$

donde  $H(z) = \frac{(1 + \tilde{\lambda}_1 z)^{\frac{1}{\lambda_1}}}{(1 + \tilde{\lambda}_2 z)^{\frac{1}{\lambda_2}}}$ .

Distinguiremos dos casos.

**Caso real:**  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Para este caso,  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , y después de algunos cálculos,  $H(0) = 1$ ,  $H'(0) = 0$  y  $H''(0) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(\gamma_2 r_1)^2} > 0$ , entonces  $H$  tiene un mínimo local en  $z = 0$ . Entonces,

existen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  tales que, para cada  $v \in (-\varepsilon_1, 0)$ , existe una única  $u \in (0, \varepsilon_2)$  tal que  $H(u) = H(v)$ , esto es, existe una función  $h_1 : (-\varepsilon_1, 0] \rightarrow [0, \varepsilon_2)$ , tal que  $h_1(0) = 0$ , y

$$H(v) = H(h_1(v)) \Leftrightarrow G_1(h_1(v), u) = 0,$$

para cada  $v \in (-\varepsilon_1, 0]$ . Ver Figura 3.3.

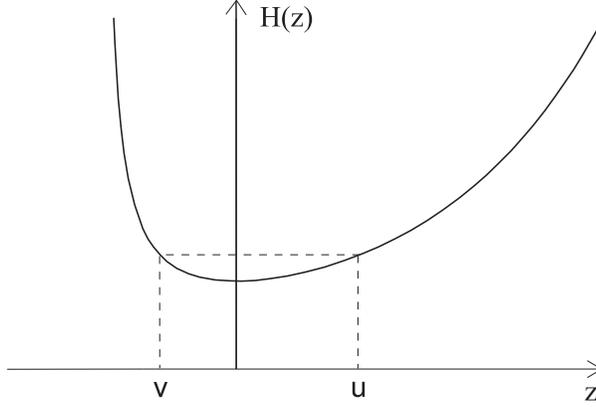


Figura 3.3:  $u = h_1(v)$

De  $H'(v) = H'(h_1(v))h_1'(v)$  obtenemos

$$h_1'(v) = \frac{H'(v)}{H'(h_1(v))} < 0,$$

para cada  $v \in (-\varepsilon_1, 0]$ , ya que  $H'(v) < 0$  y  $H'(h_1(v)) > 0$ .

Si asumimos que existe  $h_1'(0)$ , entonces

$$h_1'(0) = \lim_{v \rightarrow 0^-} h_1'(v) = \lim_{v \rightarrow 0^-} \frac{H'(v)}{H'(h_1(v))} = \lim_{v \rightarrow 0^-} \frac{H''(v)}{H''(h_1(v))h_1'(v)} = \frac{1}{h_1'(0)} \Leftrightarrow h_1'(0) = -1.$$

Ahora bien, de  $H''(v) = H''(h_1(v))(h_1'(v))^2 + H'(h_1(v))h_1''(v)$ ,

$$h_1''(v) = \frac{H''(v) - H''(h_1(v))(h_1'(v))^2}{H'(h_1(v))},$$

y de nuevo, si asumimos que existe  $h_1''(0)$ , entonces

$$\begin{aligned} h_1''(0) &= \lim_{v \rightarrow 0^-} h_1''(v) = \lim_{v \rightarrow 0^-} \frac{H''(v) - H''(h_1(v))(h_1'(v))^2}{H'(h_1(v))} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0^-} \frac{H'''(v) - H'''(h_1(v))(h_1'(v))^3 - 2H''(h_1(v))h_1'(v)h_1''(v)}{H''(h_1(v))h_1'(v)} \\ &= -\frac{2H'''(0)}{H''(0)} - 2h_1''(0), \end{aligned}$$

pero  $H'''(0) = \frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(\gamma_2 r_1)^3}$ , entonces  $h_1''(0) = \frac{4}{3\gamma_2 r_1}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

**Caso complejo:**  $\lambda_1 = \lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ , con  $\beta > 0$ . Para este caso,  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Se sabe que, para  $z_1, \bar{z}_1 \in \mathbb{C}$ ,  $\overline{z_1^{z_2}} = \bar{z}_1^{\bar{z}_2}$ . Por tanto, si  $w(z) = (1 + \tilde{\lambda}z)^{\frac{1}{\lambda}} = r(z)e^{i\theta(z)}$ , entonces

$$H(z) = \frac{w(z)}{\bar{w}(z)} = e^{2i\theta(z)},$$

esto es,

$$G_1(u, v) = 0 \Leftrightarrow H(u) = H(v) \Leftrightarrow \theta(u) = \theta(v).$$

Encontraremos la función real  $\theta(z)$ . Si  $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\gamma_2 r_1}(\lambda) = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}i$ , entonces

$$1 + \tilde{\lambda}z = (1 + \tilde{\alpha}z) + i(\tilde{\beta}z) = r_0(z)e^{i\theta_0(z)}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} (1 + \tilde{\lambda}z)^{\frac{1}{\lambda}} = r(z)e^{i\theta(z)} &\Leftrightarrow \operatorname{Ln}(r_0 e^{i\theta_0}) = \lambda \operatorname{Ln}(r e^{i\theta}) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Ln}(r_0) + i\theta_0 = \lambda(\operatorname{Ln}(r) + i\theta) \\ &\Leftrightarrow (\alpha \operatorname{Ln}(r) - \operatorname{Ln}(r_0) - \beta\theta) + i(\alpha\theta + \beta \operatorname{Ln}(r) - \theta_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \operatorname{Ln}(r) - \operatorname{Ln}(r_0) - \beta\theta = 0 \\ \alpha\theta + \beta \operatorname{Ln}(r) - \theta_0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \theta(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\theta_0 + \beta \operatorname{Ln}(r_0) = 0 \end{aligned}$$

entonces,

$$\theta = \frac{\alpha\theta_0 - \beta \operatorname{Ln}(r_0)}{|\lambda|^2},$$

luego como  $\tan \theta_0 = \frac{\tilde{\beta}}{1 + \tilde{\alpha}z}$  y  $r_0 = \left( (1 + \tilde{\alpha}z)^2 + (\tilde{\beta}z)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , se tiene que

$$\theta(z) = \frac{1}{|\lambda|^2} \left( \alpha \arctan \left( \frac{\tilde{\beta}z}{1 + \tilde{\alpha}z} \right) - \frac{\beta}{2} \operatorname{Ln} \left( (1 + \tilde{\alpha}z)^2 + (\tilde{\beta}z)^2 \right) \right).$$

Después de algunos cálculos, encontramos que  $\theta(0) = \theta'(0) = 0$  y  $\theta''(0) = -\frac{\beta}{\gamma_2 r_1} < 0$ , entonces  $\theta$  tiene un máximo local en  $z = 0$ . Siguiendo los mismos argumentos que en el caso real, probamos que existe una función real  $u = h_1(v)$  tal que  $G_1(h_1(v), v) = 0$ , para cada  $v \in (-\varepsilon, 0]$ , donde  $h_1(0) = 0$ ,  $h_1'(0) = -1$ , y  $h_1''(0) = \frac{4}{3\gamma_2 r_1}(\lambda + \bar{\lambda})$ .  $\square$

**Existencia y estabilidad.** Del lema 1 y ecuación (3.6) se sigue que las soluciones del sistema (3.4-3.5),  $h_1(v)$  y  $h_2(u)$ , están dadas por

$$\begin{aligned} u &= h_1(v) = -v + \lambda_0 v^2 - \lambda_0^2 v^3 + \dots, \\ v &= h_2(u) = -2b - u - \delta_0(b + u)^2 - \delta_0^2(b + u)^3 + \dots, \end{aligned}$$

donde  $\lambda_0 = \frac{2c_2}{3\gamma_2 r_1}$  y  $\delta_0 = -\frac{2d_2}{3r_2}$ , ver Figura 3.4. Para  $\varepsilon > 0$ , definamos el mapeo de Poincaré  $P : (-\varepsilon, 0) \rightarrow (-\varepsilon, 0)$  dado por

$$\begin{aligned} P(v, b) &= h_2(h_1(v)) = v - (\lambda_0 + \delta_0)v^2 + \mathcal{O}(|v|^3) + g_0(b) + \sum_{k=1} g_k(b)v^k \\ &= v - \frac{2}{3}\Lambda_0 v^2 + g_0(b) + \sum_{k=1} g_k(b)v^k + \mathcal{O}(|v|^3), \end{aligned}$$

donde  $g_0(b) = -2b + \mathcal{O}(|b|^2)$ ,  $g_k(b) = \mathcal{O}(|b|)$  y  $\Lambda_0 = \frac{c_2}{\gamma_2 r_1} - \frac{d_2}{r_2}$ .

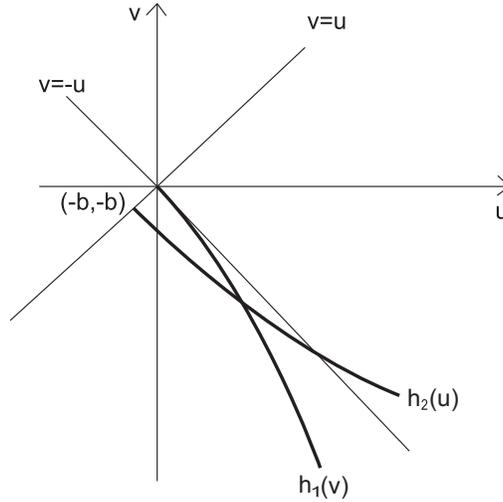


Figura 3.4: Existencia del ciclo límite.

Observe que la función

$$G(v, b) = P(v, b) - v = -\frac{2}{3}\Lambda_0 v^2 + g_0(b) + \sum_{k=1} g_k(b)v^k + \mathcal{O}(|v|^3),$$

satisface: 1)  $G(0, 0) = 0$  y 2)  $\frac{\partial G}{\partial b}(0, 0) = -2$ , entonces del Teorema de la Función Implícita, es posible encontrar una función  $b = g(v)$  tal que  $G(v, g(v)) = 0$  para cada  $v \in (-\varepsilon, 0)$ . Encontramos tal función,

$$\left. \frac{dG(v, g(v))}{dv} \right|_{(0,0)} = 0 \Leftrightarrow \left. \frac{\partial G}{\partial v} \right|_{(0,0)} + g'(0) \left. \frac{\partial G}{\partial b} \right|_{(0,0)} = 0,$$

entonces  $g'(0) = 0$ , luego

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dv} \left( \frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial b} g'(v) \right) \right|_{(0,0)} = 0 &\Leftrightarrow \left. \left( \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial b^2} g'(v) + \frac{\partial G}{\partial b} g''(v) \right) \right|_{(0,0)} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{3}\Lambda_0 - 2g''(0) = 0, \end{aligned}$$

entonces  $g''(0) = -\frac{2}{3}\Lambda_0$ . Por tanto

$$b = g(v) = -\frac{1}{3}\Lambda_0 v^2 + \mathcal{O}(|v|^3),$$

ver Figura 3.5. En otras palabras, para cada  $b$  suficientemente pequeña, con  $b\Lambda_0 < 0$ , existe  $v \in (-\varepsilon, 0)$ , tal que  $P(v, g(v)) = v$ , esto es, el desdoblamiento (3.2) tiene un ciclo límite de cruce. Finalmente, para determinar la estabilidad del ciclo límite, observe que

$$\frac{\partial}{\partial v} P(v, b) = 1 - \frac{4}{3}\Lambda_0 v + \sum_{k=1} k g_k(b) v^{k-1} + \mathcal{O}(|v|^2),$$

y para cada  $b = g(v)$ , con  $v \in (-\varepsilon, 0)$

$$\frac{\partial}{\partial v} P(v, g(v)) = 1 - \frac{4}{3}\Lambda_0 v + \mathcal{O}(|v|^2) = \begin{cases} < 1 & \text{si } \Lambda_0 < 0 \\ > 1 & \text{si } \Lambda_0 > 0 \end{cases}$$

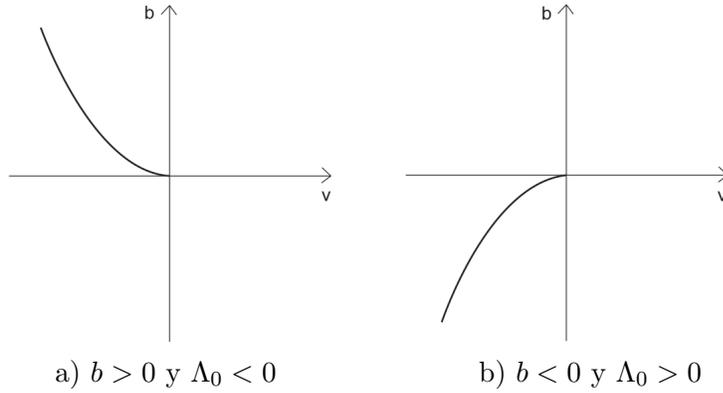


Figura 3.5:  $b = g(v)$  en el dominio de interés.

**Nodos impropios:**  $\lambda_1 = \lambda_2$  y  $\delta_1 = \delta_2$ .

Para este caso,

$$S_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\lambda_1 t_1} = \frac{u}{v + t_1(\gamma_2 r_1 + \lambda_1 v)} \\ e^{\lambda_1 t_1} = \frac{\gamma_2 r_1}{\gamma_2 r_1 - \lambda_1 t_1(\gamma_2 r_1 + \lambda_1 v)} \end{cases},$$

entonces  $t_1 = \frac{\gamma_2 r_1(u-v)}{(\gamma_2 r_1 + \lambda_1 u)(\gamma_2 r_1 + \lambda_1 v)}$ . Esto es,

$$S_1 = 0 \Leftrightarrow G_1(u, v) = (1 + \tilde{\lambda}_1 u) e^{\frac{1}{1+\tilde{\lambda}_1 u}} - (1 + \tilde{\lambda}_1 v) e^{\frac{1}{1+\tilde{\lambda}_1 v}} = 0,$$

donde  $\tilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{\gamma_2 r_1}$ .

Similarmente,

$$S_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\delta_1 t_2} &= \frac{v+b}{u+b+t_2(r_2+\delta_1(u+b))} \\ e^{\delta_1 t_2} &= \frac{r_2}{r_2-\delta_1 t_2(r_2+\delta_1(u+b))} \end{cases},$$

entonces  $t_2 = \frac{-r_2(u-v)}{(r_2+\delta_1(u+b))(r_2+\delta_1(v+b))}$ .

Esto es,

$$S_2 = 0 \Leftrightarrow G_2(u, v) = (1 + \tilde{\delta}_1(-v - b))e^{\frac{1}{1+\tilde{\delta}_1(-v-b)}} - (1 + \tilde{\delta}_1(-u - b))e^{\frac{1}{1+\tilde{\delta}_1(-u-b)}} = 0,$$

donde  $\tilde{\delta}_1 = \frac{\delta_1}{\gamma_2 r_1}$ .

Como en el caso anterior,

$$G_2(u, v) = G_1(-(v + b), -(u + b)).$$

Definimos  $H(z) = (1 + \tilde{\lambda}_1 z)e^{\frac{1}{1+\tilde{\lambda}_1 z}}$ , la cual cumple con  $H(0) = e$ ,  $H'(0) = 0$  y  $H''(0) = \tilde{\lambda}^2 e > 0$ , entonces  $H$  tiene un mínimo local en  $z = 0$ . Por tanto se satisface el lema 1.

**Caso:**  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\delta_1 \neq 0$ ,  $\delta_2 = 0$ .

Aquí

$$S_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\lambda_1 t_1} &= \frac{1+\tilde{\lambda}_1 u}{1+\tilde{\lambda}_1 v} \\ e^{\lambda_1 t_1} &= \frac{1+\tilde{\lambda}_1 v+\lambda_1 t_1}{1+\tilde{\lambda}_1 v} \end{cases},$$

entonces  $t_1 = \frac{u-v}{\gamma_2 r_1}$ .

Esto es

$$S_1 = 0 \Leftrightarrow G_1(u, v) = (1 + \tilde{\lambda}_1 u)e^{-\tilde{\lambda}_1 u} - (1 + \tilde{\lambda}_1 v)e^{-\tilde{\lambda}_1 v} = 0,$$

donde  $\tilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{\gamma_2 r_1}$ .

De manera similar a los casos previos,  $S_2 = 0 \Leftrightarrow G_2(u, v) = 0$ , donde  $G_2$  satisface (3.6). Definimos  $H(z) = (1 + \tilde{\lambda}_1 z)e^{-\tilde{\lambda}_1 z}$ , la cual cumple con  $H(0) = 1$ ,  $H'(0) = 0$  y  $H''(0) = -\tilde{\lambda}^2 < 0$ , entonces  $H$  tiene un máximo local en  $z = 0$ . Por tanto, nuevamente se satisface el lema 1.

**Caso:**  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ .

$S_1 = 0 \Leftrightarrow u = h_1(v) = -v$ , con  $t_1 = -\frac{2v}{\gamma_2 r_1}$  y  $S_2 = 0 \Leftrightarrow v = h_2(u) = -2b - u$ , con  $t_2 = -\frac{2(u+b)}{r_2}$ .

### 3.1.3. Singularidad foco-foco: $r_1 = 0$ y $r_2 = 0$ .

Para este caso,  $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ , y  $\delta_{1,2} = \alpha_2 \pm i\beta_2$ . Entonces

$$S_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\lambda_1 t_1} = e^{\lambda_2 t_1}, \\ u = e^{\lambda_1 t_1} v, \end{cases}$$

esto es,  $t_1 = \frac{\pi}{\beta_1}$  y  $u = h_1(v) = -e^{\frac{\alpha_1 \pi}{\beta_1}} v$ . Luego

$$S_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\delta_1 t_2} = e^{\delta_2 t_2}, \\ v = e^{\delta_1 t_2} u + b(e^{\delta_1 t_2} - 1). \end{cases}$$

Esto es,  $t_2 = \frac{\pi}{\beta_2}$  y  $v = h_2(u) = -e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} u - b(e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} + 1)$ .

Para cada  $\varepsilon > 0$ , definimos el mapeo de Poincaré  $P : (-\varepsilon, 0) \rightarrow (-\varepsilon, 0)$  dado por

$$P(v) = h_2(h_1(v)) = e^{\Lambda_0 \pi} v - b(e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} + 1),$$

el cual para cada  $b$  tal que  $b\Lambda_0 < 0$  tiene el punto fijo  $\tilde{v} = \frac{b(e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} + 1)}{e^{\Lambda_0 \pi} - 1} < 0$ , el cual es estable si  $\Lambda_0 < 0$  e inestable si  $\Lambda_0 > 0$ .

