



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Tensores de Poisson Compatibles con Estructuras
Fibradas

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Doctor en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

José Crispín Ruíz Pantaleón

Director de Tesis: Dr. Yury Vorobev

Codirector de Tesis: Dr. Rubén Flores Espinoza

Hermosillo, Sonora, México, 28 de Septiembre de 2018

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

SINODALES

Dr. Rubén Flores Espinoza
Universidad de Sonora

Dr. Yury Vorobev
Universidad de Sonora

Dr. Misael Avendaño Camacho
Universidad de Sonora

Dr. Pablo Suárez Serrato
Universidad Autónoma de México

Dr. José Antonio Vallejo Rodríguez
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

*... A Dios
A mi familia
A mis amigos y a las personas que han estado ahí*

... Papá, ahora lo ves

Abstract

In the present work we study a class of Poisson and Dirac structures on a fibered manifold M which are compatible with the fiber bundle structure in a natural sense. We will distinguish three types of compatibility: *partially coupling*, *almost coupling* and *coupling*. The first two types generalize the coupling property of Poisson structures around symplectic leaves. We present a geometric approach for the construction of a wide class of Poisson and Dirac structures that generalize the results obtained by Vorobev 2001, Vaissman 2004, Dofour and Wade 2008. The main results that we present are related to the following topics: characteristics subsets in M of compatible Poisson structures, a factorization of the Jacobi identity, conditions for that gauge transformation of Poisson and Dirac structures preserves the almost coupling property, a description of global behavior of almost coupling Poisson and unimodularity criteria in the low dimensional cases and simi-local equivalence of Poisson structures around a common symplectic leaf.

Índice general

1. Preliminares	11
1.1. Corchetes de Poisson	11
1.2. Tensores de Poisson	13
1.2.1. Corchete de Schouten-Nijenhuis	13
1.2.2. Campos Bivectoriales de Poisson	15
2. Cálculo de Ehresmann en Haces Fibrados	21
2.1. Conexiones de Ehresmann. Propiedades Básicas	21
2.2. Bigraduación de Campos Multivectoriales, Formas Diferenciales y Operadores Diferenciales	26
2.3. Conexiones de Poisson	31
3. Tensores de Poisson en Variedades Orientables	33
3.1. Tensores de Poisson y Formas Diferenciales	33
3.2. Estructuras de Poisson con Casimires Predeterminadas	35
3.2.1. Caso 3-Dimensional	38
3.2.2. Caso 4-Dimensional	39
3.3. Operador Divergencia e Identidad de Jacobi	41
3.4. Variedades de Poisson Unimodulares	42
3.4.1. Criterios de Unimodularidad	43
3.4.2. Unimodularidad de Tensores de Poisson Homogéneos	44
4. Tensores de Poisson en Variedades Fibradas	49
4.1. Campos Bivectoriales Compatibles y Dominio de Acoplamiento	49
4.2. Tensores de Poisson de Casi Acoplamiento	57
4.3. Simetrías y Reconstrucción	65
4.3.1. Transformaciones Gauge.	65

4.4.	Propiedad de Casi Acoplamiento Vía Levantamiento	70
4.5.	Caso Orientable Sobre Bases 2-Dimensionales	71
4.5.1.	Criterio de Unimodularidad	77
4.5.2.	Caso 3-Dimensional	81
4.5.3.	Caso $(2 + 2)$ -Dimensional	84
4.5.4.	Caso $(2 + 3)$ -Dimensional	85
4.5.5.	Haces triviales. Enfoque Coordinado	93
4.6.	Subvariedades de Poisson y Equivalencia	97
5.	Estructuras de Dirac de Casi Acoplamiento	103
5.1.	Estructuras de Dirac	103
5.2.	Propiedad de Casi Acoplamiento	105
5.2.1.	Resultados Básicos	108

Introducción

El presente trabajo está dedicado al estudio de algunos problemas abiertos de la geometría de las estructuras Poisson que constituyen un campo de investigación actual.

En términos algebraicos, una estructura de Poisson en una variedad diferencial M se define como una estructura de álgebra de Lie $\{, \}$ en el anillo de funciones de clase C^∞ la cual es compatible con el producto puntual de funciones por medio de la regla de Leibniz. Estos objetos se relacionan con otras estructuras importantes en geometría moderna como es el caso de los algebroides y grupoides de Lie.

En 1977, A. Lichnerowicz en [42] introdujo una definición “geométrica contravariante” de estructura de Poisson en términos del cálculo de Schouten para campos tensoriales contravariantes antisimétricos, dando lugar a un estudio sistemático de la geometría de Poisson estrechamente relacionado con la teoría de foliaciones singulares en el sentido de Stefan-Sussman. Concretamente, cada estructura de Poisson $\{, \}$ está definida por un campo bivectorial Π en M , llamado tensor de Poisson, que satisface una versión diferencial de la identidad de Jacobi que implica la integrabilidad de su distribución característica. En general, esta distribución integrable resulta singular y su foliación consiste de hojas de dimensión variable las cuales tienen asociada una estructura simpléctica natural inducida por Π . Así, geoméricamente, una variedad de Poisson se puede pensar como una unión de variedades simplécticas (hojas simplécticas), usualmente de dimensiones variables, dispuestas de una manera suave en la variedad. Un ejemplo importante de este tipo de foliaciones se presenta como el espacio de órbitas de la acción coadjunta de un grupo de Lie sobre su coálgebra. En este caso la estructura simpléctica viene dada por la llamada forma de Kirillov-Kostant-Souriau. A este tipo de estructuras se les denomina de Lie-Poisson. La interpretación geométrica de las variedades de Poisson provee una generalización a la categoría de estructuras de Dirac [26]: una variedad de Dirac es una foliación presimpléctica singular.