### 3.1.4. Singularidad tangencia-foco

**Caso:**  $r_1 > 0$  y  $r_2 = 0$ .

De los casos previos sabemos que,

$$S_1 = 0 \Leftrightarrow h_1(v) = -v + \lambda_0 v^2 - \lambda_0^2 v^3 + \dots, \text{ y } S_2 = 0 \Leftrightarrow h_2(u) = -e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} u - b(e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} + 1).$$

Entonces el mapeo de Poincaré está dado por

$$P(v, b) = h_2(h_1(v)) = e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} (v - \lambda_0 v^2 + \mathcal{O}(|v|^3)) - b(e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} + 1).$$

De nuevo, observe que la función

$$G(v, b) = P(v, b) - v = (e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} - 1)v + \mathcal{O}(|v|^2) - b(e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} + 1),$$

satisface  $G(0, 0) = 0$  y  $\frac{\partial G}{\partial b}(0, 0) = -(e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} + 1) \neq 0$ , entonces del Teorema de la Función Implícita existe una función

$$b = g(v) = \eta_1 v + \mathcal{O}(|v|^2) \text{ donde } \eta_1 = \frac{e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} - 1}{e^{\frac{\alpha_2 \pi}{\beta_2}} + 1} = \begin{cases} < 0 & \text{si } \alpha_2 < 0, \\ > 0 & \text{si } \alpha_2 > 0, \end{cases}$$

tal que  $G(v, g(v)) = 0$  para cada  $v < 0$  suficientemente pequeña. En otras palabras, para cada  $b$  suficientemente pequeña con  $b\Lambda_0 < 0$ , existe  $v < 0$  tal que  $P(v, g(v)) = v$ . Esto es, la forma

normal (3.2) tiene un ciclo límite de cruce.

Finalmente, para determinar la estabilidad del ciclo límite observe que

$$\frac{\partial}{\partial v}P(v, b) = e^{\frac{\alpha_2\pi}{\beta_2}} (1 - 2\lambda_0 v + \mathcal{O}(|v|^2)) = \begin{cases} < 1 & \text{si } \Lambda_0 < 0, \\ > 1 & \text{si } \Lambda_0 > 0. \end{cases}$$

En este caso, la estabilidad del ciclo límite solo depende de la estabilidad del foco frontera.

**Caso:**  $r_1 = 0$  y  $r_2 < 0$ .

Aquí

$$S_1 = 0 \Leftrightarrow h_1(v) = -e^{\frac{\alpha_1\pi}{\beta_1}} v \text{ y } S_2 = 0 \Leftrightarrow h_2(u) = -2b - u - \delta_0(b+u)^2 - \delta_0^2(b+u)^3 + \dots$$

Entonces, el mapeo de Poincaré está dado por

$$P(v, b) = h_2(h_1(v)) = e^{\frac{\alpha_1\pi}{\beta_1}} (1 + \mathcal{O}(|b|))v + e^{\frac{2\alpha_1\pi}{\beta_1}} (-\delta_0 + \mathcal{O}(|b|))v^2 + \mathcal{O}(|v|^3) + g_0(b),$$

donde  $g_0(b) = -2b + \mathcal{O}(|b|^2)$ .

De nuevo, observe que la función

$$G(v, b) = P(v, b) - v = -v + e^{\frac{\alpha_1\pi}{\beta_1}} (1 + \mathcal{O}(|b|))v + \mathcal{O}(|v|^2) + g_0(b),$$

satisface  $G(0, 0) = 0$  y  $\frac{\partial G}{\partial b}(0, 0) = -2$ , entonces del Teorema de la Función Implícita existe una función

$$b = g(v) = \eta_1 v + \mathcal{O}(|v|^2), \text{ donde } \eta_1 = \frac{1}{2} (e^{\frac{\alpha_1\pi}{\beta_1}} - 1) = \begin{cases} < 0 & \text{si } \alpha_1 < 0, \\ > 0 & \text{si } \alpha_1 > 0, \end{cases}$$

tal que  $G(v, g(v)) = 0$  para cada  $v < 0$  suficientemente pequeña. En otras palabras, para cada  $b$  suficientemente pequeña con  $b\Lambda_0 < 0$ , existe  $v < 0$  tal que  $P(v, g(v)) = v$ . Esto es, la forma normal (3.2) tiene un ciclo límite de cruce.

Finalmente, para determinar la estabilidad del ciclo límite observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}P(v, b) &= e^{\frac{\alpha_1\pi}{\beta_1}} (1 + \mathcal{O}(|b|)) + \mathcal{O}(|v|) \\ &= e^{\frac{\alpha_1\pi}{\beta_1}} (1 + \mathcal{O}(|v|)) + \mathcal{O}(|v|) = \begin{cases} < 1 & \text{si } \Lambda_0 < 0, \\ > 1 & \text{si } \Lambda_0 > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Como en el caso previo, la estabilidad del foco frontera determina la estabilidad del ciclo límite. Esto completa la demostración del Teorema 6.

□

### 3.1.5. Ejemplos

**Ejemplo 1** (Escenario silla-silla). *Considere el siguiente SLPPD*

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \mu \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 + x_2 - 1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 + x_2 - 1 > 0, \end{cases}$$

con  $\mu > -3$ .

Los equilibrios del sistema son  $p_1 = \begin{pmatrix} \frac{3\mu+1}{-4} \\ \frac{\mu-1}{4} \end{pmatrix}$  y  $p_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , los cuales son sillas. Se satisface la hipótesis ( $H_0$ ) ya que  $A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c$ , con  $\gamma_1 = 2$  y  $\gamma_2 = 1$ . Luego, el sistema tiene los puntos de tangencia invisibles  $q_1 = \begin{pmatrix} \frac{5-\mu}{\mu-1} \\ \frac{\mu-1}{4} \end{pmatrix}$  y  $q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ya que  $r_1 = 6 + 2\mu$  y  $r_2 = -4$ . Así, para  $-3 < \mu < 1$  tenemos que  $b = 1 - \mu > 0$  y  $\Lambda_0 = -\frac{\mu+5}{r_1} < 0$ , por lo tanto se satisface el teorema 6. En la Figura 3.6(a) observamos el ciclo límite de cruce estable para  $\mu = \frac{1}{2}$ , tomando las condiciones iniciales  $q_1, q_2$  y  $(1, \frac{6}{10})^T$ . El segmento deslizante existente entre  $q_1$  y  $q_2$  cambia su estabilidad cuando el valor del parámetro varía cerca de  $\mu = 1$ , esto es, el segmento deslizante es inestable para  $\mu < 1$  siendo circundado por un ciclo límite de cruce estable y para  $\mu > 1$  el segmento deslizante es estable.

**Ejemplo 2** (Escenario sin equilibrios). *Considere el siguiente SLPPD*

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \mu \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 > 0, \end{cases}$$

con  $\mu < \frac{1}{3}$ .

Observe que cuando  $\mu = 0$  tenemos el sistema dado en [76]. Nuevamente se satisface la hipótesis ( $H_0$ ) ya que  $A_2^T c = 2c + A_1^T c$ . Luego, el sistema tiene los puntos de tangencia invisibles  $q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}$  y  $q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  ya que  $r_1 = 1 - 3\mu$  y  $r_2 = -\frac{1}{2}$ . Así, para  $-\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{3}$  tenemos  $b = -\mu - \frac{1}{2} < 0$  y  $\Lambda_0 = \frac{2}{1-3\mu} > 0$ , por lo tanto se satisface el teorema 6. En este ejemplo el segmento deslizante cambia su estabilidad cuando el valor del parámetro varía de  $\mu = -\frac{1}{2}$ , siendo inestable para  $\mu < -\frac{1}{2}$  y estable para  $\mu > -\frac{1}{2}$  pero acompañado por un ciclo límite de cruce inestable. En la Figura 3.6(f) observamos, tomando el tiempo en reversa, un ciclo límite de cruce estable para  $\mu = 0$ , tomando las condiciones iniciales  $q_1, q_2$  y  $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})^T$ .

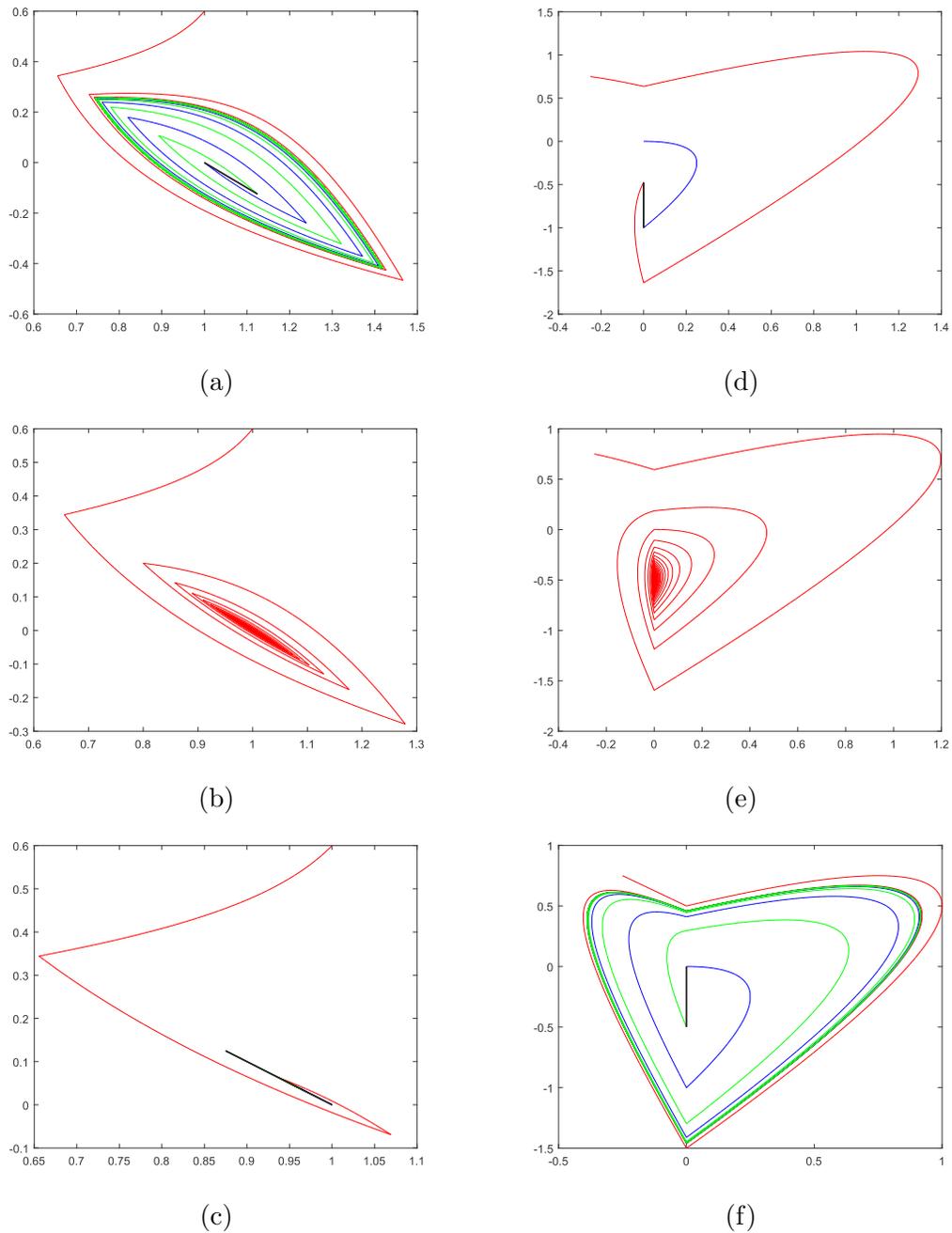


Figura 3.6: (a)-(c) *Dstrucción del ciclo límite de cruce estable en el Ejemplo 1: (a) Ciclo límite de cruce estable y segmento de escape para  $\mu = \frac{1}{2}$ , (b) foco-fundido para  $\mu = 1$  y (c) segmento deslizante estable para  $\mu = \frac{3}{2}$ .* (d)-(f) *Creación del ciclo límite de cruce estable en el Ejemplo 2: (d) Segmento deslizante estable para  $\mu = -1$ , (e) foco-fundido para  $\mu = -\frac{1}{2}$  y (f) ciclo límite de cruce estable y segmento de escape para  $\mu = 0$ .*

### 3.2. Caso tridimensional

Teniendo en cuenta que el problema en tres dimensiones se vuelve mucho más complicado, para demostrar la ocurrencia de la bifurcación pseudo-Hopf en SLPPD tridimensionales, construiremos familias en ambas formas normales conteniendo un plano invariante. Para demostrar la existencia de un plano invariante hacemos uso del siguiente resultado

**Lema 2.** *Considere el SLPPD en  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) con dos zonas separadas por el hiperplano de conmutación  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = c^T x - c_0 = 0\}$ ,*

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1 x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2 x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

donde  $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b_1, b_2, c, c_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $c_0 \in \mathbb{R}$ .

Supongamos que existen valores propios reales  $\lambda \in \sigma(A_1)$  y  $\gamma \in \sigma(A_2)$  tales que

$$\begin{cases} A_1^T w = \lambda w, \\ A_2^T w = \gamma w, \end{cases}$$

entonces  $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid w^T x = k\}$  es un plano invariante del sistema (3.7) si y sólo si

$$\begin{cases} w^T b_1 + \lambda k = 0, \\ w^T b_2 + \gamma k = 0. \end{cases}$$

*Demostración.* Consideremos  $x \in \pi$  satisfaciendo  $\sigma(x) < 0$ , entonces

$$\begin{aligned} w^T \dot{x} = 0 &\Leftrightarrow w^T A_1 x + w^T b_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda w^T x + w^T b_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda k + w^T b_1 = 0 \end{aligned}$$

De manera similar  $w^T \dot{x} = 0 \Leftrightarrow \gamma k + w^T b_2 = 0$  para  $x \in \pi$  satisfaciendo  $\sigma(x) > 0$ .  $\square$

A diferencia de lo presentado en las citas [36, 76], en las familias tridimensionales que exhibiremos aparecen parámetros similares a los involucrados en la bifurcación de Hopf estándar para sistemas suaves. Esto es, un parámetro asociado con la velocidad de cruce y un parámetro asociado con la estabilidad del ciclo límite. Presentaremos dos familias de SLPPD, una para el caso sin puntos de doble-tangencia y otra para el caso en que se tiene un único punto de doble-tangencia. Para cada familia, daremos una demostración de la existencia, unicidad y estabilidad del ciclo límite asociado con la bifurcación. Sólo consideraremos el caso en el que los sistemas no presenten equilibrios, tal como se propuso inicialmente en [62] y se demostró en [76].

### 3.3. Bifurcación pseudo-Hopf en sistemas en $\mathbb{R}^3$ sin puntos de doble-tangencia.

Considere el SLPPD en forma normal (2.17)

$$\dot{y} = f(y) = \begin{cases} \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1, & \text{si } y_1 < 0, \\ \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

donde  $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , y  $\tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} d\mu \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , con  $ad \neq 0$ .

Como ya sabemos de la forma normal (2.17), si  $d\mu > 0$  el sistema (3.8) tiene una región de escape y si  $d\mu < 0$  el sistema tiene una región de deslizamiento, pero en ambos casos la región está delimitada por las rectas  $\tilde{l}_1 = \{y \in \tilde{\Sigma} : y_2 = 0\}$  y  $\tilde{l}_2 = \{y \in \tilde{\Sigma} : y_2 = -d\mu\}$ . Siguiendo (1.2), el campo deslizante definido en  $\tilde{\Sigma}_s \cup \tilde{\Sigma}_e$  está dado por

$$\dot{z} = f_s(z) = \frac{1}{d\mu} \begin{pmatrix} az_1^2 + (2 + ad\mu)z_1 + d\mu \\ -az_1 z_2 \end{pmatrix},$$

donde  $z = (y_2, y_3)^T$ , el cual tiene como único equilibrio el punto

$$p_0 = \left( \frac{1}{2a} \left( -2 - ad\mu + \sqrt{4 + (ad\mu)^2} \right), 0 \right)^T,$$

ya que  $p_{01}(p_{01} + d\mu) = \frac{2 - \sqrt{4 + (ad\mu)^2}}{a^2} < 0$ . Note que éste equilibrio no puede ser equilibrio frontera de (3.8). Luego, la matriz Jacobiana está dada por

$$Df_s(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4 + (ad\mu)^2}}{d\mu} & 0 \\ 0 & \frac{2 + ad\mu - \sqrt{4 + (ad\mu)^2}}{2d\mu} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

**Lema 3.** (i) Si  $d\mu < 0$ , entonces  $p_0 \in \tilde{\Sigma}_s$ .

(ii) Si  $d\mu > 0$ , entonces  $p_0 \in \tilde{\Sigma}_e$ .

(iii) Si  $ad\mu < 0$ , entonces  $p_0$  es un punto silla.

La Tabla 3.1 nos muestra los cuatro diferentes escenarios para la bifurcación pseudo-Hopf.

Observe que la primer componente del campo deslizante no depende de  $z_2$ , entonces la recta  $z_1 = p_{01}$  es una variedad invariante del punto de equilibrio  $p_0$ . Cuando  $p_0$  es un punto silla, si  $a < 0$  ( $a > 0$ ) la recta es la variedad estable (inestable)  $W_{p_0}^s$  ( $W_{p_0}^u$ ).

Cuadro 3.1: Diferentes escenarios para la bifurcación pseudo-Hopf.

	$\mu < 0$	$\mu = 0$	$\mu > 0$
$a > 0, d > 0$	Silla en $p_0 \in \Sigma_s$	Fuente en el origen	Nodo inestable en $p_0 \in \Sigma_e$
$a < 0, d < 0$	Silla en $p_0 \in \Sigma_e$	Sumidero en el origen	Nodo estable en $p_0 \in \Sigma_s$
$a > 0, d < 0$	Nodo inestable en $p_0 \in \Sigma_e$	Fuente en el origen	Silla en $p_0 \in \Sigma_s$
$a < 0, d > 0$	Nodo estable en $p_0 \in \Sigma_s$	Sumidero en el origen	Silla en $p_0 \in \Sigma_e$

**Teorema 7.** *Considere el SLPPD*

$$\dot{y} = f(y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} d\mu \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 > 0. \end{cases}$$

Si  $ad \neq 0$ , entonces el sistema presenta la bifurcación pseudo-Hopf cuando  $\mu = 0$ .

- (i) Si  $ad\mu < 0$ , entonces el sistema tiene un único ciclo límite “circundando” la pseudo-silla  $p_0$ . Si  $a < 0$ , el ciclo límite es estable de forma asintótica, mientras que si  $a > 0$  es inestable de forma asintótica.
- (ii) Si  $ad\mu > 0$ , entonces el sistema tiene un pseudo-nodo en  $p_0$ . Para  $a < 0$ , el pseudo-nodo es estable de forma asintótica, mientras que si  $a > 0$  es inestable de forma asintótica.

*Demostración.* (i). El flujo en la mitad del espacio  $\{y_1 < 0\}$  está determinado por

$$\psi_t(y_0) = e^{t\tilde{A}_1} \left( y_0 + \int_0^t e^{-s\tilde{A}_1} \tilde{b}_1 ds \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} (e^{at}(1 + ay_{02}) - a(y_{02} + t) + a^2 y_{01} - 1) \\ \frac{1}{a} (e^{at}(1 + ay_{02}) - 1) \\ y_{03} \end{pmatrix},$$

mientras que el flujo en la mitad del espacio  $\{y_1 > 0\}$  está determinado por

$$\phi_t(y_0) = e^{t\tilde{A}_2} \left( y_0 + \int_0^t e^{-s\tilde{A}_2} \tilde{b}_2 ds \right) = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2} + t(d\mu + y_{02}) + y_{01} \\ y_{02} - t \\ y_{03} e^{at} \end{pmatrix}.$$

Es importante observar que el plano  $y_3 = 0$  es invariante bajo el flujo global. Para demostrar la existencia del ciclo límite es suficiente mostrar que existen puntos  $\hat{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{12} \\ q_{13} \end{pmatrix}$ , con  $q_{12} > 0$

y  $\hat{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{22} \\ q_{23} \end{pmatrix}$ , con  $q_{22} < 0$ , y tiempos  $t_1 > 0$  y  $t_2 > 0$ , tales que el siguiente sistema tiene solución

$$\begin{cases} \phi_{t_1}(\hat{q}_1) = \hat{q}_2 \\ \psi_{t_2}(\hat{q}_2) = \hat{q}_1 \end{cases} \quad (3.10)$$

No es difícil ver que el sistema (3.10) tiene solución si y sólo si  $q_{13} = q_{23} = 0$ ,  $t_0 = t_1 = t_2 = q_{12} - q_{22}$ , y

$$\begin{aligned} f(q_{12}, q_{22}) &= e^{a(q_{12}-q_{22})}(1 + aq_{22}) - (1 + aq_{12}) = 0, \\ g(q_{12}, q_{22}) &= q_{12} + q_{22} + 2d\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

De la Proposición 7 se sigue que el sistema (3.11) tiene una única solución si  $ad\mu < 0$ .

Entonces, el ciclo límite es la órbita por pedazos

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) = \phi_t(\hat{q}_1), & \text{si } t \in [0, t_0], \\ \gamma_2(t) = \psi_{t-t_0}(\hat{q}_2), & \text{si } t \in [t_0, 2t_0], \end{cases}$$

Note que  $\gamma(0) = \gamma(2t_0) = \hat{q}_1$ , y  $\gamma(t_0) = \hat{q}_2$ . También note que  $\gamma(t)$  está sobre el plano invariante  $y_3 = 0$ .

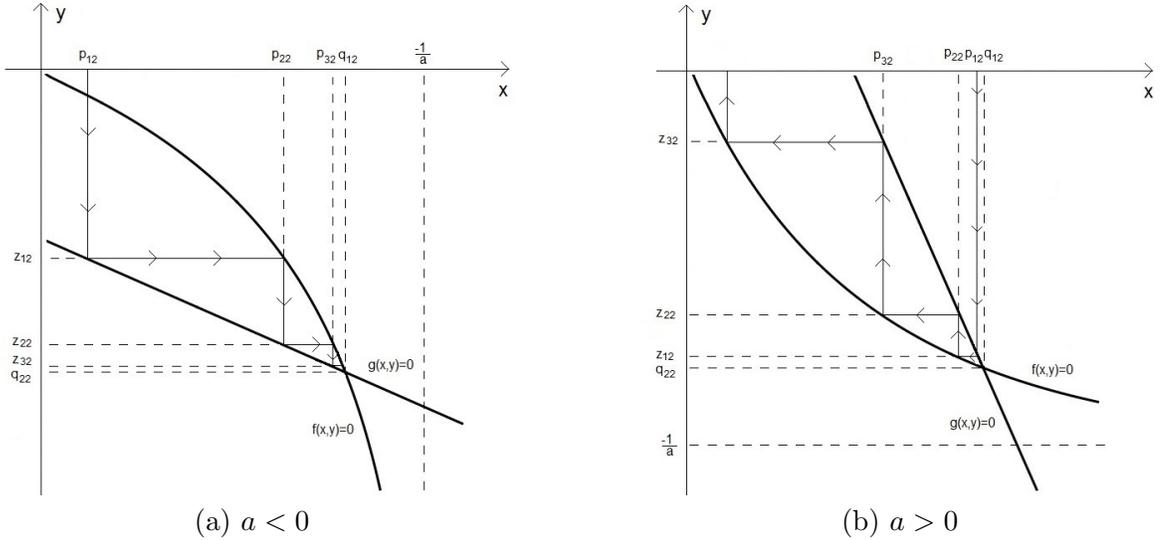


Figura 3.7: (a) Para  $a < 0$ ,  $p_{k2} \rightarrow q_{12}$  para  $k \rightarrow +\infty$ . (b) Para  $a > 0$ ,  $p_{k2} \rightarrow q_{12}$  para  $k \rightarrow -\infty$ .

Ahora probaremos la estabilidad del ciclo límite  $\gamma(t)$  para el caso  $a < 0$ . El caso  $a > 0$  es similar. Es claro que  $\gamma(t)$  no es globalmente estable debido a la variedad estable  $W_{p_0}^s$  del punto silla  $p_0$ .

Definimos la sección de Poincaré  $D = \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 > 0\}$  y el mapa de Poincaré  $P : D \rightarrow D$  dado por

$$p_{i+1} = P(p_i) = \psi_{s_i}(\phi_{\tau_i}(p_i)), \quad (3.12)$$

donde  $t = \tau_i > 0$  es tal que

$$\phi_{\tau_i}(p_i) = z_i = \begin{pmatrix} 0 \\ z_{i2} \\ z_{i3} \end{pmatrix},$$

y  $t = s_i > 0$  satisface

$$\psi_{s_i}(z_i) = p_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{i+1,2} \\ p_{i+1,3} \end{pmatrix}.$$

Para  $i = 1$ ,  $\tau_1 = p_{12} - z_{12}$ ,  $s_1 = p_{22} - z_{12}$ ,  $p_{23} = e^{a\tau_1} p_{13}$ , y

$$\begin{aligned} g(p_{12}, z_{12}) &= 0, \\ f(p_{22}, z_{12}) &= 0. \end{aligned}$$

Para  $i = 2$ ,  $\tau_2 = p_{22} - z_{22}$ ,  $s_2 = p_{32} - z_{22}$ ,  $p_{33} = e^{a(\tau_1 + \tau_2)} p_{13}$ , y

$$\begin{aligned} g(p_{22}, z_{22}) &= 0, \\ f(p_{32}, z_{22}) &= 0. \end{aligned}$$

En general, para  $i = k$ ,  $\tau_k = p_{k2} - z_{k2}$ ,  $s_k = p_{k+1,2} - z_{k2}$ ,  $p_{k+1,3} = e^{a\sum_{i=1}^k \tau_i} p_{13}$ , y

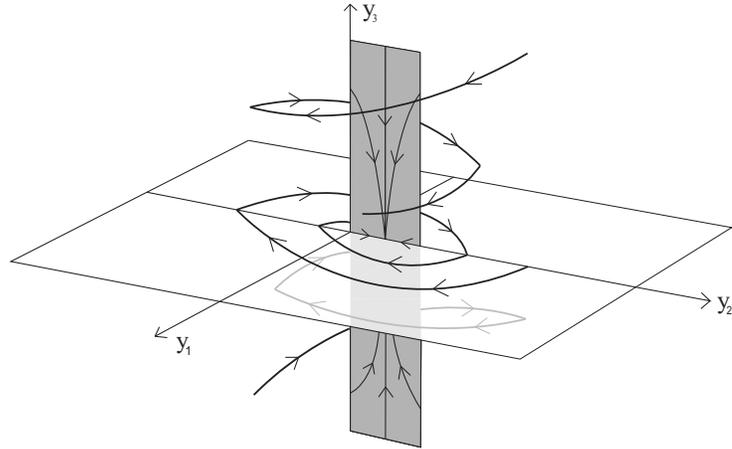
$$\begin{aligned} g(p_{k2}, z_{k2}) &= 0, \\ f(p_{k+1,2}, z_{k2}) &= 0. \end{aligned}$$

Se sigue que, para  $k \rightarrow +\infty$ ,  $p_{k2} \rightarrow q_{12}$  (ver Figura 3.7(a)) y  $p_{k3} \rightarrow 0$ , esto es,  $p_k \rightarrow q_1$ . El caso  $a > 0$  se ilustra en la Figura 3.7(b).

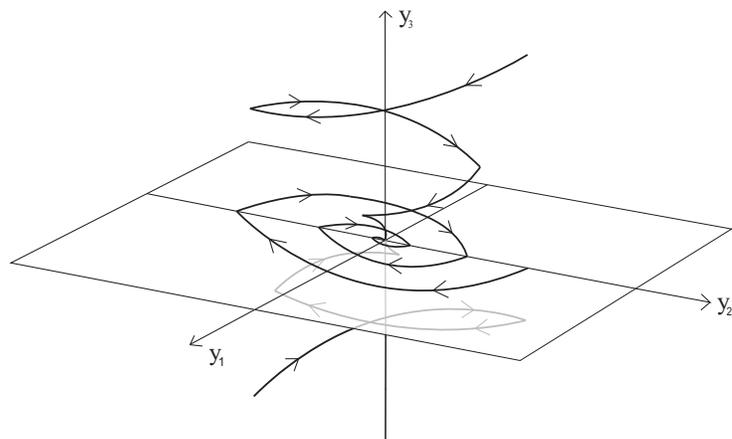
(ii). Definimos el mismo mapeo de Poincaré (3.12); si  $a < 0$ , considere  $D_- = \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 > -d\mu\}$ , mientras que si  $a > 0$ , considere  $D_+ = \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 > 0\}$ . La Figura 3.9 ilustra el caso  $a < 0$ : cualquier punto  $p_1 \in D_-$ , después de un número finito de iteraciones del mapeo de Poincaré  $P$ , llega a  $\Sigma_s$ , esto es, existe  $k$  tal que  $0 < p_{k2} < -d\mu$ . concluimos que, si  $a < 0$  ( $a > 0$ ) entonces toda solución converge a  $p_0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  ( $-\infty$ ).  $\square$

**Corolario 4.** Para  $\mu = 0$ , el sistema (3.8) tiene la recta  $\tilde{l}_1$  de puntos de doble-tangencia. Si  $a < 0$  ( $a > 0$ ), la solución que empieza en  $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \tilde{l}_1$  converge al origen, cuando  $t \rightarrow \infty$  ( $-\infty$ ).

$$\mu < 0$$



$$\mu = 0$$



$$\mu > 0$$

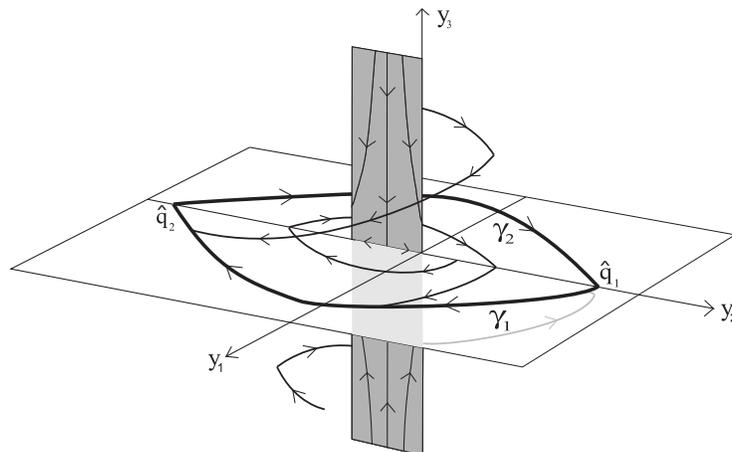


Figura 3.8: Escenario de la bifurcación pseudo-Hopf supercrítica para  $a < 0$  y  $d > 0$ . Para  $\mu < 0$  el pseudo-nodo es estable de forma asintótica, para  $\mu = 0$  el origen (punto de doble-tangencia) es estable de forma asintótica en  $\mathbb{R}^3 \setminus l_1$ , y para  $\mu > 0$  el pseudo-equilibrio cambia su estabilidad y nace el ciclo límite, el cual es estable de forma asintótica en  $\mathbb{R}^3 \setminus W^s(p_0)$ .

*Demostración.* Sólo considere el mismo mapeo de Poincaré (3.12).  $\square$

La Figura 3.8 ilustra la bifurcación pseudo-Hopf supercrítica para  $a < 0$  y  $d > 0$ .

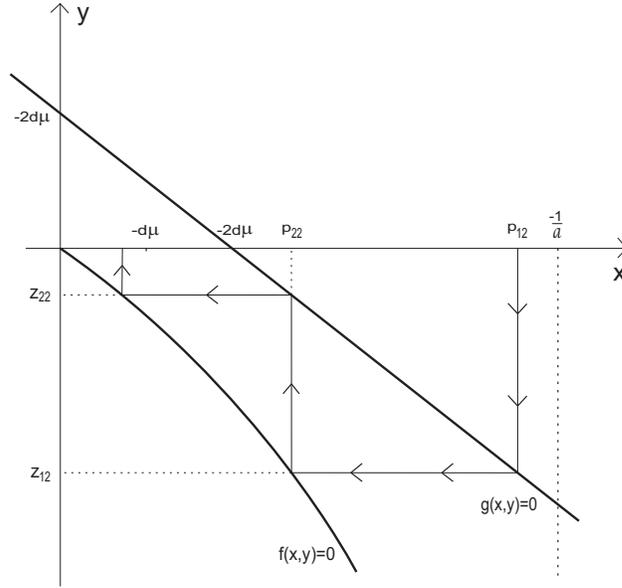


Figura 3.9: Iteraciones del mapeo de Poincaré para  $a < 0$ .

### 3.4. Bifurcación pseudo-Hopf en sistemas en $\mathbb{R}^3$ con un único punto de doble-tangencia.

Considere el SLPPD en forma normal (2.11)

$$\dot{y} = f(y) = \begin{cases} \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1, & \text{si } y_1 < 0, \\ \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

donde  $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , y  $\tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -ad\mu - 1 \end{pmatrix}$ , con  $ad \neq 0$ . Para cualquier valor del parámetro  $\mu$ , el sistema tiene las regiones de deslizamiento y escape  $\tilde{\Sigma}_s$  y  $\tilde{\Sigma}_e$  definidas por (2.12), respectivamente. El campo deslizante en  $\tilde{\Sigma}_s \cup \tilde{\Sigma}_e$  está dado por

$$\dot{z} = f_s(z) = \frac{1}{z_2 - z_1} \begin{pmatrix} z_1 + z_2 + az_1 z_2 \\ (1 + ad\mu)z_1 + z_2 + az_1^2 \end{pmatrix},$$

Cuadro 3.2: Dinámica para el campo deslizante regularizado.

	$ad\mu < -1$	$-1 \leq ad\mu < 0$	$0 < ad\mu$
$z = 0$	Foco inestable	Nodo inestable	Silla
$z = p_0$	Silla	Silla	Nodo

donde  $z = (y_2, y_3)^T$ , el cual tiene el único punto de equilibrio

$$p_0 = \left( \frac{1}{2a} \left( -2 - ad\mu + \sqrt{4 + (ad\mu)^2} \right), \frac{1}{2a} \left( -2 + ad\mu + \sqrt{4 + (ad\mu)^2} \right) \right)^T,$$

ya que  $p_{01}p_{02} = \frac{2 - \sqrt{4 + (ad\mu)^2}}{a^2} < 0$ . Note que este equilibrio no puede ser equilibrio frontera de (3.13). La matriz Jacobiana está dada por,

$$Df_s(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{ad\mu + \sqrt{4 + (ad\mu)^2}}{2d\mu} & \frac{-ad\mu + \sqrt{4 + (ad\mu)^2}}{2d\mu} \\ \frac{-1 + \sqrt{4 + (ad\mu)^2}}{d\mu} & \frac{1}{d\mu} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

No es difícil ver que las matrices Jacobianas (3.9) y (3.14) son similares.

**Lema 4.** (i) Si  $d\mu < 0$ , entonces  $p_0 \in \tilde{\Sigma}_s$ .

(ii) Si  $d\mu > 0$ , entonces  $p_0 \in \tilde{\Sigma}_e$ .

(iii) Si  $ad\mu < 0$ , entonces  $p_0$  es un punto silla.

De nuevo, la Tabla 3.1 nos muestra los cuatro diferentes escenarios para la bifurcación pseudo-Hopf.

Para describir la dinámica alrededor de la singularidad de doble-tangencia,  $z = 0$ , analizaremos el campo deslizante regularizado en el plano  $f_{reg}(z) = (z_2 - z_1)f_s(z)$  ver [36, 98]. Observe que éstos son topológicamente equivalentes en  $\tilde{\Sigma}_e$  y en tiempo hacia atrás en  $\tilde{\Sigma}_s$ . En general, el campo deslizante regularizado tiene tres equilibrios:  $z = 0$ ,  $z = p_0$ , y un tercer equilibrio en la región de cruce (es decir, el tercer equilibrio es un equilibrio virtual de  $f_s(z)$  y por lo tanto no será discutido). Luego, los espectros de la Jacobiana en los equilibrios son:

$$\sigma(Df_{reg}(0)) = \{1 \mp \sqrt{1 + ad\mu}\}, \text{ con vectores propios } v_{1,2} = (1, \mp \sqrt{1 + ad\mu})^T, \text{ y } \sigma(Df_{reg}(p_0)) = \left\{ \frac{1}{4} \left( 2 + ad\mu - \sqrt{4 + (ad\mu)^2} \mp \sqrt{40 + 4ad\mu + 10(ad\mu)^2 + \sqrt{4 + (ad\mu)^2}(12 + 6ad\mu)} \right) \right\} \text{ con vectores propios } v_1^T = (1, 1) \text{ y } v_2^T = \left( -1, \frac{2(\sqrt{4 + a^2 d^2 \mu^2} - 1)}{\sqrt{4 + a^2 d^2 \mu^2} - ad\mu} \right).$$

La Tabla 3.2 nos muestra la dinámica para el campo deslizante regularizado.