En esta tesis desarrollamos un enfoque uniforme para el estudio de una clase natural de estructuras de Poisson y Dirac que son compatibles con estructuras fibradas. Este tipo de variedades (fibradas) aparecen frecuentemente como espacios fase para sistemas dinámicos en diversas aplicaciones físicas [58, 52, 33, 51, 47]. Además, el problema de formas normales alrededor de subvariedades de Poisson lleva de manera natural al estudio de las estructuras de Poisson en haces fibrados vectoriales (haces normales) [72, 73, 14, 15, 46].

En términos geométricos, en un haz fibrado $\pi : M \rightarrow B$, distinguiremos tres tipos de compatibilidad. Concretamente, el tensor de Poisson Π se dirá

- *parcialmente acoplado* si

$$\Pi^{\sharp}(\mathbb{V}^{\circ}) \cap \mathbb{V} = \{0\}, \quad (1)$$

donde $\mathbb{V} \subset \mathbb{T}M$ es la distribución vertical de π ;

- *casi acoplado*, o de casi acoplamiento, si además de ser parcialmente acoplado, existe un subhaz horizontal (una conexión Ehresmann) \mathbb{H} ,

$$\mathbb{T}M = \mathbb{H} \oplus \mathbb{V}, \quad (2)$$

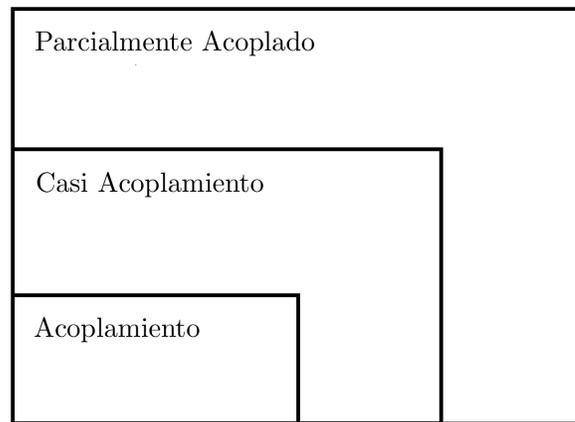
tal que

$$\Pi^{\sharp}(\mathbb{V}^{\circ}) \subseteq \mathbb{H}; \quad (3)$$

- *acoplado*, o de acoplamiento, si es de casi acoplamiento y el subhaz horizontal \mathbb{H} en la descomposición (2) es maximal en el sentido que

$$\mathbb{H} = \Pi^{\sharp}(\mathbb{V}^{\circ}). \quad (4)$$

Notemos que las estructuras de Poisson de acoplamiento son una subclase de las estructuras de casi acoplamiento y estas, a su vez, son una subfamilia de las estructuras parcialmente acopladas.



Estructuras de Poisson Compatibles

Además, observemos que las condiciones (2) y (3) implican que la distribución característica de Π admite una descomposición

$$\mathcal{C}^{\Pi} = \mathcal{C}_H^{\Pi} \oplus \mathcal{C}_V^{\Pi}, \quad (5)$$

donde $\mathcal{C}_H^{\Pi} := \Pi^{\sharp}(\mathbb{V}^{\circ}) \subseteq \mathbb{H}$ y $\mathcal{C}_V^{\Pi} := \mathcal{C}^{\Pi} \cap \mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$ son distribuciones suaves (singulares).

La definición de compatibilidad dada en términos de la condición de acoplamiento (4) proviene del llamado método de acoplamiento para haces fibrados simplécticos [58, 33]. En

el artículo [51] este procedimiento de acoplamiento se extendió a una clase especial de haces vectoriales de Poisson (haces co-adjuntos asociados con haces principales) y se introdujo la clase de estructuras gauge de Lie-Poisson. En el contexto de la geometría de Poisson semilocal (alrededor de hojas simplécticas), el método de acoplamiento para haces fibrados de Poisson fue desarrollado en [72, 73] con algunas generalizaciones en [64, 66, 74, 68, 8, 22, 74].

El estudio de las estructuras de Poisson parcialmente acopladas aún no cuenta con un buen desarrollo. Un punto de partida para su progreso puede ser la relación que existe entre las estructuras de Poisson parcialmente acopladas y las conexiones parciales generalizadas [24, 36, 61]. Concretamente, la primera condición en (3) dice que la distribución singular \mathcal{C}_H^Π es una conexión parcial (generalizada) en M relativa al subhaz vertical \mathbb{V} .

El propósito general de este trabajo es estudiar las estructuras de Poisson de casi acoplamiento en un contexto global, problema que aún no cuenta con un tratamiento completo. Sobre este objetivo, en particular, presentamos un desarrollo más detallado y general de resultados que se encuentran en trabajos previos tales como [72, 73, 64, 66, 65, 68]. También abordamos otro problema interesante que se relaciona con nuestro estudio: la existencia y construcción de estructuras de Poisson con foliaciones características predeterminadas, en particular, la construcción de estructuras de Poisson con Casimires predeterminados [16, 29, 59].

En el Capítulo 3 se dan algunas respuestas a este último problema construyendo estructuras de Poisson de tipo *Flashcka-Ratiu*, ver el Teorema 3.2.3 y Corolario 3.2.4. Además se exponen algunos resultados técnicos en torno al *operador traza* que utilizamos en capítulos posteriores.