Si  $ad\mu > 0$ ,  $z = 0$  y  $z = p_0$  se conectan por la variedad estable (inestable)  $W_{z=0}^{s(e)} \subset \tilde{\Sigma}_s \cup \tilde{\Sigma}_e$ . Si  $-1 \leq ad\mu < 0$ , ahora  $z = 0$  y  $z = p_0$  se conectan por la variedad estable  $W_{p_0}^s \subset \tilde{\Sigma}_s \cup \tilde{\Sigma}_e$ . En ambos casos, la curva invariante que pasa por el origen,  $z_2 = H(z_1)$ , y conecta los equilibrios,

es tangente al espacio propio  $E_{v_1}$ , esto es,  $H'(0) = \alpha\sqrt{1+ad\mu}$ , para algún  $\alpha$ . Finalmente, si  $ad\mu < -1$ , la solución que conecta los equilibrios no está totalmente contenida en  $\tilde{\Sigma}_s \cup \tilde{\Sigma}_e$ . Ver Figuras 3.10 y 3.11(b).

**Lema 5.** (i) Si  $ad\mu > 0$ , entonces el origen es un punto regular del campo deslizante, esto es,  $f_s(0) = \alpha v_1$ , para algún  $\alpha$ . Ver Figura 3.10(a).

(ii) Si  $-1 \leq ad\mu < 0$ , entonces el origen es multivaluado. Ver Figura 3.10(b).

*Demostración.* Sólo observe que

$$\lim_{z_1 \rightarrow 0} f_s(z_1, H(z_1)) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1.$$

□

**Observación 25.** Observe que si  $\mu = 0$  en el campo deslizante regularizado, el equilibrio  $p_0$  colapsa al origen, el cual es ahora un punto silla-nodo. La Figura 3.11(b) ilustra la dinámica en  $\tilde{\Sigma}_s \cup \tilde{\Sigma}_e$  para  $a < 0$ .

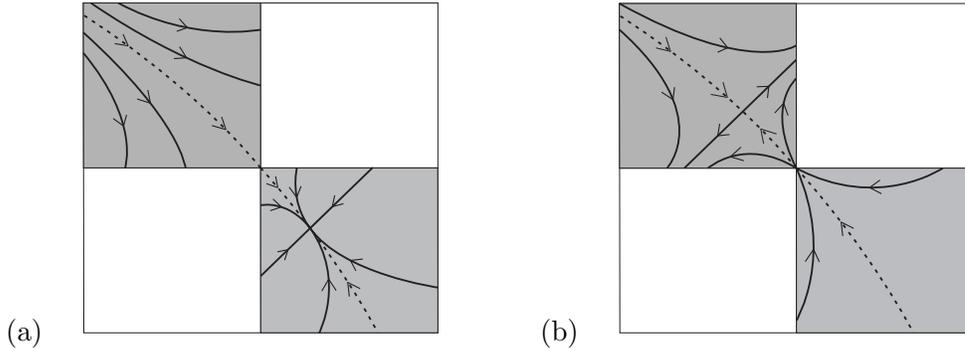


Figura 3.10: (a): Para  $ad\mu > 0$  el campo deslizante es regular en el origen. (b): Para  $-1 \leq ad\mu < 0$  el campo deslizante es multivaluado en el origen. Las líneas punteadas denotan la variedad estable  $W_{p_0}^s$ . En ambos casos el origen es una singularidad de doble-tangencia invisible.

**Teorema 8.** Considere el SLPPD

$$\dot{y} = f(y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -ad\mu - 1 \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 > 0. \end{cases}$$

Si  $ad \neq 0$ , entonces el sistema presenta la bifurcación pseudo-Hopf cuando  $\mu = 0$ .

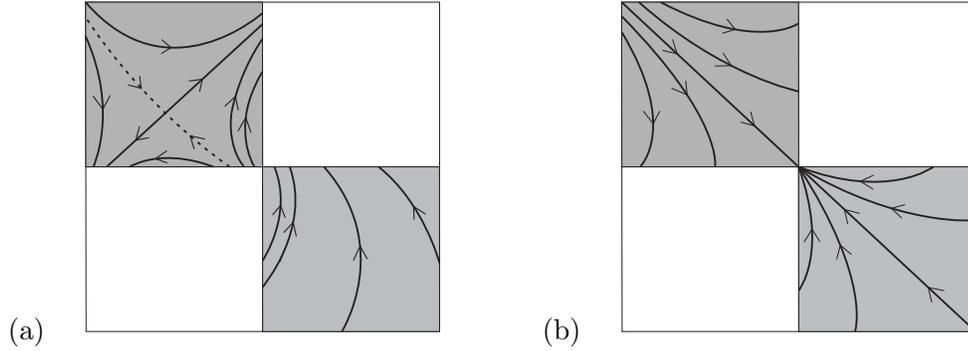


Figura 3.11: (a): Para  $1 + ad\mu < 0$  el campo deslizante regularizado tiene un foco inestable en el origen, el cual es una singularidad visible-invisible. (b): Para  $\mu = 0$  el campo deslizante regularizado tiene una silla-nodo en el origen.

- (i) Si  $ad\mu < 0$ , el sistema tiene un único ciclo límite “circundando” la pseudo-silla  $p_0$ . Si  $a < 0$  ( $a > 0$ ), el ciclo límite es estable (inestable) de forma asintótica.
- (ii) Si  $ad\mu > 0$ , el sistema tiene un pseudo-nodo en  $p_0$ . Para  $a < 0$  ( $a > 0$ ), el pseudo-nodo es estable (inestable) de forma asintótica.

*Demostración.* (i). Procedemos de manera similar al teorema anterior. Para  $y_1 < 0$ , el flujo está dado por

$$\begin{aligned} \psi_t(y_0) &= e^{t\tilde{A}_1} \left( y_0 + \int_0^t e^{-s\tilde{A}_1} \tilde{b}_1 ds \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-2(e^{at}-1)(y_{02}-y_{03}+d\mu)+a(-t^2+2y_{10}+2ty_{02}+2td\mu)}{2a} \\ -t + y_{02} \\ -t + y_{02} - e^{at}(y_{02} - y_{03} + d\mu) + d\mu \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y para  $y_1 > 0$ ,

$$\begin{aligned} \phi_t(y_0) &= e^{t\tilde{A}_2} \left( y_0 + \int_0^t e^{-s\tilde{A}_2} \tilde{b}_2 ds \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{at}(1+ay_{02})-a(t+y_{02})-1+a^2y_{01}}{a^2} \\ \frac{e^{at}(1+ay_{02})-1}{a} \\ \frac{e^{at}(1+ay_{02})-1+a(-y_{02}+y_{03})}{a} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que el plano  $\pi(y_2, y_3) = y_3 - y_2 - d\mu = 0$  es invariante bajo el flujo global. Para demostrar la existencia del ciclo límite es suficiente con mostrar que existen puntos  $\hat{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{12} \\ q_{13} \end{pmatrix}$ , con  $q_{12} > 0$  y  $\hat{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{22} \\ q_{23} \end{pmatrix}$ , con  $q_{22} < 0$ , y tiempos  $t_1 > 0$  y  $t_2 > 0$ , tales que el

siguiente sistema tiene solución

$$\begin{cases} \phi_{t_1}(\hat{q}_1) = \hat{q}_2 \\ \psi_{t_2}(\hat{q}_2) = \hat{q}_1 \end{cases} \quad (3.15)$$

De nuevo, no es difícil ver que el sistema (3.15) tiene solución si y sólo si ,  $t_0 = t_1 = t_2 = q_{12} - q_{22}$ ,  $q_{13} = \frac{1}{2}t_0$ ,  $q_{23} = -\frac{1}{2}t_0$ , y

$$\begin{aligned} f(q_{12}, q_{22}) &= e^{a(q_{12}-q_{22})}(1 + aq_{22}) - (1 + aq_{12}) = 0, \\ g(q_{12}, q_{22}) &= q_{12} + q_{22} + 2d\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

De la Proposición 7 se sigue que el sistema (3.16) tiene solución única si  $ad\mu < 0$ . El ciclo límite es la órbita por pedazos

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) = \phi_t(q_1), & \text{si } t \in [0, t_0], \\ \gamma_2(t) = \psi_{t-t_0}(q_2), & \text{si } t \in [t_0, 2t_0], \end{cases}$$

el cual está sobre el plano invariante  $\pi(y_2, y_3) = 0$ .

Ahora vamos a probar la estabilidad para el caso  $a < 0$ . De nuevo, el ciclo límite no es globalmente estable debido a la variedad estable  $W_{p_0}^s$ . Definamos la sección de Poincaré  $D = \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 > 0, y_3 > 0\}$  y el mapeo de Poincaré  $P : D \rightarrow D$  dado por

$$p_{i+1} = P(p_i) = \psi_{s_i}(\phi_{\tau_i}(p_i)), \quad (3.17)$$

donde  $t = \tau_i > 0$  es tal que

$$\phi_{\tau_i}(p_i) = z_i = \begin{pmatrix} 0 \\ z_{i2} \\ z_{i3} \end{pmatrix},$$

y  $t = s_i > 0$  satisface

$$\psi_{s_i}(z_i) = p_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{i+1,2} \\ p_{i+1,3} \end{pmatrix}.$$

Para  $i = 1$ ,  $\tau_1 = p_{12} - z_{12}$ ,  $s_1 = p_{22} - z_{12}$ , y

$$\begin{aligned} e^{a\tau_1}\pi(p_{12}, p_{13}) - \pi(z_{12}, z_{13}) &= 0, \\ 2(e^{a\tau_1} - 1)\pi(p_{12}, p_{13}) + a(p_{12} - z_{12})g(p_{12}, z_{12}) &= 0, \\ f(p_{22}, z_{12}) &= 0, \\ \pi(p_{22}, p_{23}) - \pi(z_{12}, z_{13}) &= 0. \end{aligned}$$

Para  $i = 2$ ,  $\tau_2 = p_{22} - z_{22}$ ,  $s_2 = p_{32} - z_{22}$ , y

$$\begin{aligned} e^{a\tau_2}\pi(p_{22}, p_{23}) - \pi(z_{22}, z_{23}) &= 0, \\ 2(e^{a\tau_2} - 1)\pi(p_{22}, p_{23}) + a(p_{22} - z_{22})g(p_{22}, z_{22}) &= 0, \\ f(p_{32}, z_{22}) &= 0, \\ \pi(p_{32}, p_{33}) - \pi(z_{22}, z_{23}) &= 0. \end{aligned}$$

En general, para  $i = k$ ,  $\tau_k = p_{k2} - z_{k2}$ ,  $s_k = p_{k+1,2} - z_{k2}$ , y

$$e^{a\tau_k} \pi(p_{k2}, p_{k3}) - \pi(z_{k2}, z_{k3}) = 0, \quad (3.18)$$

$$2(e^{a\tau_k} - 1)\pi(p_{k2}, p_{k3}) + a(p_{k2} - z_{k2})g(p_{k2}, z_{k2}) = 0, \quad (3.19)$$

$$f(p_{k+1,2}, z_{k2}) = 0, \quad (3.20)$$

$$\pi(p_{k+1,2}, p_{k+1,3}) - \pi(z_{k2}, z_{k3}) = 0. \quad (3.21)$$

De (3.21) y (3.18), se sigue que

$$\pi(p_{k+1,2}, p_{k+1,3}) = e^{a\tilde{\Sigma}_{i=1}^k \tau_i} \pi(p_{12}, p_{13}) \rightarrow 0, \text{ for } k \rightarrow +\infty.$$

De (3.19) concluimos que  $g(p_{k2}, z_{k2}) \rightarrow 0$  para  $k \rightarrow +\infty$ . Entonces, para  $k$  suficientemente grande,

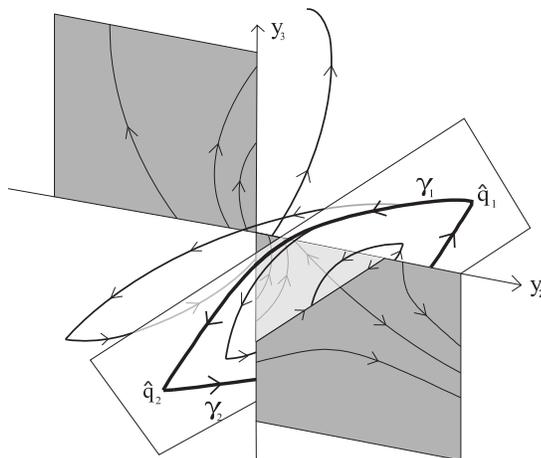
$$\begin{aligned} g(p_{k2}, z_{k2}) &\approx 0, \\ f(p_{k+1,2}, z_{k2}) &= 0, \end{aligned}$$

entonces,  $p_k \rightarrow q_1$  para  $k \rightarrow +\infty$ .

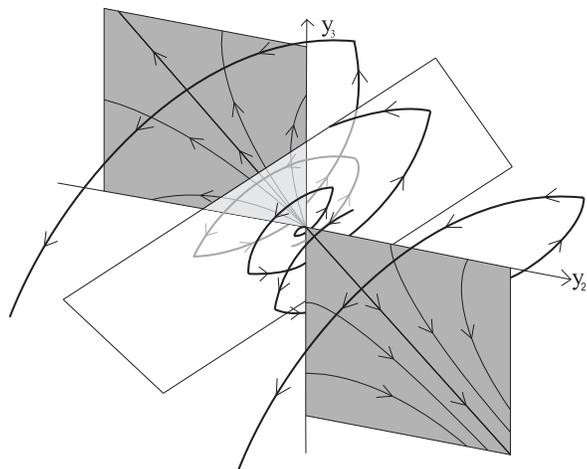
(ii). Definimos el mismo mapeo de Poincaré (3.17). Para  $a < 0$  ( $a > 0$ ) cualquier solución que empiece en  $D$  converge a  $\tilde{\Sigma}_s(\tilde{\Sigma}_e)$  cuando  $t \rightarrow \infty(-\infty)$ .  $\square$

**Corolario 5.** Para  $\mu = 0$ , el sistema (3.13) tiene la singularidad de doble-tangencia  $x_0 = 0$  como un sumidero (fuente) global si  $a < 0$  ( $a > 0$ ).

$$\mu < 0$$



$$\mu = 0$$



$$\mu > 0$$

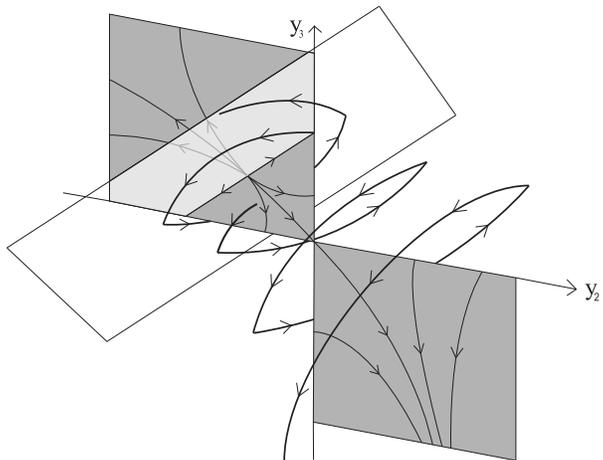


Figura 3.12: Escenario de la bifurcación pseudo-Hopf subcrítica para  $a > 0$  y  $d > 0$ . Para  $\mu < 0$  el ciclo límite es inestable de forma asintótica, para  $\mu = 0$  el origen es inestable de forma asintótica, y para  $\mu > 0$  el pseudo-nodo es inestable de forma asintótica.

*Demostración.* Considere el mismo mapeo de Poincaré (3.17). Observe que el plano  $y_3 = y_2$  es invariante bajo el flujo global. Entonces, cualquier solución que parte de la región de escape nunca llega a la región de deslizamiento.  $\square$

La Figura 3.12 ilustra la bifurcación pseudo-Hopf subcrítica para  $a > 0$  y  $d > 0$ .

### 3.5. Unicidad del ciclo límite para ambos casos en $\mathbb{R}^3$ .

Considere la función

$$f(u, v) = e^{a(u-v)}(1 + av) - (1 + au),$$

donde  $u > 0$  y  $v < 0$ .

**Lema 6.** *Supongamos que  $f(u, v) = 0$ . Entonces,*

(i) *Si  $a < 0$  entonces  $0 < u < -\frac{1}{a}$ .*

(ii) *Si  $a > 0$  entonces  $-\frac{1}{a} < v < 0$ .*

Observe que

$$f(u, v) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{av}}{1 + av} = \frac{e^{au}}{1 + au}.$$

Definamos la función  $H(z) = \frac{e^{az}}{1+az}$ , entonces, para cada  $u > 0$ , existe un único  $v < 0$  tal que  $H(v) = H(u)$ , esto es, existe una función real  $h$ , con  $h(0) = 0$ , tal que  $f(u, h(u)) = 0$  para cada  $u > 0$ . En otras palabras,  $H(h(u)) = H(u)$ . Ver Figura 3.13.

Observe que

$$H'(z) = \frac{a^2 e^{az} z}{(1 + az)^2}, \quad H''(z) = \frac{a^2 e^{az} (1 + a^2 z^2)}{(1 + az)^3} > 0.$$

Vamos a suponer que  $a < 0$  (el caso positivo es similar).