En el Capítulo 4, el cual es uno de los principales de esta tesis, los problemas que abordamos y los resultados que presentamos se pueden resumir en los siguientes términos:

1. Dominio de Acoplamiento. Como anteriormente mencionamos la propiedad de acoplamiento parcial es más general que la de casi acoplamiento. Pero, con el Teorema 4.1.6, mostramos que cada tensor de Poisson Π parcialmente acoplado en una variedad fibrada M es de casi acoplamiento en un abierto N^Π que es denso en M . Aún más, bajo ciertas condiciones, probamos que existe un abierto “máximo” $M^\Pi \subseteq N^\Pi$ con la propiedad: $\Pi|_{M^\Pi}$ es de acoplamiento (ver el Teorema 4.1.14). Este abierto recibe el nombre de *dominio de acoplamiento*. En la Proposición 4.2.9 mostramos que si Π es de casi acoplamiento, entonces M^Π es invariante bajo el flujo de campos Hamiltonianos. En consecuencia, queda foliado por hojas simplécticas de distintas dimensiones. Se prueba además que la frontera ∂M^Π consiste de puntos singulares de Π . Pese a lo anterior, notemos que existen estructuras de Poisson de casi acoplamiento con $M^\Pi = \emptyset$ que no necesariamente son verticales.

2. Factorización de la Identidad de Jacobi. Primero, en el Teorema 4.2.3 mostramos que para un tensor de Poisson de casi acoplamiento Π en M la condición (3) implica una descomposición tensorial $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ intrínseca, en el sentido que no depende de la conexión de Ehresmann \mathbb{H} en (3) (ver también Teorema 4.1.17). Esta descomposición induce una factorización de la identidad de Jacobi en cuatro ecuaciones (4.17)-(4.20) para las compo-

nentes Π_H y Π_V que llamaremos *ecuaciones de integrabilidad*. La ecuación (4.17) implica que la componente vertical Π_V es un tensor de Poisson vertical que define una estructura de haz de Poisson en M (ver el Teorema 4.2.3). En el dominio de acoplamiento M^Π las ecuaciones (4.17)-(4.20) tienen una interpretación geométrica natural [72, 73], en particular, la ecuación (4.18) asegura que la conexión \mathbb{H} en (3) es de Poisson en M^Π . Esto motiva la pregunta sobre la extensión de $\mathbb{H}|_{M^\Pi}$ a una conexión de Poisson en todo M . Tener una respuesta afirmativa a esta pregunta es importante para la aplicación del método de homotopía de Moser a estructuras de Poisson de casi acoplamiento (ver el punto 7). Finalmente, en la Proposición 4.2.5 se presentan condiciones para que la componente horizontal Π_H sea un tensor de Poisson en M que se basan en una generalización de la identidad de curvatura para el caso de acoplamiento [72, 73]. Un estudio más detallado de las ecuaciones de integrabilidad la realizamos para el caso de variedades fibradas de baja dimensión que se presenta en líneas posteriores.

3. Simetrías de las Ecuaciones de Integrabilidad y Transformaciones Gauge. Por una simetría de las ecuaciones de integrabilidad entenderemos una transformación que preserve las soluciones de estas ecuaciones. Una clase especial de simetrías son inducidas por las llamadas transformaciones gauge para tensores de Poisson, las cuales se distinguen por preservar cada hoja de la foliación simpléctica y modificar únicamente la estructura simpléctica sobre la hoja. En general, las transformaciones gauge no preservan la clase de estructuras de Poisson de casi acoplamiento. Como principal resultado presentamos el Teorema 4.3.2 en el cual se dan condiciones suficientes para que una transformación gauge preserve la propiedad de ser de casi acoplamiento. En este contexto, en el Corolario 4.3.4 se dan fórmulas explícitas para determinar las componentes horizontal y vertical de la transformación gauge de un tensor de Poisson de casi acoplamiento. Con el Corolario 4.3.5 se presenta una familia de 2-formas diferenciales que satisfacen de manera natural las condiciones del Teorema 4.3.2. Finalmente, el Corolario 4.3.7 afirma que esta clase especial de transformaciones gauge dejan invariante el dominio de acoplamiento. La proposición 4.5.28 es una realización de estas condiciones para variedades fibradas 5-dimensionales.

4. Procedimiento de Reconstrucción. La idea básica aquí es construir un tensor de Poisson de casi acoplamiento en una variedad fibrada a partir de estructuras de Poisson de este tipo en la variedad base. En este sentido, con la Proposición 4.4.1, presentamos condiciones necesarias y suficientes para que en una clase especial de variedades fibradas el levantamiento horizontal de tensores de Poisson de casi acoplamiento sea un tensor de Poisson (de casi acoplamiento). Notemos que el levantamiento horizontal de todo tensor de Poisson posee de manera automática la propiedad de casi acoplamiento (3).

5. Haces Fibrados Orientables con Bases 2-Dimensionales. En las variedades fibradas con base de dimensión dos se pueden construir de una manera explícita estructuras de Poisson de casi acoplamiento. Concretamente, bajo condiciones de orientabilidad, cada tensor de Poisson de casi acoplamiento Π se corresponde con lo que denominamos un *triple de Poisson* (ver la Definición 4.5.2) el cual consiste de una conexión de Ehresmann, una función escalar global κ y una forma diferencial β . En términos de estos objetos, las ecuaciones de integrabilidad (4.17)-(4.20) involucran operaciones naturales para formas diferenciales, ver el Teorema 4.5.1. El dominio de acoplamiento en este caso es $M^\Pi = \{\kappa \neq 0\}$. Como consecuen-

cia mostramos que Π es vertical si y solamente si $M^\Pi = \emptyset$. Con esto en cuenta, Π posee el siguiente comportamiento global: en M^Π es de acoplamiento, en el interior $\text{Int}(M \setminus M^\Pi)$ es vertical y en la frontera ∂M^Π se cumple una condición de compatibilidad entre la diferencial $d\kappa$ y la forma β , ver la Proposición 4.5.8. Por otro lado, probamos que existe una obstrucción cohomológica para que Π sea unimodular en el dominio de acoplamiento M^Π y que en el interior de su complemento es unimodular de manera automática, ver el Teorema 4.5.11. Asumiendo que la obstrucción en M^Π no se presenta, en el Teorema 4.5.13 damos condiciones necesarias y suficientes para que Π sea unimodular de manera global, es decir, para que exista una forma de volumen en M que es invariante bajo el flujo de los campos Hamiltonianos de Π .

6. Caso Variedades Fibradas de Baja Dimensión. Como aplicación de los resultados obtenidos en el apartado anterior, realizamos un estudio de variedades fibradas 3, 4 y 5 dimensionales. Para el caso tridimensional probamos que todo tensor de Poisson de casi acoplamiento es, o bien vertical, o bien horizontal respecto a una conexión de Ehresmann que es plana en su dominio de acoplamiento, ver la Proposición 4.5.16. En particular, mostramos que la fibración de hopf $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ no admite estructuras de Poisson de acoplamiento. Para el caso 4-dimensional con base 2-dimensional, suponiendo orientabilidad, vemos que cada tensor de Poisson de casi acoplamiento se corresponde con un triple de Poisson que en este caso consiste de una conexión de Ehresmann y dos funciones escalares globales cuyas diferenciales se ven involucradas en la realización de las ecuaciones de integrabilidad, ver Proposición 4.5.21. Además, derivamos condiciones para que permiten construir estructuras de Poisson (de casi acoplamiento) de tipo Flaschka-Ratiu. Para el caso 5-dimensional con base 2-dimensional, asumiendo orientabilidad, cada tensor de Poisson de casi acoplamiento se corresponde con un triple de Poisson que consiste de una conexión de Ehresmann, una función escalar global y una 1-forma vertical, ver la Proposición 4.5.22. Para al problema de unimodularidad, la Proposición 4.5.26 y la Proposición 4.5.27 permiten construir ejemplos y contraejemplos de estructuras de Poisson de casi acoplamiento unimodulares. Además, en términos de los triples de Poisson, presentamos una construcción explícita de un tipo especial de transformaciones gauge que preservan la propiedad de casi acoplamiento, ver la Proposición 4.5.28. Utilizando este tipo de simetrías, mostramos una manera de construir triples de Poisson que inducen una familia de tensores de Poisson de casi acoplamiento que se pueden pensar como deformaciones infinitesimales de un tensor de Poisson de casi acoplamiento dado, ver la Proposición 4.5.29. Este resultado se relaciona con el método de promedios en el cual se utilizan deformaciones infinitesimales de tensores de Poisson verticales [2]. En este sentido, nuestro resultado se puede considerar una generalización de esta técnica en variedades fibradas 5-dimensionales.

7. Ecuación de Homotopía y Equivalencia de Poisson. El método de homotopía de Moser proporciona un algoritmo para resolver el problema de equivalencia clásica entre dos tensores de Poisson al menos a nivel (semi) local. El punto clave en este método es resolver una ecuación para una un campo vectorial dependiente del tiempo que se llama *ecuación de homotopía* (4.101). El flujo de tal campo provee la equivalencia deseada. En nuestro trabajo adaptamos este método a la clase de tensores de Poisson de casi acoplamiento. Finalmente, probamos que dos tensores de Poisson relacionados por una transformación gauge alrededor de una hoja simpléctica común son equivalentes alrededor de ella, ver el Teorema 4.6.4. Hemos de mencionar que este resultado es conocido y que nuestra aportación es formular una versión

más detallada de un criterio de equivalencia que se presenta en [30, 72, 73, 15]. Los resultados obtenidos en esta dirección están orientados al problema, importante e interesante, del estudio las subvariedades de Poisson [46, 15]. En particular, bajo qué condiciones se realiza la propiedad de casi acoplamiento alrededor de esta clase de subvariedades. Otro problema es el describir los tipos de subvariedades de Poisson que existen para una estructura (de Poisson) de casi acoplamiento.

8. Estructuras de Dirac de Casi Acoplamiento. En el Capítulo 5 estudiamos una clase especial de estructuras de Dirac: las de casi acoplamiento [66, 22, 74, 8, 67]. Presentamos dos definiciones, una de las cuales implica la existencia de un tensor de Poisson vertical intrínseco a la estructura de Dirac de casi acoplamiento en cuestión. Además, se presenta una respuesta al problema de dar condiciones bajo las cuales las transformaciones gauge para estructuras de Dirac preserven la propiedad de casi acoplamiento.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de las secciones de esta tesis M denotará una *variedad diferencial* real finita dimensional con $\dim M = m$. Serán \mathbb{T}^*M y $\mathbb{T}M$ los haces vectoriales *cotangente* y *tangente* sobre M respectivamente. Por C_M^∞ se entenderá el anillo de *funciones* diferenciables reales en M y por $\Gamma \mathbb{T}M$ el álgebra de *campos vectoriales* suaves con la operación $[\cdot, \cdot]$ que denota el corchete de Lie para campos vectoriales