**Lema 7.** *Para  $u \in (0, -\frac{1}{a})$ ,  $G(u) = H(u) - H(-u) > 0$ .*

*Demostración.* Observe que  $G(0) = 0$  y  $G'(u) = \frac{a^2 e^{-au} u (1+au)^2}{(a^2 u^2 - 1)^2} (R^2(u) - 1)$ , donde  $R(u) = \frac{e^{au}(1-au)}{1+au}$ . Pero  $R(0) = 1$  y  $R'(u) = -\frac{ae^{au}(1+a^2u^2)}{(1+au)^2} > 0$ , entonces  $R(u) > 1$ , esto es  $R^2(u) > 1$ , se sigue entonces que  $G'(u) > 0$ .  $\square$

**Lema 8.** *Para  $u \in (0, -\frac{1}{a})$ ,  $u + h(u) < 0$ .*

*Demostración.* Para  $u \in (0, -\frac{1}{a})$  existe  $v = h(u)$  tal que  $H(h(u)) = H(u) > H(-u)$ , (del lema 7). Pero  $H(z)$  es una función monótona decreciente para cada  $z < 0$ , entonces  $h(u) < -u$ .  $\square$

**Lema 9.**  *$h$  es una función monótona decreciente.*

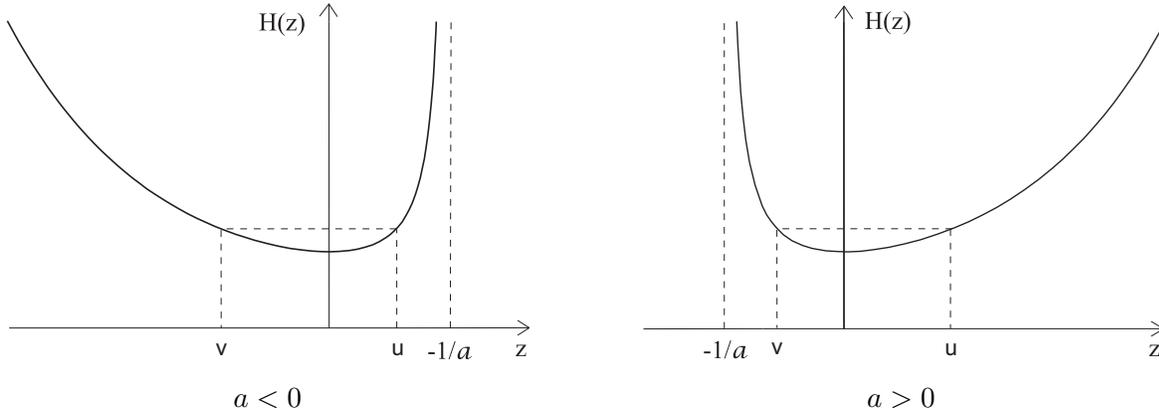


Figura 3.13: Definición de la función  $H(z)$ .

*Demostración.* De la propiedad  $H(h(u)) = H(u)$ , y la regla de la cadena,  $h'(u) = \frac{H'(u)}{H'(h(u))} = \frac{(1+ah(u))u}{(1+au)h(u)} < 0$ , y

$$\begin{aligned} h''(u) &= \frac{H''(h(u))}{H'(h(u))} \left( \frac{H''(u)}{H''(h(u))} - (h'(u))^2 \right) \\ &= \frac{H''(h(u))}{H'(h(u))} \left( \frac{1+ah(u)}{1+au} \right)^2 \left( \frac{(u+h(u))(h(u)-u)}{h^2(u)(1+a^2h^2(u))} \right) < 0, \end{aligned}$$

ya que  $H'(h(u)) < 0$ . □

**Lema 10.**  $h'(0) = -1$

*Demostración.* Sólo definamos  $h'(0) = \lim_{u \rightarrow 0^+} h'(u)$ , y usamos la regla de L'Hopital. □

Hemos probado la siguiente proposición, la cual se ilustra en la Figura 3.7.

**Proposición 7.** *El sistema*

$$\begin{aligned} f(u, v) &= e^{a(u-v)}(1+av) - (1+au) = 0, \\ g(u, v) &= u + v + 2d\mu = 0, \end{aligned}$$

tiene solución única si  $ad\mu < 0$ .

---

## Capítulo 4

# Bifurcación de Hopf en los campos deslizantes

---

Estamos interesados en el campo deslizante regularizado  $f_{reg}(z) = (z_1 - z_2)f_s(z)$ , ya que lo que pase en él de alguna manera repercute en la dinámica espacial, especialmente si ocurre una bifurcación, ver [23, 24, 53]. Esto es, si analizamos el campo  $f_{reg}(z)$  (aprovechando su suavidad), entonces podemos usar toda la herramienta conocida, especialmente en el análisis de bifurcaciones y en particular para ésta tesis, el Teorema de la bifurcación de Hopf. En este capítulo mostraremos la ocurrencia de la bifurcación de Hopf en los campos deslizantes regularizados, esto aprovechando las formas normales obtenidas en el capítulo anterior. Estableceremos un teorema para cada uno de los campos, en el cual se dan condiciones suficientes para que presenten la bifurcación de Hopf en un equilibrio.

**Conjetura 1.** *Considere un SLPPD en tres dimensiones y su respectivo campo deslizante regularizado en dos dimensiones. Si ocurre la bifurcación de Hopf en un punto  $z_0 \in \partial\Sigma_s \cup \partial\Sigma_e \cup \partial\Sigma_c$ , esto es, en un punto de tangencia, entonces es posible que ocurra una bifurcación tipo Hopf para el sistema en tres dimensiones.*

### 4.1. Bifurcación de Hopf en el caso con un único punto de doble-tangencia

Considere el SLPPD en forma normal (2.11)

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ b_{13} \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_{22} \\ r_2 \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

El campo regularizado en  $\Sigma$  se expresa como

$$f_{reg}(z) = \begin{pmatrix} d_2 z_1^2 + (d_3 - c_2) z_1 z_2 - c_3 z_2^2 + b_{22} z_1 - r_1 z_2 \\ d_5 z_1^2 + (d_6 - c_5) z_1 z_2 - c_6 z_2^2 + r_2 z_1 - b_{13} z_2 \end{pmatrix}.$$

Observe que lo podemos reescribir como sigue,

$$f_{reg}(z) = Lz + \frac{1}{2} z^T \mathcal{B} z, \quad (4.2)$$

donde  $L = \begin{pmatrix} b_{22} & -r_1 \\ r_2 & -b_{13} \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ , con

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2d_2 & d_3 - c_2 \\ d_3 - c_2 & -2c_3 \end{pmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{pmatrix} 2d_5 & d_6 - c_5 \\ d_6 - c_5 & -2c_6 \end{pmatrix}.$$

Suponga que existe un punto  $z_0 \in \bar{\Sigma}_a = \Sigma_a \cup \partial\Sigma_a$ , para  $a \in \{s, e\}$  tal que:

$$(C1) \quad f_{reg}(z_0) = 0,$$

$$(C2) \quad \sigma(Df_{reg}(z_0)) = \{\pm i\omega_0\}.$$

Estamos interesados en determinar cuál de los diez coeficientes en el sistema (4.2) es sensible a la bifurcación de Hopf, es decir, cuál de los diez coeficientes se puede perturbar para que el sistema presente la bifurcación de Hopf. Considere el sistema perturbado

$$f_p(z, \mu) = Lz + \frac{1}{2} z^T \mathcal{B} z + L_1(\mu)z + \frac{1}{2} z^T \mathcal{B}_1(\mu)z,$$

donde  $L_1(\mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{B}_1(\mu) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$ , con

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2\mu_5 & \mu_6 \\ \mu_6 & 2\mu_7 \end{pmatrix}, \text{ y } D_2 = \begin{pmatrix} 2\mu_8 & \mu_9 \\ \mu_9 & 2\mu_{10} \end{pmatrix}.$$

Siguiendo la fórmula (1.8) para calcular la velocidad de cruce, para el campo perturbado  $f_p(z, \mu)$ , en el equilibrio  $(z_0, 0)$ , obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_p}{\partial \mu}(z_0, 0) &= \begin{pmatrix} z_0^T & 0 & 0 & r_0^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_0^T & 0 & 0 & 0 & r_0^T \end{pmatrix}, \\ Df_p(z_0, 0) &= L + z_0^T \mathcal{B}, \\ D^2 f_p(z_0, 0) &= \mathcal{B}, \\ \frac{\partial^2 f_p}{\partial z \partial \mu}(z_0, 0) &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} z_0^T &= (z_{01}, z_{02}), \\ r_0^T &= (z_{01}^2, z_{01}z_{02}, z_{02}^2), \\ \mathcal{L}_1^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2z_{01} & z_{02} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z_{01} & 2z_{02} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}_2^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_{01} & z_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{01} & 2z_{02} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si  $B_i = (B_i^1 \ B_i^2)$ , y

$$(Df_p^{-1}(z_0, 0))^T (B_1^1 + B_2^2) = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$d = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \Delta_1 z_{01} \\ -\Delta_1 z_{02} \\ -\Delta_2 z_{01} \\ 1 - \Delta_2 z_{02} \\ 2z_{01} - \Delta_1 z_{01}^2 \\ z_{02} - \Delta_1 z_{01} z_{02} \\ -\Delta_1 z_{02}^2 \\ -\Delta_2 z_{01}^2 \\ z_{01} - \Delta_2 z_{01} z_{02} \\ 2z_{02} - \Delta_2 z_{02}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

**Observación 26.** Observe que el vector  $d$  siempre es diferente del vector cero para todo  $z_0$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ , es decir, siempre existe una dirección en la cuál ocurre la bifurcación de Hopf.

Hemos probado el siguiente teorema

**Teorema 9.** Considere el SLPPD en forma normal

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ b_{13} \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_{22} \\ r_2 \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 > 0. \end{cases}$$

Sea  $f_{reg}(z) = Lz + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}z$  el campo regularizado y  $z_0$  un equilibrio satisfaciendo las condiciones (C1) y (C2). Entonces, existe una dirección en la cual el sistema perturbado

$$f_p(z, \mu) = Lz + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}z + L_1(\mu)z + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}_1(\mu)z$$

presenta la bifurcación de Hopf en  $z = z_0$  y  $\mu \approx 0$ .

#### 4.1.1. Bifurcación de Hopf fuera del origen

Considere el SLPPD en forma normal

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \\ c_4 & c_5 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & 0 & c_2 \\ d_4 & 0 & c_5 + \tilde{a} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 > 0, \end{cases}$$

con  $\tilde{a} \neq 0$ .

Esta familia genera el siguiente campo regularizado no-lineal en el plano  $\Sigma$

$$\dot{z} = f_{reg}(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}z_1 + 2z_2 \\ -z_1 - 2z_2 + \tilde{a}z_1z_2 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

el cual tiene como equilibrios, al origen y al punto:

$$z_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{a}}(2 - \sqrt{2}) \\ \frac{1}{\tilde{a}}(1 - \sqrt{2}) \end{pmatrix} \in \Sigma_s \cup \Sigma_e.$$

Luego, la matriz Jacobiana en  $z_0$  está dada por,

$$Df_{reg}(z_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

con valores propios  $\pm i\omega_0$ , con  $\omega_0^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$ , así las condiciones (C1) y (C2) se satisfacen en el equilibrio  $z_0$ . Además, la velocidad de cruce  $d$  está dada por (4.3), con  $\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{\sqrt{2}\tilde{a}}{\omega_0^2}$ . Entonces podemos perturbar el sistema original en la dirección en la cual la entrada del vector  $d$  es diferente de cero. Por ejemplo, la tercera entrada de  $d$ ,

$$d_3 = -\frac{1}{2}\Delta_2 z_{01} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

así, perturbaremos el coeficiente de  $z_1$  en la segunda ecuación del sistema (4.4),

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}z_1 + 2z_2 \\ -z_1 - 2z_2 + \tilde{a}z_1z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_3 z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}z_1 + 2z_2 \\ (\mu_3 - 1)z_1 - 2z_2 + \tilde{a}z_1z_2 \end{pmatrix}.$$

La teoría nos dice que el sistema perturbado presentará la bifurcación de Hopf cuando el parámetro de bifurcación  $\mu_3$  difiere ligeramente de su valor nominal  $\mu_3 = 0$ . Para determinar cuando es no-degenerada la bifurcación, debemos determinar el primer coeficiente de Lyapunov. Siguiendo la fórmula (1.6), el primer coeficiente de Lyapunov está dado por

$$a = -\frac{\tilde{a}^2}{8}(1 + \sqrt{2}).$$

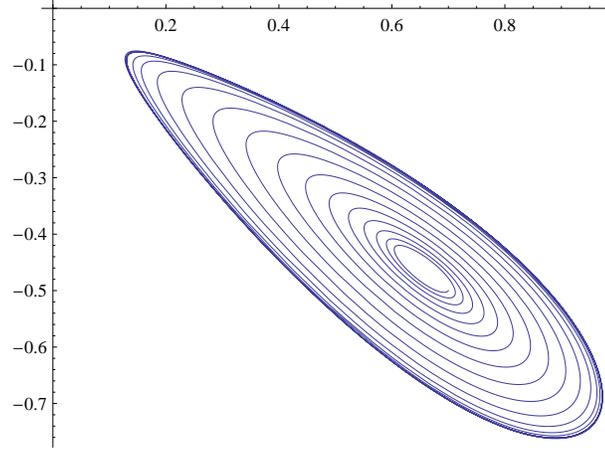


Figura 4.1: *Ciclo límite estable en la región de deslizamiento para  $\mu_3 = 0.05$  y  $\tilde{a} = 1$ .*

Este coeficiente siempre es negativo, así que concluimos que cuando ocurre la bifurcación de Hopf, aparece un ciclo límite estable cuando  $\mu_3 > 0$ . Para que el ciclo límite estable esté localizado en la región de deslizamiento se requiere que  $\tilde{a} > 0$ , y para que esté localizado en la región de escape se requiere que  $\tilde{a} < 0$ . Para observar el ciclo límite estable en la región de deslizamiento, tomamos las condiciones iniciales  $(0, 0.5, -0.22)^T$  y  $(0, 0.7, -0.5)^T$ , con  $\mu_3 = 0.05$ ,  $\tilde{a} = 1$ . Ver Figura 4.1.

**Observación 27.** *Observe que en  $\Sigma_s \cup \Sigma_e$  las oscilaciones aparecen sin importar que ellas existan ó no en cada lado de  $\Sigma$ , considerando la familia perturbada. De hecho, a ambos lados de  $\Sigma$  tendremos sólo dos opciones: No hay puntos de equilibrio ó hay un continuo de puntos de equilibrio. En la mitad del espacio  $\{x_1 < 0\}$  existirá un continuo de equilibrios si se cumple que  $c_1 + c_4 = 0$  con  $c_1 < 0$  y en la mitad del espacio  $\{x_1 > 0\}$  existirá un continuo de puntos de equilibrio si  $\mu_3 = 1 + \frac{\sqrt{2}d_4}{d_1}$ .*

Para un ejemplo de aplicación se puede revisar la cita [27].

#### 4.1.2. Bifurcación de Hopf en el origen

Considere el siguiente SLPPD

$$\dot{x} = \begin{cases} f^-(x) = A_1x + b_1, & \text{si } x_1 < 0, \\ f^+(x) = A_2x + b_2, & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & \mu \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mu \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, el punto de doble-tangencia es del tipo invisible-visible ya que  $r_1 = r_2 = 1$ .

El campo  $f^+$  tiene como único equilibrio al punto  $p_0 = (1, 1, 0)^T$  y el campo  $f^-$  no tiene equilibrios. Los espectros de las matrices  $A_1$  y  $A_2$  son

$$\sigma(A_1) = \{0, 0, 0\}, \quad \sigma(A_2) = \{-1, \frac{1}{2}(\mu \pm i\sqrt{4 - \mu^2})\}.$$

Esta familia genera el siguiente campo regularizado no-lineal en el plano  $\Sigma$

$$\dot{z} = f_{reg}(z, \mu) = \begin{pmatrix} -z_1^2 - z_2 + z_1 z_2 \\ z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix},$$

luego, su matriz Jacobiana está dada por

$$Df_{reg}(z_0, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

con valores propios  $\lambda = \{\frac{1}{2}(\mu \pm i\sqrt{4 - \mu^2})\}$ . La condición de transversalidad se verifica claramente, esto es, la velocidad con la cual los valores propios cruzan el eje imaginario,

$$d = \frac{d}{d\mu}(Re(\lambda(\mu)))|_{\mu=0} = \frac{1}{2}.$$

Ahora podemos proceder a calcular el primer coeficiente de Lyapunov, cuyo signo determina la estabilidad del ciclo límite. Para esto, utilizamos la fórmula para sistemas en el plano y obtenemos

$$a = -\frac{1}{8}$$

Por lo tanto, el ciclo límite es estable y concluimos que el sistema  $f_{reg}(z, \mu)$  presenta una bifurcación de Hopf supercrítica. Ver Figura 4.2.

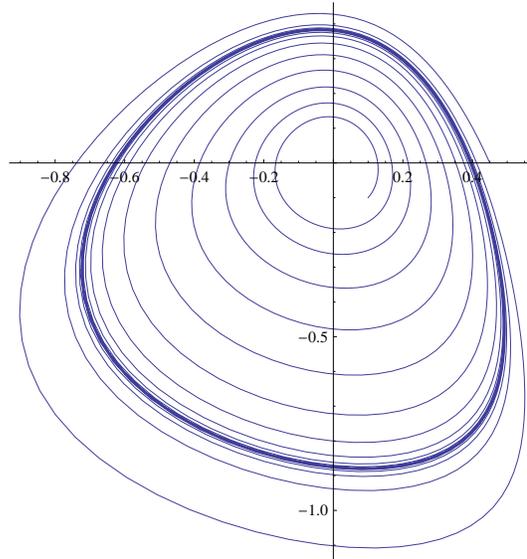


Figura 4.2: *Ciclo límite estable en  $f_{reg}$  para  $\mu = 0.1$ , tomando las condiciones iniciales  $(0.1, -0.1)^T$  y  $(0.454, 0)^T$ .*

Analicemos ahora lo que pasa con el foco en  $\{x_1 > 0\}$  cuando el parámetro  $\mu$  pasa a través del valor crítico cero, esto es, cuando el foco pasa de estable a inestable o viceversa.

**Proposición 8.** *El SLPPD (4.5) tiene un foco estable para  $\mu < 0$ , un centro con una órbita tangente a la singularidad de doble-tangencia para  $\mu = 0$ , y un ciclo límite deslizante estable para  $\mu > 0$ . Ver Figura 4.3.*

El segmento deslizante del ciclo límite deslizante estable es parte del ciclo límite que aparece para  $f_{reg}$  cuando  $\mu > 0$ . Eso es, ambos ciclos límite son creados cuando  $\mu > 0$ , implicando que la bifurcación de Hopf estándar en el campo  $f_{reg}$  provoca la creación de un ciclo límite deslizante en el sistema en tres dimensiones (4.5). Esta es una situación diferente a la que se muestra en la cita [88], donde los autores caracterizan bajo ciertas hipótesis la bifurcación de un ciclo límite de cruce para un SLPPD en el plano.

**Observación 28.** *Note que no es necesaria la ocurrencia de la bifurcación de Hopf en  $f_{reg}$  para que emerge en ciclo límite deslizante en (4.5). Más aún, podemos construir una familia de SLPPD en tres dimensiones con un plano invariante cuya dinámica esté dada por un SLPPD como en la cita [62].*

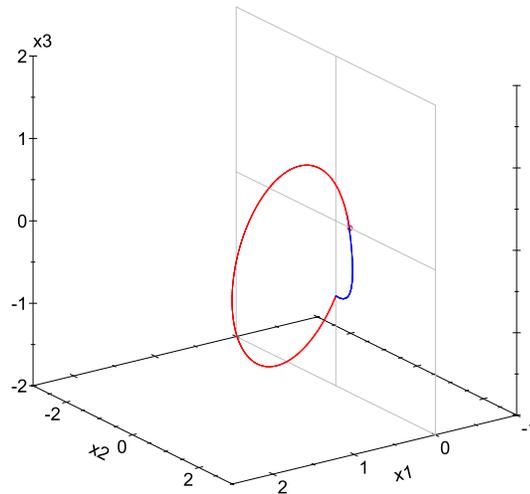


Figura 4.3: *Ciclo límite deslizante estable para  $\mu = 0.1$ . El segmento deslizante (mostrado en azul) pertenece a  $\Sigma_s$  y el segmento estándar (mostrado en rojo) pertenece a  $f^+$ .*

## 4.2. Bifurcación de Hopf en el caso sin puntos de doble-tangencia

Considere el SLPPD en forma normal (2.17)

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \delta \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

El campo regularizado en  $\Sigma$  se expresa como

$$f_{reg}(z) = \begin{pmatrix} (d_2 - c_2\gamma_2)z_1^2 + (d_3 - c_3\gamma_2)z_1z_2 + \omega_1z_1 - c_3\delta z_2 - b_{12}\delta \\ (d_5 - c_5\gamma_2)z_1^2 + (d_6 - c_6\gamma_2)z_1z_2 + \omega_2z_1 - c_6\delta z_2 - b_{13}\delta \end{pmatrix}.$$

Observe que lo podemos reescribir como sigue,

$$f_{reg}(z) = C + Lz + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}z, \quad (4.7)$$

donde  $C = \begin{pmatrix} -b_{12}\delta \\ -b_{13}\delta \end{pmatrix}$ ,  $L = \begin{pmatrix} b_{22} - b_{12}\gamma_2 - c_2\delta & -c_3\delta \\ b_{23} - b_{13}\gamma_2 - c_5\delta & -c_6\delta \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ , con

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2(d_2 - c_2\gamma_2) & d_3 - c_3\gamma_2 \\ d_3 - c_3\gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } B_2 = \begin{pmatrix} 2(d_5 - c_5\gamma_2) & d_6 - c_6\gamma_2 \\ d_6 - c_6\gamma_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suponga que existe un punto  $z_0 \in \bar{\Sigma}_a = \Sigma_a \cup \partial\Sigma_a$ , para  $a \in \{s, e\}$  tal que:

$$(C1) \quad f_{reg}(z_0) = 0,$$

$$(C2) \quad \sigma(Df_{reg}(z_0)) = \{\pm i\omega_0\}.$$

Nuevamente estamos interesados en determinar cuál de los diez coeficientes en el sistema (4.7) es sensible a la bifurcación de Hopf. Considere el sistema perturbado

$$f_p(z, \mu) = C + Lz + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}z + C_1(\mu) + L_1(\mu)z + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}_1(\mu)z,$$

donde  $C_1(\mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ ,  $L_1(\mu) = \begin{pmatrix} \mu_3 & \mu_4 \\ \mu_5 & \mu_6 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{B}_1(\mu) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$ , con

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2\mu_7 & \mu_8 \\ \mu_8 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D_2 = \begin{pmatrix} 2\mu_9 & \mu_{10} \\ \mu_{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Siguiendo la fórmula (1.8), para el campo perturbado  $f_p(z, \mu)$ , en el equilibrio  $(z_0, 0)$ , obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_p}{\partial \mu}(z_0, 0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_0^T & 0 & 0 & r_0^T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_0^T & 0 & 0 & r_0^T \end{pmatrix}, \\ Df_p(z_0, 0) &= L + z_0^T \mathcal{B}, \\ D^2 f_p(z_0, 0) &= \mathcal{B}, \\ \frac{\partial^2 f_p}{\partial z \partial \mu}(z_0, 0) &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}z_0^T &= (z_{01}, z_{02}), \\ r_0^T &= (z_{01}^2, z_{01}z_{02}), \\ \mathcal{L}_1^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2z_{01} & z_{02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z_{01} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}_2^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2z_{01} & z_{02} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z_{01} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Si  $B_i = (B_i^1 \ B_i^2)$ , y

$$(Df_p^{-1}(z_0, 0))^T (B_1^1 + B_2^2) = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$d = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta_1 \\ -\Delta_2 \\ 1 - \Delta_1 z_{01} \\ -\Delta_1 z_{02} \\ -\Delta_2 z_{01} \\ 1 - \Delta_2 z_{02} \\ 2z_{01} - \Delta_1 z_{01}^2 \\ z_{02} - \Delta_1 z_{01} z_{02} \\ -\Delta_2 z_{01}^2 \\ z_{01} - z_{01} z_{02} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

**Observación 29.** Observe nuevamente que el vector  $d$  siempre es diferente del vector cero para todo  $z_0$ ,  $\Delta_1$ , y  $\Delta_2$ .

Hemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 10.** *Considere el SLPPD en forma normal*

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \delta \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 > 0. \end{cases}$$

Sea  $f_{reg}(z) = C + Lz + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}z$  el campo regularizado y  $z_0$  un equilibrio satisfaciendo las condiciones (C1) y (C2). Entonces, existe una dirección en la cual el sistema perturbado

$$f_p(z, \mu) = C + Lz + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}z + C_1(\mu) + L_1(\mu)z + \frac{1}{2}z^T \mathcal{B}_1(\mu)z$$

presenta la bifurcación de Hopf en  $z = z_0$  y  $\mu \approx 0$ .

#### 4.2.1. Bifurcación de Hopf fuera del origen

Considere el SLPPD en forma normal

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 2 & 2 \\ c_4 & 2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d_1 & 2 & 2 \\ d_4 & 2 & \tilde{a} - 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} - 2 \\ \mu - 3 \end{pmatrix}, & \text{si } x_1 > 0, \end{cases}$$

con  $\tilde{a} \neq 0$ .

Esta familia genera el campo deslizante no-lineal (4.4)

$$\dot{z} = f_{reg}(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}z_1 + 2z_2 \\ (\mu - 1)z_1 - 2z_2 + \tilde{a}z_1z_2 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

donde  $\mu$  es el parámetro de bifurcación.

#### 4.2.2. Bifurcación de Hopf en el origen

Considere la siguiente familia de SLPPD,

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1x + b_1, & \text{si } x_1 < 0, \\ f^+(x) = A_2x + b_2, & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & \mu & -1 \\ 1 & 1 & \mu \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu - 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mu \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\mu \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El campo  $f^-$  tiene como único equilibrio al punto  $p_0 = (0, 0, 0)^T$ , el cual es un foco y el campo  $f^+$  no tiene equilibrios. Esta familia genera el campo deslizante regularizado (4.1.2)

$$\dot{z} = f_{reg}(z, \mu) = \begin{pmatrix} -z_1^2 - z_2 + z_1 z_2 \\ z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}.$$

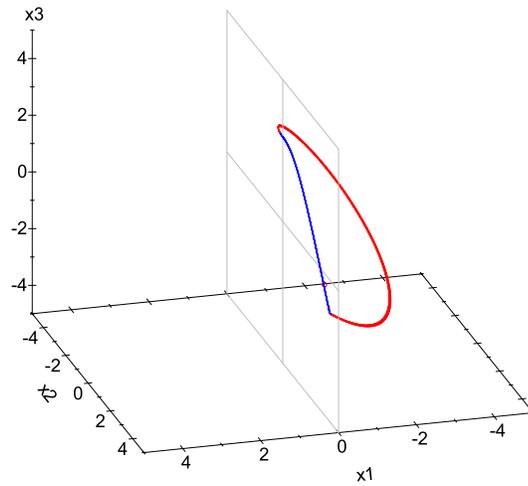


Figura 4.4: *Ciclo límite deslizante estable para  $\mu = 0.05$ . El segmento deslizante (mostrado en azul) pertenece a  $\Sigma_s$  y el segmento estándar (mostrado en rojo) pertenece a  $f^-$ .*

Hasta aquí hemos presentado dos mecanismos para la creación de ciclos límite: la bifurcación pseudo-Hopf y la bifurcación de Hopf usual. Ambas bifurcaciones son locales, nos faltaría considerar bifurcaciones globales como las presentadas en el Capítulo 1. En el siguiente capítulo se considerarán tales bifurcaciones.



# Bifurcaciones globales

---

Una órbita heteroclínica es una órbita que une dos puntos de equilibrio en el espacio fase, es decir, una variedad que forma un lazo cerrado conectando dos puntos de equilibrio. En este tipo de conexión, la variedad inestable de un punto de equilibrio  $p_1$  se une a la variedad estable de otro punto de equilibrio  $p_2$ . Si también sucede que la variedad estable de  $p_1$  se une a la variedad inestable de  $p_2$ , entonces se tiene un ciclo heteroclínico.

Por otro lado, una órbita homoclínica ocurre cuando las variedades estable e inestable del mismo punto de equilibrio se unen. Esas variedades tienen las siguientes propiedades: las trayectorias que parten de condiciones iniciales sobre la variedad estable se aproximan al punto de equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$ ; las trayectorias que parten de condiciones iniciales sobre la variedad inestable se aproximan al punto de equilibrio cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

## 5.1. Conexiones globales

El procedimiento para obtener familias de órbitas heteroclínicas y homoclínicas que presentamos en este trabajo es puramente geométrico, aprovechando la forma normal (2.11) para lograrlo. Para el caso de las órbitas heteroclínicas, consideramos por simplicidad puntos silla tales que sus espectros sean dos valores propios reales negativos y uno real positivo. De esta manera, el espacio propio estable será un plano y el espacio propio inestable será una recta y el mecanismo para construir una órbita heteroclínica es colocar el espacio propio inestable de un equilibrio y el espacio propio estable del otro equilibrio de tal manera que se intersecten en un punto de  $\Sigma_c$ .

Considere el SLPPD en forma normal (2.11)

$$\dot{y} = f(y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ b_{13} \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ b_{22} \\ r_2 \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Enseguida, para simplificar los cálculos haremos otro cambio de coordenadas, esta vez uno por pedazos.

**Lema 11.** *El cambio de coordenadas*

$$\begin{cases} x = P_1 y, & \text{si } y_1 < 0, \\ x = P_2 y, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\text{donde } P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

transforma el sistema (5.1) en

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} \tilde{A}_1 x + b_1, & \text{si } x_1 < 0, \\ \tilde{A}_2 x + b_2, & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

donde

$$\tilde{A}_1 = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_4 & 0 & \tilde{c}_6 \end{pmatrix}, & \text{si } \delta_1 = -c_5, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_4 & \tilde{c}_5 & \tilde{c}_6 \end{pmatrix}, & \text{si } \delta_1 = \frac{c_1}{c_3}, \text{ con } c_3 \neq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \\ 0 & \tilde{c}_5 & \tilde{c}_6 \end{pmatrix}, & \text{si } \delta_1 = \frac{c_4}{c_6}, \text{ con } c_6 \neq 0. \end{cases}$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \tilde{d}_1 & \tilde{d}_2 & 0 \\ \tilde{d}_4 & \tilde{d}_5 & \tilde{d}_6 \end{pmatrix}, & \text{si } \delta_2 = -d_3, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \tilde{d}_2 & \tilde{d}_3 \\ \tilde{d}_4 & \tilde{d}_5 & \tilde{d}_6 \end{pmatrix}, & \text{si } \delta_2 = \frac{d_1}{d_2}, \text{ con } d_2 \neq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \tilde{d}_1 & \tilde{d}_2 & \tilde{d}_3 \\ 0 & \tilde{d}_5 & \tilde{d}_6 \end{pmatrix}, & \text{si } \delta_2 = \frac{d_4}{d_5} \text{ con } d_5 \neq 0, \end{cases}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ b_{13} \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ b_{22} \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos nueve posibles combinaciones para el sistema en forma normal (5.3).

Evidentemente con éste nuevo cambio de coordenadas no se preserva la dinámica deslizante, esto es, uno no puede garantizar la equivalencia topológica entre los campos deslizantes. Sin embargo ésta pérdida de equivalencia no es relevante si uno está interesado en conexiones globales de cruce.

### 5.1.1. Conexiones heteroclínicas

Considere la siguiente familia de SLPPD,

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} A_1x + b_1, & \text{si } x_1 < 0, \\ A_2x + b_2, & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_2 \\ b_{13}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_{22}^2 & 0 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega_1}{b_{13}} \\ b_{13} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{22} \\ \frac{\omega_1}{b_{22}} \end{pmatrix}$$

con  $b_{13} > 0$ ,  $b_{22} < 0$ ,  $b_{13} + b_{22} > 0$ , y

$$\begin{aligned} \omega_1 &= b_{13}^2 + b_{13}b_{22} + b_{22}^2 > 0 \\ \omega_2 &= \frac{b_{22}}{b_{13}}(b_{13} + b_{22}) < 0 \\ \omega_3 &= \frac{b_{13}}{b_{22}}(b_{13} + b_{22}) < 0. \end{aligned}$$

Esta familia tiene un ciclo heteroclínico alrededor del origen, el cual es una singularidad de doble-tangencia invisible ya que  $b_{13}b_{22} < 0$ .

Los espectros de las matrices  $A_1$  y  $A_2$  son

$$\sigma(A_1) = \{b_{13}, b_{22}, -(b_{13} + b_{22})\} = \sigma(A_2)$$

Los puntos de equilibrio de los campos vectoriales en los semiespacios  $\{x_1 < 0\}$  y  $\{x_1 > 0\}$  son respectivamente

$$p_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b_{13}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } p_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b_{22}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El espacio propio inestable de  $p_1$  interseca al espacio propio estable de  $p_2$  en el punto

$$\hat{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_c,$$

y el espacio propio inestable de  $p_2$  interseca al espacio propio estable de  $p_1$  en el punto

$$\hat{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b_{22}}{b_{13}} \\ \frac{b_{13}}{b_{22}} \end{pmatrix} \in \Sigma_c, \text{ ver Figura 5.1.}$$

**Observación 30.** *Es importante notar que el campo deslizante en esta familia siempre tiene un único equilibrio, aunque esto no es fundamental para la creación de el ciclo heteroclínico.*

### 5.1.2. Conexiones homoclínicas

Considere la siguiente familia de SLPPD,

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} A_1x + b_1, & \text{si } x_1 < 0, \\ A_2x + b_2, & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

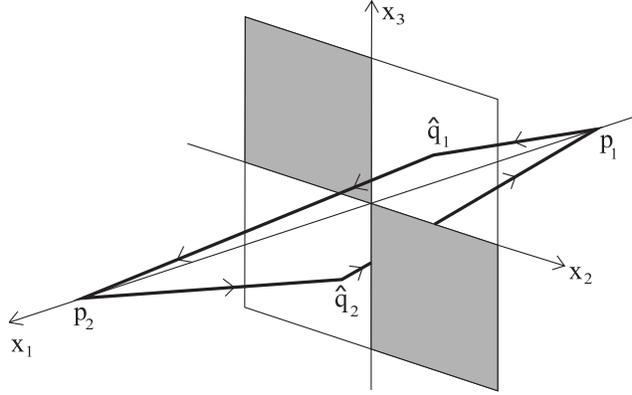


Figura 5.1: Esquema del ciclo heteroclínico para la familia (5.4).

donde  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

con  $r_1 + c_3 > 0$ .

La manera de proceder en este caso fué similar al caso del ciclo heteroclínico, solo que aquí buscamos un flujo en la mitad del espacio  $\{x_1 > 0\}$  tal que conectara directamente los puntos de intersección de los espacios propios asociados al punto de equilibrio en la mitad del espacio  $\{x_1 < 0\}$ .

Los espectros de las matrices  $A_1$  y  $A_2$  son respectivamente

$$\sigma(A_1) = \{-1, -1, 1\} \text{ y } \sigma(A_2) = \{0, i, -i\}$$

En la mitad del espacio  $\{x_1 < 0\}$  ya que  $A_1$  es invertible, el sistema tiene un único punto de equilibrio el cual es un punto silla, esto es  $p_1 = \begin{pmatrix} -(r_1 + c_3) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , y en la mitad del espacio  $\{x_1 > 0\}$  el sistema tiene el continuo de puntos de equilibrio  $\Delta = \{x \in \Sigma : x_3 = 0\}$ . De hecho, el conjunto  $\Delta$  es un conjunto de equilibrios frontera de (5.5).

El espacio propio inestable de  $p_1$  intersecta a  $\Sigma$  en  $\hat{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_c$  y una solución sobre el espacio propio estable de  $p_1$  intersecta a  $\Sigma$  en  $\hat{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \Sigma_c$ .

El flujo en la mitad del espacio  $\{x_1 > 0\}$  está determinado por

$$\phi_t(x) = e^{tA_2}x = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\sin t & 1 & -1 + \cos t \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} x,$$

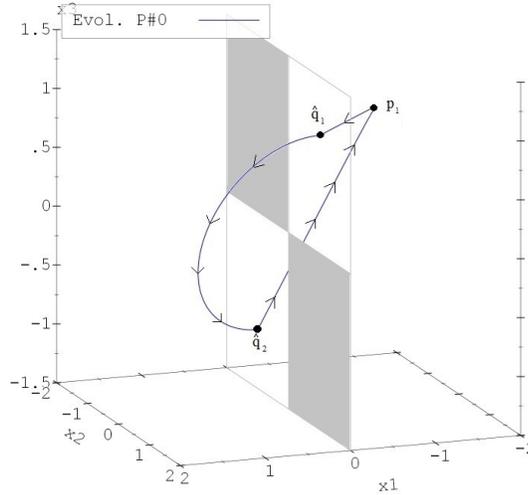


Figura 5.2: Órbita homoclínica para  $r_1 = 1$  y  $c_3 = 0$ .

así,  $\phi_t(\hat{q}_1) = \hat{q}_2$  en  $t = \pi$ . De esta manera, hemos completado la órbita homoclínica, es decir, si tomamos una condición inicial  $p_0 \approx p_1$  sobre el espacio propio inestable de  $p_1$ , entonces  $\psi_{t_1}(p_0) = \hat{q}_1$ ,  $\phi_\pi(\hat{q}_1) = \hat{q}_2$  y  $\psi_t(p_2) \rightarrow p_1$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para observar la órbita homoclínica, hacemos  $r_1 = 1$  y  $c_3 = 0$ . Ver Figura 5.2.