Por $\Gamma \wedge^k \mathbb{T}^*M$ se denotará el C_M^∞ -módulo de k -*formas diferenciales* en M y por $\Gamma \wedge^k \mathbb{T}M$ el de k -*vectores*, $k \in \mathbb{Z}$. Por convenio, para $k = 0$ cada uno de estos módulos coincidirán con el anillo C_M^∞ y para $k < 0$, ó $k > m$, con el módulo trivial $\{0\}$. Así, se definen

$$\Gamma \wedge \mathbb{T}^*M := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma \wedge^k \mathbb{T}^*M \quad \text{y} \quad \Gamma \wedge \mathbb{T}M := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma \wedge^k \mathbb{T}M.$$

El símbolo \wedge denota el *producto exterior*, o producto cuña, en los respectivos módulos.

Las notaciones antes mencionadas se mantendrán a lo largo de las páginas de este trabajo salvo mención explícita de lo contrario. Los objetos diferenciales con los que se trabajen a lo largo de las secciones se asumirán de clase C^∞ .

1.1. Corchetes de Poisson

Una *estructura de Poisson* en una variedad diferencial M es un corchete de Lie en el anillo de funciones suaves C_M^∞ el cual es compatible con el producto puntual por medio de la regla de Leibniz. Esto es, una operación \mathbb{R} -bilineal y antisimétrica

$$\{\cdot, \cdot\} : C_M^\infty \times C_M^\infty \longrightarrow C_M^\infty, \quad (f, g) \longmapsto \{f, g\},$$

la cual verifica la *identidad de Jacobi*

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0, \tag{1.1}$$

y la regla de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}, \quad (1.2)$$

para cualesquiera $f, g, h \in C_M^\infty$.

La operación binaria $\{, \}$ se llama *corchete de Poisson*. Al par $(M, \{, \})$ se le denomina *variedad de Poisson* y al par $(C_M^\infty, \{, \})$ *álgebra de Poisson*.

Como consecuencia de la regla de Leibniz se tiene que, para cada función h en M , la aplicación $f \mapsto \{h, f\}$ es una derivación en C_M^∞ . Por tanto, existe un único campo vectorial $X_h \in \Gamma TM$, llamado *campo Hamiltoniano* asociado h , determinado por

$$\mathcal{L}_{X_h} f = \{h, f\}, \quad \forall f \in C_M^\infty. \quad (1.3)$$

La función h recibe el nombre de función Hamiltoniana, o simplemente, Hamiltoniano.

El conjunto de todos los campos Hamiltonianos forman una subálgebra de Lie del álgebra de campos vectoriales en M . En efecto, por definición, la asignación $h \mapsto X_h$ es \mathbb{R} -lineal y por (1.1) se sigue que

$$[X_{h_1}, X_{h_2}] = X_{\{h_1, h_2\}},$$

esto es, el corchete de Lie de dos campos Hamiltonianos es nuevamente un campo Hamiltoniano.

Por la antisimetría del corchete de Poisson, cada función h resulta una integral primera de su campo Hamiltoniano asociado, $\mathcal{L}_{X_h} h = 0$. Hecho que es conocido en física como el principio de conservación de la energía. El conjunto de todas las integrales primeras de un campo Hamiltoniano X_h hereda del corchete de Poisson una estructura de álgebra de Lie conocida como el *álgebra de simetrías* del campo X_h . El resultado en el cual se fundamenta esta afirmación se conoce como Teorema de Poisson.

A las funciones cuyo campo Hamiltoniano asociado es nulo se les llama funciones de Casimir. Así, una función K es una función de *Casimir* para el corchete de Poisson si

$$\{K, f\} = 0 \quad \text{para toda } f \in C_M^\infty. \quad (1.4)$$

Por definición, el conjunto de todas las funciones de Casimir generan el *centro* del álgebra de Poisson $(C_M^\infty, \{, \})$ y en consecuencia forman una subálgebra de Lie de éste. Notemos que cada función de Casimir resulta ser una integral primera de todo campo Hamiltoniano relativo al corchete $\{, \}$.

Como consecuencia de la identidad de Jacobi los campos Hamiltonianos resultan ser una derivación del corchete de Poisson, esto es, $\mathcal{L}_{X_h} \{f, g\} = \{\mathcal{L}_{X_h} f, g\} + \{f, \mathcal{L}_{X_h} g\}$, para cualesquier funciones f, g en M . Esta observación es de particular interés ya que la propiedad anterior no es exclusiva de estos campos. Por ejemplo, todo campo vectorial deriva trivialmente al corchete de Poisson cero, sin embargo, el único campo Hamiltoniano asociado a este corchete es el campo vectorial nulo.

Se define como *campo de Poisson* a todo campo vectorial en M que es una derivación del corchete de Poisson, es decir, $W \in \Gamma \mathbb{T}M$ es un campo de Poisson si

$$\mathcal{L}_W\{f, g\} = \{\mathcal{L}_W f, g\} + \{f, \mathcal{L}_W g\}, \quad \forall f, g \in C_M^\infty. \quad (1.5)$$

El conjunto de todos los campos de Poisson forman una subálgebra de Lie del álgebra de campos vectoriales en M . Esta subálgebra admite como *ideal* al conjunto de campos Hamiltonianos, es decir, el corchete de Lie entre un campo de Poisson y un campo Hamiltoniano resulta un campo Hamiltoniano, $[W, X_h] = X_{\mathcal{L}_W h}$. En consecuencia, los campos de Poisson preservan el álgebra de funciones de Casimir, esto es, $X_{\mathcal{L}_W K} = 0$ si K es Casimir.

La condición (1.5) para un campo de Poisson W es equivalente a pedir que el flujo Fl_W^t de este campo preserve el corchete de Poisson: $\{(\text{Fl}_W^t)^* f, (\text{Fl}_W^t)^* g\} = (\text{Fl}_W^t)^* \{f, g\}$, para cualesquiera $f, g \in C_M^\infty$.

Un *morfismo de Poisson* entre dos variedades de Poisson $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$ y $(M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$ es una función $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ que satisface $\{\varphi^* f, \varphi^* g\}_1 = \varphi^* \{f, g\}_2$, para cualesquiera $f, g \in C_{M_2}^\infty$. En particular, si φ es un difeomorfismo esta función se llama *isomorfismo de Poisson* y las estructuras $\{\cdot, \cdot\}_1$ y $\{\cdot, \cdot\}_2$ se dicen equivalentes (isomorfas).

Ahora, dadas dos estructuras de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ y $\{\cdot, \cdot\}'$ en una misma variedad diferencial, la suma de éstas no resulta una estructura de Poisson en general. Cuando sí se dice que estas dos estructuras forman un *par de Poisson* y al conjunto de combinaciones lineales generado por este par $\{c_1 \{\cdot, \cdot\} + c_2 \{\cdot, \cdot\}' \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ se le llama *pincel de Poisson*.

1.2. Tensores de Poisson

A mediados de la década de los 70' A. Lichnerowicz tradujo la noción algebraica de corchete de Poisson a una noción geométrica (contravariante): tensor de Poisson. Proveyendo con esto una nueva visión de las variedades de Poisson que facilitó el estudio de ciertos aspectos de estas variedades. En esta sección se presenta una recapitulación de hechos básicos en torno a este enfoque geométrico. Para esto primero se exponen propiedades generales del corchete de Schouten-Nijenhuis.

1.2.1. Corchete de Schouten-Nijenhuis

Una extensión del corchete de Lie para campos vectoriales al módulo de campos multivectoriales $\Gamma \wedge \mathbb{T}M$ es dada por el corchete de Schouten-Nijenhuis. El cual dota a este módulo de una estructura de súper-álgebra de Poisson.

Una manera de interpretar al *corchete de Schouten-Nijenhuis* es como una operación \mathbb{R} -bilineal,

$$[[,] : \Gamma \wedge^a \mathbb{T}M \times \Gamma \wedge^b \mathbb{T}M \longrightarrow \Gamma \wedge^{a+b-1} \mathbb{T}M, \quad (A, B) \longmapsto [[A, B],$$

con las siguientes propiedades:

- $[[A, B] = -(-1)^{(a-1)(b-1)} [[B, A],$ (antisimetría)
- $[[A, [[B, C]]] = [[[[A, B], C] + (-1)^{(a-1)(b-1)} [[B, [[A, C]]],$ (identidad de Jacobi)
- $[[A, B \wedge C] = [[A, B] \wedge C + (-1)^{(a-1)b} B \wedge [[A, C].$ (regla de Leibniz)

En otras palabras, el triple $(\Gamma \wedge \mathbb{T}M, \wedge, [[,])$ es una súper-álgebra de Poisson (de grado -1).

En términos algebraicos, se define el corchete de Schouten-Nijenhuis de dos campos multivectoriales $A \in \Gamma \wedge^a \mathbb{T}M$ y $B \in \Gamma \wedge^b \mathbb{T}M$ como el único campo $(a + b - 1)$ -multivectorial $[[A, B]$ que satisface la igualdad entre operadores diferenciales

$$\mathbf{i}_{[[A, B]} = [[[\mathbf{i}_A, d], \mathbf{i}_B] = [\mathcal{L}_A, \mathbf{i}_B], \quad (1.6)$$

donde $d : \Gamma \wedge^\bullet \mathbb{T}^*M \rightarrow \Gamma \wedge^{\bullet+1} \mathbb{T}^*M$ denota la *diferencial exterior* para formas y el *producto interior* de campos multivectoriales y formas diferenciales \mathbf{i}_\bullet está definido por la regla $\mathbf{i}_{X \wedge Y} = \mathbf{i}_X \circ \mathbf{i}_Y$, para cualesquiera $X, Y \in \Gamma \mathbb{T}M$.

Nota 1.2.1. Los corchetes en el lado derecho de la primera y segunda igualdad en (1.6) denotan el conmutador (graduado) de endomorfismos graduados sobre $\Gamma \wedge \mathbb{T}^*M$. Esto es, $[[E_1, E_2] := E_1 \circ E_2 - (-1)^{e_1 e_2} E_2 \circ E_1$, para cualesquier endomorfismos E_1 y E_2 de grados e_1 y e_2 respectivamente. \triangleleft

El corchete de Schouten-Nijenhuis, a diferencia del producto interior, es una operación de tipo *local* debido a que los operadores que intervienen en su definición son de este tipo. Es decir,

$$[[A, B]]|_U = [[A|_U, B|_U], \quad \text{para todo abierto } U \subset M. \quad (1.7)$$

También es una operación *natural* con respecto al pullback,

$$F^*[[A, B]] = [[F^*A, F^*B],$$

para cualquier difeomorfismo local $F : M \rightarrow N$. Esta propiedad de naturalidad es heredada por el corchete de Lie para campos vectoriales. Lo cual se evidencia con la fórmula

$$[[X_1 \wedge \cdots \wedge X_a, Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_b]] = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_a \wedge Y_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{Y}_j \wedge \cdots \wedge Y_b,$$

para cualesquiera $X_i, Y_j \in \Gamma \mathbb{T}M$ y donde el símbolo $\widehat{}$ indica la omisión del término debajo de él.