Como podemos ver, es fácil construir conexiones globales mediante SLPPD, algo que no sucede en sistemas suaves. Ahora bien, una vez construida una conexión global ¿podemos perturbarla y provocar una bifurcación?, por ejemplo ¿podrá aparecer un ciclo límite?. El problema es complicado, ya que se debe ubicar el lugar apropiado para la perturbación y son muchos los parámetros que tenemos a nuestra disposición. En la siguiente sección mostraremos que el problema se vuelve más fácil si consideramos una familia conteniendo un plano invariante que capture la dinámica de un SLPPD planar.

## 5.2. Bifurcaciones globales: Un caso de estudio

En esta sección se estudian bifurcaciones globales para una familia de SLPPD en tres dimensiones presentando un único punto de doble-tangencia. Las bifurcaciones a tratar son las bifurcaciones homoclínicas de cruce (ver [66, 67, 75, 104]), bifurcaciones de ciclos deslizantes (bucle y crítico), y la bifurcación tipo ciclo-centro (ver [37, 39, 88]). El análisis de bifurcaciones se hace aprovechando la existencia de un plano invariante.

Considere la siguiente familia tridimensional de SLPPD con dos parámetros

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1x + b, & \text{si } x_1 < 0, \\ f^+(x) = A_2x + b, & \text{si } x_1 > 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\text{donde } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & \mu & 0 \\ -1 & 1 + \mu & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 + \delta \end{pmatrix},$$

con  $|\delta| < 1$  y  $|\mu| < 1$ .

El punto de doble-tangencia (invisible-visible en este caso) no es una singularidad para ésta familia, ya que se cumple que  $f^-(0) = f^+(0) = b$ , esto es, el sistema es continuo en el punto de doble-tangencia.

**Lema 12.** *La familia (5.6) posee el plano invariante  $\pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_2 + \delta\}$  y la dinámica sobre el está dada por el SLPP*

$$\dot{y} = f(y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Luego, este plano es un atractor.

**Observación 31.** *Todas las bifurcaciones que presenta la familia (5.6) suceden sobre el plano invariante  $\pi$ . Observe también que el sistema planar (5.7) está escrito en la forma normal (2.5).*

Los equilibrios de los campos  $f^-(x)$  y  $f^+(x)$  son respectivamente  $p_1 = (-1, 0, \delta)^T$  y  $p_2 = (1 - \delta\mu, -\delta, 0)^T$ , los cuales están sobre el plano invariante  $\pi$ , y los espectros de las matrices  $A_1$  y  $A_2$  son  $\sigma(A_1) = \{-1, -1, 1\}$ ,  $\sigma(A_2) = \{-1, \frac{1}{2}(\mu \pm i\sqrt{4 - \mu^2})\}$ .

Sean  $v_1 = (1, 1, 1)^T$  y  $v_2 = (1, -1, -1)^T$  los vectores propios asociados a los valores propios 1 y -1 de  $A_1$ , respectivamente, entonces  $\langle v_1, v_2 \rangle = \pi$ . Sea  $w = w_1 + iw_2$  el vector propio asociado al valor propio complejo de  $A_2$ , entonces  $\langle w_1, w_2 \rangle = \pi$ . Ver Figura 5.3.

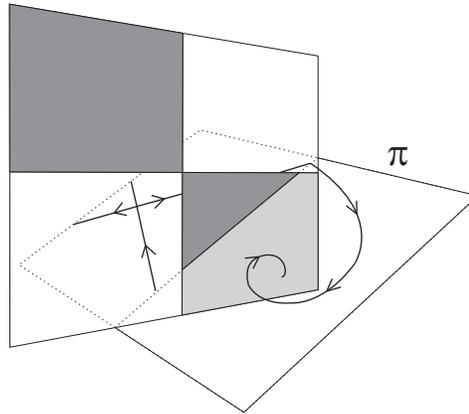


Figura 5.3: Dinámica sobre el plano invariante para el caso cuando  $\langle w_1, w_2 \rangle = E^s(p_2)$ .

El campo deslizante definido en  $\Sigma_s \cup \Sigma_e$  está dado por

$$\dot{z} = f_s(z) = \frac{1}{x_2 - x_3} \begin{pmatrix} \mu x_2^2 + x_2 - x_3 \\ (1 + \mu)x_2^2 - 2x_2x_3 + (1 + \delta)(x_2 - x_3) + x_3^2 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

donde  $z = (x_2, x_3)^T$ . Estamos interesados en el caso cuando  $f_s(z)$  no tiene equilibrios, es decir, cuando  $\delta\mu \leq 0$ . Independientemente de si existen los equilibrios, si tomamos una condición inicial de la forma  $z_0 = (x_{20}, x_{20} + \delta)^T$ , es decir, si tomamos  $z_0 \in (\Sigma_s \cup \Sigma_e) \cap \pi$ , entonces

$$f_s(z_0) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\mu}{\delta}x_{20}^2 \\ 1 - \frac{\mu}{\delta}x_{20}^2 \end{pmatrix}.$$

### 5.2.1. Bifurcación homoclínica de cruce: El caso silla-centro

Si hacemos  $\mu = 0$  y tomamos  $\delta$  como nuestro parámetro de bifurcación en el SLPPD (5.6), éste presenta una bifurcación que solo es posible en sistemas no-suaves y sucede cuando  $\delta$  varía de su valor nominal  $\delta = 0$ .

**Proposición 9.** *Asumiendo  $\mu = 0$  en el SLPPD (5.6), se cumplen la siguientes afirmaciones.*

- (i) *Si  $\delta < 0$ , existe un ciclo-centro estable, es decir, una órbita periódica semiestable  $\gamma(t)$  tangente al punto  $(0, -\delta, 0)^T$ .*
- (ii) *Si  $\delta = 0$ , existe una órbita homoclínica de cruce conectando al punto silla  $p_1$  consigo mismo.*
- (iii) *Si  $\delta > 0$ , existe un ciclo-centro inestable, es decir, una órbita periódica semiestable  $\gamma(t)$  tangente al punto  $(0, -\delta, 0)^T$ .*

**Observación 32.** *Es importante notar que en este caso el campo deslizante es lineal, esto es*

$$f_s(z) = (1, x_2 - x_3 + 1 + \delta)^T$$

Esto es debido a que la singularidad en el origen es removida y más aún, cuando  $\delta = 0$  se cumple que

$$f^-(x) = f^+(x) = (x_2, 1, 1)^T \quad \forall x \in \Sigma \cap \pi.$$

Esto es, el SLPPD (5.6) es continuo en  $\pi$ .

Las siguientes bifurcaciones se obtienen fijando  $\delta$  y tomando  $\mu$  como nuestro parámetro de bifurcación.

### 5.2.2. La bifurcación foco-centro-ciclo deslizante

**Proposición 10.** *Para el SLPPD (5.6) se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- (i) *Si  $-1 < \delta < 0$ , entonces existe un foco estable para  $\mu < 0$ , un ciclo-centro estable para  $\mu = 0$ , y un ciclo límite deslizante estable para  $\mu > 0$ .*
- (ii) *Si  $0 < \delta < 1$ , entonces existe un ciclo límite deslizante inestable para  $\mu < 0$ , un ciclo-centro inestable para  $\mu = 0$ , y un foco inestable para  $\mu > 0$ .*

### 5.2.3. Continuación del ciclo límite deslizante: Bifurcaciones deslizantes

### 5.2.4. Bifurcación bucle

**Proposición 11.** *Para el SLPPD (5.6) se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- (i) *Si  $-1 < \delta < 0$ , entonces existe  $\mu_1 > 0$  tal que el segmento estándar del ciclo límite deslizante estable regresa al segmento deslizante en el punto de tangencia invisible.*
- (ii) *Si  $0 < \delta < 1$ , entonces existe  $\tilde{\mu}_1 < 0$  tal que el segmento estándar del ciclo límite deslizante inestable regresa al segmento deslizante en el punto de tangencia invisible.*

### 5.2.5. Bifurcación ciclo límite crítico

**Proposición 12.** *Para el SLPPD (5.6) se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- (i) *Si  $-1 < \delta < 0$ , entonces existe  $\mu_2 > \mu_1$  tal que el ciclo límite deslizante estable se vuelve un ciclo límite de cruce estable.*
- (ii) *Si  $0 < \delta < 1$ , entonces existe  $\tilde{\mu}_2 < \tilde{\mu}_1$  tal que el ciclo límite deslizante inestable se vuelve un ciclo límite de cruce inestable.*

### 5.2.6. Bifurcación homoclínica de cruce: El caso silla-foco

**Proposición 13.** *Para el SLPPD (5.6) se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- (i) *Si  $-1 < \delta < 0$ , entonces existe un ciclo límite de cruce estable para  $\mu_2 \leq \mu < \mu_3$ , una órbita homoclínica de cruce para  $\mu = \mu_3$ , y un foco inestable para  $\mu > \mu_3$ .*
- (ii) *Si  $0 < \delta < 1$ , entonces existe un ciclo límite de cruce inestable para  $\tilde{\mu}_3 < \mu \leq \tilde{\mu}_2$ , una órbita homoclínica de cruce para  $\mu = \tilde{\mu}_3$ , y un foco estable para  $\mu < \tilde{\mu}_3$ .*

La Figura 5.4 muestra el diagrama de bifurcación de la familia (5.6) para el caso  $\mu \geq 0$  y  $\delta < 0$ .

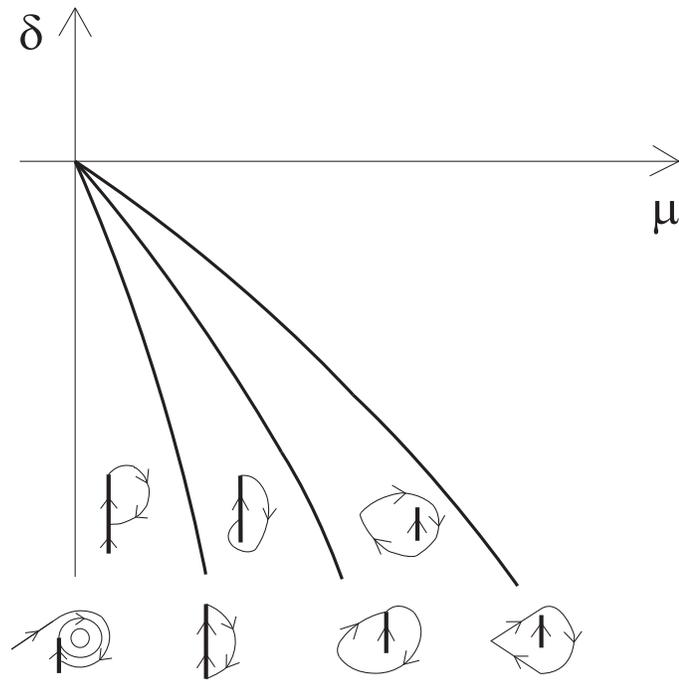


Figura 5.4: Diagrama de bifurcación de la familia (5.6) para el caso  $\mu \geq 0$  y  $\delta < 0$ .



# Conclusiones

---

- Dado un sistema lineal por pedazos discontinuo (SLPPD) en  $n$  dimensiones, dimos una clasificación de acuerdo a la existencia de los puntos de doble-tangencia, la cual nos permite establecer condiciones para desdoblar conjuntos deslizantes o de cruce, según el fenómeno deseado. Con dicha clasificación pudimos construir formas normales en dos y tres dimensiones, mediante cambios de coordenadas los cuales tienen la virtud de preservar los segmentos en la conmutación, algo que no se toma mucho en cuenta si se busca dinámica de cruce. Sin embargo, si deseamos analizar bifurcaciones que involucren deslizamiento, esto se vuelve fundamental.
- Establecimos bajo que condiciones una familia de SLPPD con una recta de conmutación, la cual satisface la condición genérica de tener un punto de tangencia en cada zona, presenta la bifurcación pseudo-Hopf. Es importante mencionar que el desdoblamiento de ésta bifurcación tiene siete parámetros, pero al momento de que se establece la dinámica en cada zona, el número de parámetros se reduce a cinco. Sin embargo, en nuestro resultado no es necesario establecer a priori la dinámica en cada zona. Aunque el fenómeno de la bifurcación pseudo-Hopf ha sido estudiado en muchos artículos, siempre ha sido en el contexto de la búsqueda de múltiples ciclos límite de cruce y a nuestro conocimiento nunca se había establecido un resultado similar al que presentamos aquí.
- Mostramos la ocurrencia de la bifurcación pseudo-Hopf para dos familias de SLPPD en tres dimensiones. En ambas familias mostramos que no es necesario tener puntos de equilibrio reales ni virtuales en cada zona para que ocurra la bifurcación pseudo-Hopf. Para el caso de SLPPD con un único punto de doble-tangencia, mostramos que la bifurcación pseudo-Hopf ocurre sin pedir dos tangencias invisibles. Aunque solo se consideró el caso sin equilibrios en ambos semiespacios, es posible abordar todos los casos si consideramos familias conteniendo un plano invariante.
- Observamos que para SLPPD en tres dimensiones siempre hay una dirección en el espacio de parámetros en la cual es posible provocar la bifurcación de Hopf usual. Esto fue posible gracias a que las formas normales en tres dimensiones generan expresiones canónicas para los campos deslizantes. Así, podemos buscar ciclos límite en tres dimensiones que sean generados de alguna manera por la Bifurcación de Hopf en los campos deslizantes definidos en el plano de conmutación.

- Aprovechando que la presencia de planos invariantes permite reducir el análisis de bifurcaciones de ciclos límite en tres dimensiones, construimos un caso de estudio que presenta ciclos límite mediante mecanismos distintos a la bifurcación pseudo-Hopf. Esto es, observamos que si consideramos una familia con un punto de doble-tangencia con una de las tangencias visible, entonces es necesaria la presencia de un foco en una zona para poder generar un ciclo límite de cruce.

## 6.1. Problemas abiertos

- Demostrar la ocurrencia de la bifurcación pseudo-Hopf en SLPPD genéricos en el espacio.
- Establecer condiciones para que los SLPPD tengan variedades invariantes.
- Formalizar el estudio de generar ciclos límite deslizantes mediante la bifurcación de Hopf usual.
- Estudiar la generación de atractores caóticos mediante bifurcaciones de pseudo-equilibrios.
- Desdoblar la bifurcación silla-nodo para ciclos límite en SLPPD en el plano.

## 6.2. Eventos

Los eventos y/o congresos, en los cuales se presentaron los diferentes resultados en esta tesis, son:

- Julio 2016-4th Colloquium on Dynamical Systems, Control and Applications (DySCA-IV), México, DF. Poster: On the birth of sliding limit cycles by the usual Hopf bifurcation.
- Marzo 2016-VII Taller de Sistemas Dinámicos y Control, dentro del marco de la XXVI Semana Nacional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Título de la plática: Bifurcaciones globales en una familia de sistemas Filippov.
- Febrero 2016-International conference on Open problems in Nonsmooth Dynamics among of the Intensive Research Programme on Advances in Nonsmooth Dynamics in Barcelona, Spain. Poster: Global bifurcations in a class of discontinuous piecewise linear systems.
- Octubre 2015-XLVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Hermosillo, Sonora. Título de la plática: Conexiones Globales en Sistemas Suaves por Pedazos.
- Marzo 2015-VI Taller de Sistemas Dinámicos y Control, dentro del marco de la XXV Semana Nacional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Título de la plática: Campos deslizantes y singularidades doble-tangencia en un sistema tipo Filippov.

- Octubre 2014-XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, Cancún, Quintana Roo. Título de la plática: La Bifurcación de Hopf en una Clase de Sistemas Lineales por Pedazos.
- Marzo 2014-V Taller de Sistemas Dinámicos y Control, dentro del marco de la XXIV Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas. Título de la plática: Bifurcaciones en campos deslizantes.

### 6.3. Artículos de Investigación

Los artículos de investigación que dieron lugar a esta tesis son:

- Juan Castillo, Jaume Llibre and Fernando Verduzco. The pseudo-Hopf bifurcation for planar discontinuous piecewise linear differential systems. Submitted for publication, 2016.
- Juan Castillo and Fernando Verduzco. Global bifurcations in a class of discontinuous piecewise linear systems. Research Perspectives CRM Barcelona of the Birkhäuser's series Trends in Mathematics, 8 (2017).
- Juan Castillo, Fernando Verduzco y Ricardo Femat. Conexiones Globales en una Clase de Sistemas Lineales por pedazos. Memorias Congreso Nacional de Control Automático, AMCA 2015, Cuernavaca, Morelos, México. Octubre del 2015.
- Juan Castillo, Fernando Verduzco, Enrique Comer y Ricardo Femat. La Bifurcación de Hopf en una Clase de Sistemas Lineales por Pedazos. Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA 2014, Cancún, Quintana Roo. Octubre del 2014.



---

## Apéndice A

# Teoremas básicos

---

El siguiente teorema es un resultado muy conocido del Álgebra lineal, en el cual se establece cuando tiene solución un sistema de ecuaciones lineales. Ver [90].

**Teorema 11** (Teorema de Rouché-Frobenius). *Sea el sistema  $Ax = b$ , con  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Se verifica que el sistema es*

- *Compatible determinado si  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = n$ ,*
- *Compatible indeterminado si  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) < n$ ,*
- *Incompatible si  $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|b)$ ,*

donde  $A|b$  representa la matriz ampliada del sistema.

El siguiente teorema enuncia uno de los resultados básicos del Cálculo.