Entre las propiedades adicionales que posee el corchete de Schouten-Nijenhuis las siguientes serán de utilidad en secciones posteriores:

- (a) $\llbracket f, A \rrbracket = -\mathbf{i}_{df}A$, para toda $f \in C_M^\infty$,
- (b) $\llbracket X, A \rrbracket = \mathcal{L}_X A$, para cualquier $X \in \Gamma TM$.
- (c) Para todo campo bivectorial $B \in \Gamma \wedge^2 TM$ y cualesquier funciones $f, g, h \in C_M^\infty$ se cumple

$$\frac{1}{2}\llbracket B, B \rrbracket(df, dg, dh) = B(B(df, dg), dh) + B(B(dg, dh), df) + B(B(dh, df), dg). \quad (1.8)$$

Nota 1.2.2. Existen básicamente dos maneras de definir el corchete de Schouten-Nijenhuis en la literatura. La aquí presentada coincide con la utilizada en [49, 50, 14, 46] pero difiere con la empleada en [42, 63]. La diferencia entre estas definiciones es un signo:

$$\llbracket A, B \rrbracket = (-1)^{a-1} [A, B]_{\text{SN}},$$

donde $[\cdot, \cdot]_{\text{SN}}$ denota el corchete de Schouten-Nijenhuis definido en [42, 63]. ◁

1.2.2. Campos Bivectoriales de Poisson

Como A. Lichnerowicz observó, todo corchete de Poisson depende de la variación a primer orden de sus argumentos como consecuencia de la regla de Leibniz. Lo que permite pensar a estos corchetes como campos tensoriales contravariantes de rango 2, es decir, como campos bivectoriales, que satisfacen una condición de involución con respecto al corchete de Schouten-Nijenhuis (identidad de Jacobi). Condición que a su vez es equivalente a la integrabilidad de las respectivas distribuciones características.

En cada variedad de Poisson M existe una correspondencia uno a uno entre corchetes de Poisson y campos bivectoriales $\Pi \in \Gamma \wedge^2 TM$ que satisfacen la ecuación

$$\llbracket \Pi, \Pi \rrbracket = 0. \quad (1.9)$$

Este tipo de campos bivectoriales reciben el nombre de *tensores de Poisson* y a la condición (1.9) se le conoce como *identidad de Jacobi*. La correspondencia mencionada está definida por la fórmula

$$\Pi(df, dg) = \{f, g\}, \quad f, g \in C_M^\infty.$$

Con esta fórmula, y por (1.8), se justifica la identidad de Jacobi (1.9) pues es

$$\frac{1}{2}\llbracket \Pi, \Pi \rrbracket(df, dg, dh) = \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\}$$

para cualesquiera $f, g, h \in C_M^\infty$.

Notemos que la ecuación (1.9) es una condición local en el sentido (1.7). Luego, la restricción de un tensor de Poisson a cualquier subconjunto abierto de M es nuevamente un tensor de Poisson.

En un sistema de coordenadas locales (x^1, \dots, x^m) en M , la identidad de Jacobi para $\Pi = \frac{1}{2}\Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ es equivalente a sistema sobredeterminado de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales de primer orden,

$$\Pi^{is} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x^s} + \Pi^{js} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x^s} + \Pi^{ks} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^s} = 0, \quad s = 1, \dots, m;$$

para cada $i, j, k = 1, \dots, m$. Naturalmente, resolver este sistema de ecuaciones es en extremo complicado, en general. Por esto es que se han desarrollado, y es importante seguir desarrollando, distintas técnicas para estudiar y construir estructuras de Poisson en variedades diferenciales arbitrarias.

Foliación Simpléctica. Una manera de generar la *geometría* que subyace en una variedad de Poisson es por medio de la distribución singular que induce el tensor de Poisson correspondiente, llamada *distribución característica*. La cual se define, dado un tensor de Poisson Π en M , por

$$\mathcal{C}^\Pi := \Pi^\sharp(\mathbb{T}^*M) \subseteq \mathbb{T}M, \quad (1.10)$$

donde $\Pi^\sharp : \mathbb{T}^*M \rightarrow \mathbb{T}M$ es el morfismo de haces vectoriales

$$\Pi^\sharp(\alpha) := \mathbf{i}_\alpha \Pi, \quad \alpha \in \mathbb{T}^*M; \quad (1.11)$$

el cual se extiende a un morfismo entre las respectivas secciones diferenciables.