**Teorema 12** (Teorema de la Función Implícita). *Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función continuamente diferenciable. Suponga que existe  $(x_0, y_0)$  tal que*

*H1)  $f(x_0, y_0) = 0$ ,*

*H2)  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  es invertible,*

*entonces existe un conjunto abierto  $U$  que contiene a  $x_0$ , un conjunto abierto  $V$  que contiene a  $y_0$ , y una única función continuamente diferenciable  $h : U \rightarrow V$ , tal que  $h(x_0) = y_0$ , y  $f(x, h(x)) = 0$  para cada  $x \in U$ .*



# Bibliografía

---

- [1] Aguirre B., Álvarez-Ramírez José, Fernández G. and Suárez R. *First Harmonic Analysis of Linear Control Systems with High-gain Saturating Feedback*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 7 (1997), pp. 2501-2510.
- [2] Aguirre B., Álvarez-Ramírez José, Fernández G. and Suárez R. *Symmetry Breaking of Periodic Orbits in Control Systems: A Harmonic Balance Approach*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 8 (1998), pp. 2439-2448.
- [3] Akhmet M.U. *Perturbations and Hopf bifurcation of the planar discontinuous dynamical system*. Nonlinear Analysis 60 (2005), pp. 163-178.
- [4] Andronov A.A. *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, 189 (1929), pp. 559-561.
- [5] Andronov A.A., Vitt A.A. and Khaikin S.E. *Theory of oscillations*. Moscow: Fizmatgiz, (1959).
- [6] Arneodo A., Couillet P. and Tresser C. *Possible new strange attractors with spiral structure*. Comm. Math. Phys., 79 (1981), pp. 573-579.
- [7] Artés J.C., Llibre J., Medrado J.C. and Teixeira M.A. *Piecewise linear differential systems with two real saddles*. Mathematics and Computers in Simulation, 95 (2013), pp. 13-22.
- [8] Battelli F. and Fečkan M. *Bifurcation and chaos near sliding homoclinics*. J. Differential Equations, 248 (2010), pp. 2227-2262.
- [9] Benmerzouk D. and Barbot J.P. *Chaotic behavior analysis based on sliding bifurcations*. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 4 (2010), pp. 503-512.
- [10] Biák M., Hanus T. and Janovská D. *Some applications of Filippov's dynamical systems*. Journal of Computational and Applied Mathematics, (2013).
- [11] Broucke M.E., Pugh C. and Simic S. *Structural stability of piecewise smooth systems*. Comput. Appl. Math., 20 (2001), pp. 51-90.
- [12] Buzzi C., Pessoa M. and Torregrosa J. *Piecewise linear perturbations of a linear center*. Discrete Continuous Dyn. Syst., 9 (2013), pp. 3915-3936.

- [13] Campos-Cantón E., Barajas-Ramírez J.G., Solís-Perales G. and Femat R. *Multiscrolls attractors by switching systems*. Chaos 20, 013116 (2010).
- [14] Campos-Cantón E., Femat R. and Chen G. *Attractors generated from switching unstable dissipative systems*. Chaos 22, 033121 (2012).
- [15] Campos-Cantón E., Femat R., Barajas-Ramírez J.G. and Campos-Cantón I. *A multivibrator circuit based on chaos generation*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 22 (2012), 1250011.
- [16] Carmona V., Freire E., Ponce E. and Torres F. *Bifurcation of invariant cones in piecewise linear homogeneous system*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 15 (2005), pp. 2469-2484.
- [17] Carmona V., Freire E., Ponce E., Ros J. and Torres F. *Limit cycle bifurcation in 3D continuous piecewise linear systems with two zones. Application to Chua's circuit*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 15 (2005), pp. 3153-3164.
- [18] Carmona V., Fernández-Sánchez F. and Teruel A.E. *Existence of a Reversible T-Point Heteroclinic Cycle in a Piecewise Linear Version of the Michelson System*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 7 (2008), pp. 1032-1048.
- [19] Carmona V., Fernández-Sánchez F., García-Medina E. and Teruel A.E. *Existence of homoclinic connections in continuous piecewise linear systems*. Chaos 20, 013124 (2010).
- [20] Chua L.O., Komuro M. and Matsumoto T. *The double scroll family. II. Rigorous analysis of bifurcation phenomena*. IEE Trans. Circuits and Systems, 33 (1986), pp. 1097-1118.
- [21] Colombo A., Lamiani P., Benadero L. and di Bernardo M. *Two-Parameter Bifurcation Analysis of the Buck Converter*. SIAM J. Applied Dynamical Systems, 8 (2009), pp. 1507-1522.
- [22] Colombo A., di Bernardo M., Fossas E. and Jeffrey M.R. *Teixeira singularities in 3D switched feedback control systems*. Systems & Control Letters, 59 (2010), pp. 615-622.
- [23] Colombo A. and Jeffrey M.R. *Nondeterministic chaos, and the two-fold singularity in piecewise smooth flows*. SIAM J. Applied Dynamical Systems, 10 (2011), pp. 423-451.
- [24] Colombo A., di Bernardo M., Hogan S.J. and Jeffrey M.R. *Bifurcations of piecewise smooth flows: perspectives, methodologies and open problems*. Physica D 241 (2012), pp. 1845-1860.
- [25] Colombo A. and Jeffrey M.R. *The two-fold singularity of nonsmooth flows: Leading order dynamics in n-dimensions*. Physica D 263 (2013), pp. 1-10.
- [26] Couillet P., Tresser C. and Arneodo A. *Transitions to stochasticity for a class of forced oscillators*. Phys. Lett. A, 72 (1979), pp. 268-270.

- [27] Cristiano R., Pagano D.J., Benadero R. and Ponce E. *Bifurcation Analysis of a DC-DC Bidirectional Power Converter Operating with Constant Power Loads*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 26 (2016) 1630010.
- [28] Della Rossa F. and Dercole F. *Generalized boundary equilibria in n-dimensional Filippov systems: The transition between persistence and nonsmooth-fold scenarios*. Physica D, 241 (2012), pp. 1903-1910.
- [29] Dercole F. and Kuznetsov Yu.A. *SlideCont: An Auto97 Driver for Bifurcation Analysis of Filippov Systems*. ACM Transactions on Mathematical Software, 31 (2005), pp. 95-119.
- [30] Dercole F., Gragnani A. and Rinaldi S. *Bifurcation analysis of piecewise smooth ecological models*. Theoretical Population Biology 72 (2007), pp. 197-213.
- [31] Dercole F., Della Rossa F., Colombo A. and Kuznetsov Yu.A. *Two Degenerate Boundary Equilibrium Bifurcations in Planar Filippov Systems*. SIAM J. Applied Dynamical Systems, 10 (2011), pp. 1525-1553.
- [32] di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R. and Kowalczyk P. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer, (2008).
- [33] Dieci L. and López L. *Sliding motion in Filippov differential systems: Theoretical results and a computational approach*. SIAM J. Numer. Anal, 47 (2009), pp. 2023-2051.
- [34] Euzébio R.D. and Llibre J. *On the number of limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two pieces separated by a straight line*. J. Math. Anal. Appl. 424 (2015), pp. 475-486.
- [35] Fernández-García S., Angulo García D., Olivar Tost G., di Bernardo M. and Jeffrey M.R. *Structural Stability of the Two-fold singularity*. SIAM J. Applied Dynamical Systems, 11 (2012), pp. 1215-1230.
- [36] Filippov A.F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1988).
- [37] Freire E., Ponce E. and Torres F. *Hopf-like bifurcations in planar piecewise linear systems*. Publicacions Matemàtiques, 41 (1997), pp. 135-148.
- [38] Freire E., Ponce E., Rodrigo F. and Torres F. *Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 8 (1998), pp. 2073-2097.
- [39] Freire E., Ponce E., and Ros J. *The focus-center-limit cycle bifurcation in symmetric 3D piecewise linear systems*. SIAM J. Appl. Math., 65 (2005), pp. 1933-1951.
- [40] Freire E., Ponce E. and Torres F. *Canonical Discontinuous Planar Piecewise Linear Systems*. SIAM J. Applied Dynamical Systems, 11 (2012), pp. 181-211.

- [41] Freire E., Ponce E. & Torres F. *A general mechanism to generate three limit cycles in planar Filippov systems with two zones*. Nonlin. Dyn., 78 (2014), pp. 251-263.
- [42] Freire E., Ponce E. and Torres F. *Planar Filippov systems with maximal crossing set and piecewise focus dynamics*. Progress and Challenges in Dynamical Systems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2013), pp. 221-232.
- [43] Freire E., Ponce E. and Torres F. *On the critical crossing cycle bifurcation in planar Filippov systems*. Journal of Differential Equations, 259 (2015), pp. 7086-7107.
- [44] Gatto M., Mandrioli D. and Rinaldi S. *Pseudoequilibrium in dynamical systems*. Int. J. Systems Sci., 4 (1973), pp. 809-824.
- [45] Glendinning P. and Kowalczyk P. *Micro-chaotic dynamics due to digital sampling in hybrid systems of Filippov type*. Physica D, 239 (2010), pp. 58-71.
- [46] Gouzé J.L. and Sari T. *A class of piecewise linear differential equations arising in biological models*. Dynamical Systems, 17 (2002), pp. 299-316.
- [47] Guardia M., Seara T.M. and Teixeira M.A. *Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems*. Journal of Differential Equations, 250 (2011), pp. 1967-2023.
- [48] Guckenheimer J. and Holmes P. *Nonlinear oscillations, Dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Applied Mathematical Sciences, (1993).
- [49] Han M. and Zhang W. *On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems*. Journal of Differential Equations, 248 (2010), pp. 2399-2416.
- [50] Huan S.M. and Yang X.S. *The number of limit cycles in general planar piecewise linear systems*. Discr. Contin. Dyn. Syst.-A, 32 (2012), pp. 2147-2164.
- [51] Huan S.M. and Yang X.S. *Existence of limit cycles in general planar piecewise linear systems of saddle-saddle dynamics*. Nonlinear Analysis, 92 (2013), pp. 82-95.
- [52] Huan, S.M. and Yang X.S. *On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems of node-node types*. J. Math. Anal. Appl., 411 (2014), pp. 340-353.
- [53] Jeffrey M.R. and Colombo A. *The two-fold singularity of discontinuous vector fields*. SIAM J. Applied Dynamical Systems, 8 (2009), pp. 624-640.
- [54] Jeffrey M.R. and Hogan S.J. *The Geometry of Generic Sliding Bifurcations*. SIAM Review, 53 (2011), pp. 505-525.
- [55] Jeffrey M.R. *Nondeterminism in the Limit of Nonsmooth Dynamics*. Physical Review Letters, 254103 (2011).
- [56] Jeffrey M.R. *Hidden dynamics in models of discontinuity and switching*. Physica D, 273-274 (2014), pp. 34-45.

- [57] Johansson K.H., Barabanov A.E. and Åström K.J. *Limit Cycles With Chattering in Relay Feedback Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 47 (2002), pp. 1414-1423.
- [58] Kristiansen K.U. and Hogan S.J. *On the Use of Blowup to Study Regularizations of Singularities of Piecewise Smooth Dynamical Systems in  $\mathbb{R}^3$* . SIAM J. Applied Dynamical Systems, 14 (2015), pp. 382-422.
- [59] Kristiansen K.U. and Hogan S.J. *Regularizations of two-fold bifurcations in planar piecewise smooth systems using blowup*. SIAM J. Applied Dynamical Systems, 14 (2015), pp. 1731-1786.
- [60] Kulebakin V. *On theory of vibration controller for electric machines*. Theor. Exp. Electron, 4 (1932).
- [61] Kunze M. *Non-Smooth Dynamical Systems*. Lecture Notes in Math. 1744, Springer-Verlag, Berlin, (2000).
- [62] Kuznetsov Yu.A., Rinaldi S. and Gragnani A. *One parameter bifurcations in planar Filippov systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 13 (2003), pp. 2157-2188.
- [63] Kuznetsov Yu.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, (2004).
- [64] Leenaerts D.M.W. and Van Bokhoven W.M.G. *Piecewise Linear Modelling and Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, (1998).
- [65] Leine R.I. *Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems*. Physica D, 223 (2006), pp. 121-137.
- [66] Liang F. and Han M. *Limit cycles near generalized homoclinic and double homoclinic loops in piecewise smooth systems*. Chaos, Solitons & Fractals, 45 (2012), pp. 454-464.
- [67] Liang F., Han M. and Zhang X. *Bifurcation of limit cycles from generalized homoclinic loops in planar piecewise smooth systems* J. Differential Equations, 255 (2013), pp. 4403-4436.
- [68] Liping Li. *Three crossing limit cycles in planar piecewise linear systems with saddle-focus type*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 70 (2014), pp. 1-14.
- [69] Liping Li. *Concurrent homoclinic bifurcation and Hopf bifurcation for a class of planar Filippov systems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 411 (2014), pp. 83-94.
- [70] Llibre J., Ponce E. and Teruel A.E. *Horseshoes near homoclinic orbits for piecewise linear differential systems in  $\mathbb{R}^3$* . Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 17 (2007), pp. 1171-1184.
- [71] Llibre J., Ponce E. and Torres F. *On the existence and uniqueness of limit cycles in Liénard differential equations allowing discontinuities*. Nonlinearity, 21 (2008), pp. 2121-2142.

- [72] Llibre J. and Ponce E. *Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems*. Dyn. Contin. Discr. Impul. Syst. Ser.B, 19 (2012), pp. 325-335.
- [73] Llibre J., Ordóñez M. and Ponce E. *On the existence and uniqueness of limit cycles in a planar piecewise linear systems without symmetry*. Nonlinear Anal. Real World Appl. 14 (2013), 2002-2012.
- [74] Llibre J., Teixeira M.A. and Torregrosa J. *Lower bounds for the maximum number of limit cycles of discontinuous piecewise linear differential systems with a straight line of separation*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 23 (2013), 1350066-1-10.
- [75] Llibre J., Novaes D.D. and Teixeira M.A. *Limit cycles bifurcating from the periodic orbits of a discontinuous piecewise linear differentiable center with two zones*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 17 (2015), 1550144-1-11.
- [76] Llibre J. and Teixeira M.A. *Piecewise linear differential systems without equilibria produce limit cycles?* Nonlinear Dyn., DOI 10.1007/s11071-016-3236-9.
- [77] Lum R. and Chua R.O. *Global properties of continuous piecewise-linear vector fields. Part I: Simplest case in  $\mathbb{R}^2$* . Memorandum UCB/ERL M90/22, University of California at Berkeley, 1990.
- [78] Makarenkov O. and Lamb J.S.W. *Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: A survey*. Physica D, 241 (2012), pp. 1826-1844.
- [79] Martins R.M. and Mereu A.C. *Limit cycles in discontinuous classical Liénard equations*. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 20 (2014), pp. 67-73.
- [80] Matsumoto T., Chua L.O. and Komuro M. *The double scroll*. IEE Trans. Circuits and Systems , 32 (1985), pp. 797-818.
- [81] Matsumoto T., Chua L.O. and Ayaki K. *Reality of chaos in double scroll circuit: A computer assisted proof*. IEE Trans. Circuits and Systems , 35 (1988), pp. 908-925.
- [82] Medrado J.C. and Torregrosa J. *Uniqueness of limit cycles for sewing planar piecewise linear systems*. J. Math. Anal. Appl. 431 (2015), pp. 529-544.
- [83] Medrano R.O., Baptista M.S. and Caldas I.L. *Homoclinic orbits in a piecewise system and their relation with invariant sets*. Physica D, 186 (2003), pp. 133-147.
- [84] Nikolsky G. *On automatic stability of a ship on a given course*. Proc Central Commun Lab, 1 (1934), pp. 34-75.
- [85] Pagano D.J., Ponce E. and Torres F. *On Double Boundary Equilibrium Bifurcations in Piecewise Smooth Planar Systems*. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 10 (2011), pp. 277-301.
- [86] Pessoa C. and Tonon D.J. *Piecewise smooth vector fields in  $\mathbb{R}^3$  at infinity*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 427 (2015), pp. 841-855.

- [87] Piiroinen P.T. and Kuznetsov Yu.A. *An Event-Driven Method to Simulate Filippov Systems with Accurate Computing of Sliding Motions*. ACM Transactions on Mathematical Software, 34 (2008), pp. 1301-1325.
- [88] Ponce E., Ros J. and Vela E. *The Focus-Center-Limit Cycle Bifurcation in Discontinuous Planar Piecewise Linear Systems Without Sliding*. Progress and Challenges in Dynamical Systems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2013), pp. 335-349.
- [89] Ponce E., Ros J. and Vela E. *Unfolding the fold-Hopf bifurcation in piecewise linear continuous differential systems with symmetry*. Physica D, 250 (2013), pp. 34-46.
- [90] Shafarevich I.R. and Remizov A.O. *Linear Algebra and Geometry*. Springer, (2013).
- [91] Simpson D.J.W. and Meiss J.D. *Andronov-Hopf bifurcations in planar, Piecewise-smooth, Continuous flows*. Physics Letters A, 371 (2007), pp. 213-220.
- [92] Simpson D.J.W. and Meiss J.D. *Unfolding a codimension two, Discontinuous, Andronov-Hopf bifurcation*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 18 (2008), 033125 .
- [93] Simpson D.J.W. *Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Systems*. World Scientific, University of British Columbia, Canada, (2010).
- [94] Simpson D.J.W. *The instantaneous local transition of a stable equilibrium to a chaotic attractor in piecewise-smooth systems of differential equations*. Physics Letters A., 380 (2016), pp. 3067-3072.
- [95] Suárez R., Álvarez-Ramírez José and Aguirre B. *First Harmonic Analysis of Planar Linear Systems with Single Saturated Feedback*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 6 (1996), pp. 2605-2610.
- [96] Szalai R. and Jeffrey M.R. *Nondeterministic dynamics of a mechanical system*. Physical Review E 90, 022914 (2014).
- [97] Teixeira M.A. *On topological stability of divergent diagrams of folds*. Math. Z., 180 (1982), pp. 361-371.
- [98] Teixeira M.A. *Stability conditions for discontinuous vector fields*. J. of Differential Equations, 88 (1990), pp. 15-29.
- [99] Teixeira M.A. *Generic bifurcation of sliding vector fields*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 176 (1993), pp. 436-457.
- [100] Verduzco F. *On a Formula for the Cross Speed at the Hopf Bifurcation*. In Advanced Topics in Nonlinear Chaotic Systems, LAP Lambert Academic Publishing, (2011), pp. 45-61.
- [101] Weiss D., Küpper T. and Hosham H.A. *Invariant manifolds for nonsmooth systems*. Physica D, 241 (2012), pp. 1895-1902.

- 
- [102] Weiss D., Küpper T. and Hosham H.A. *Invariant manifolds for nonsmooth systems with sliding mode*. Mathematics and Computers in Simulation, 110 (2014), pp. 15-32.
- [103] Xiaoshi G., Dingheng P. and Zhensheng G. *Bifurcation Analysis of Planar Piecewise Linear System with Different Dynamics*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 26 (2016), 1650185.
- [104] Xu B., Yang F., Tang Y. and Lin M. *Homoclinic Bifurcations in Planar Piecewise-Linear Systems*. Discrete Dynamics in Nature and Society, Hindawi Publishing Corporation, Volume 2013, Article ID 732321.
- [105] Zou Y. and Küpper T. *Generalized Hopf bifurcation emanated from a corner for piecewise smooth planar systems*. Nonlinear Analysis, 62 (2005), pp. 1-17.
- [106] Zou Y., Küpper T. and Beyn W.J. *Generalized Hopf bifurcation for planar Filippov systems continuous at the origin*. J. Nonlinear Sci., 16 (2006), pp. 159-177.