Proposición 1.2.3 *Existe una correspondencia uno a uno entre tensores de Poisson y foliaciones simplécticas en M .*

El punto clave en esta afirmación es que, debido a la identidad de Jacobi, la distribución característica de Π resulta integrable en el sentido de Stefan-Sussman y por tanto genera una foliación singular \mathcal{S} de M . Aún más, Π induce por restricción una estructura simpléctica en cada hoja de \mathcal{S} . La colección ω de estas formas simplécticas, que varían suavemente hoja a hoja en este caso, se conoce como forma simpléctica foliada. En resumen, cada tensor de Poisson da lugar a una *foliación simpléctica* (\mathcal{S}, ω) de la variedad M . La dimensión de cada hoja simpléctica S de la foliación \mathcal{S} coincide con el rango del tensor de Poisson,

$$\dim S = \text{rank}_p \Pi := \text{rank} \Pi_p^\sharp, \quad p \in S.$$

Esto es consecuencia de que, por la definición de variedad integral, es

$$\mathbb{T}_p S = \mathcal{C}_p^\Pi.$$

Es claro que la naturaleza singular de la distribución característica \mathcal{C}^Π es heredada por las singularidades de Π . Al respecto, un punto $p_0 \in M$ se dice un punto *regular* del tensor de Poisson Π si la función

$$p \mapsto \text{rank}_p \Pi \equiv \text{const}, \quad \text{alrededor de } p_0.$$

En caso contrario, p_0 se dirá un punto *singular*. Así, una *hoja* simpléctica se llama regular si consiste de puntos regulares y se llama singular si no es regular. Notemos que cada entorno de un punto singular, y por tanto de cada hoja singular, intersecta a hojas simplécticas de distinta dimensión. Por otro lado, el conjunto de puntos regulares resulta un abierto denso en M y en cada componente conexa de este abierto el tensor de Poisson tiene rango constante, por definición.

Nota 1.2.4. Una variedad de Poisson se llama regular si cada uno de sus puntos es un punto regular. Se llama singular si no es regular. \triangleleft

Campos Hamiltonianos y Foliación Simpléctica. Dada un función $h \in C_M^\infty$, el *campo Hamiltoniano* X_h asociado a esta función y relativo a un tensor de Poisson Π es dado por

$$X_h = \Pi^\sharp(dh).$$

La expresión coordenada de X_h , en una carta (U, x^i) de M , es

$$X_h = -\Pi^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Una propiedad importante de los campos Hamiltonianos es el ser generadores de la distribución característica de Π , esto es,

$$\mathcal{C}^\Pi = \text{span}\{X_h \mid h \in C_M^\infty\}.$$

Con esta caracterización, las hojas de la foliación simpléctica (\mathcal{S}, ω) inducida por Π son clases de equivalencia de la siguiente relación binaria de equivalencia de puntos en M : $p_1 \sim p_2$ si y solamente si p_1 y p_2 se conectan por una curva suave por pedazos en M compuesta por curvas integrales de campos Hamiltonianos. Así, la forma simpléctica ω_S en una hoja $S \subset \mathcal{S}$ está determinada por

$$\omega_S(X_f|_S, X_g|_S) = \Pi(df, dg)|_S, \quad f, g \in C_M^\infty.$$

Recíprocamente, por la “afirmación” hecha al inicio de este apartado, cada foliación simpléctica en M induce un único tensor de Poisson en la variedad.

Lema 1.2.5 *Sea \mathcal{S} una foliación en M y ω una 2-forma foliada en \mathcal{S} . Entonces, existe una única estructura de Poisson en M , con foliación simpléctica (\mathcal{S}, ω) , determinada por el corchete*

$$\{f, g\}(p) = \omega_S(X_f|_p, X_g|_p), \quad p \in S \subset \mathcal{S},$$

bajo las siguientes condiciones,

- (i) no degeneración y cerradura: para cada hoja $\iota_S : S \hookrightarrow M$ el pullback $\omega_S = \iota_S^* \omega$ es una 2-forma no degenerada y cerrada en S ,
- (ii) suavidad: para cada $f \in C_M^\infty$ el campo vectorial

$$M \ni p \longmapsto X_f|_p \in \mathbb{T}_p S \subset T_p M$$

determinado de manera única por la relación $\mathbf{i}_{X_f|_p} \omega_S = -d_p f$ es suave.

Estructura Local de las Variedades de Poisson. Un resultado clásico de la geometría de Poisson es el Teorema de Descomposición de Weinstein el cual afirma, grosso modo, que cada variedad de Poisson localmente, alrededor de un punto dado, es el producto de una variedad simpléctica y una (otra) variedad de Poisson. Este teorema implica, y por tanto generaliza, el teorema de Darboux el cual asegura que todas las variedades simplécticas de una misma dimensión son localmente isomorfas, o en otras palabras, que no existen invariantes locales en geometría simpléctica.

Teorema 1.2.6 (Weinstein Splitting Theorem) *Para cada punto p en una variedad de Poisson (M, Π) existe un entorno Poisson-difeomorfo al producto $(S, \omega) \times (N, \Pi_N)$, donde (S, ω) es una variedad simpléctica y (N, Π_N) es una variedad de Poisson tal que $\Pi_N|_p = 0$.*

En términos más explícitos, si el rango de Π en el punto p es $2r$, entonces existe un entorno coordinado centrado en p $(U, q^1, \dots, q^r, p^1, \dots, p^r, y^1, \dots, y^s)$, con $2r + s = \dim M$, tal que en U

$$\Pi = \Pi_S + \Pi_N,$$

con

$$\Pi_S = \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p^i} \quad y \quad \Pi_N = \sum_{k < l}^s \Pi_N^{kl}(y) \frac{\partial}{\partial y^k} \wedge \frac{\partial}{\partial y^l},$$

donde las funciones Π_N^{kl} dependen solamente de las coordenadas y^i 's y son tales que $\Pi_N^{kl}(0) = 0$. De esta descomposición es claro que la estructura simpléctica ω en S es la inducida por el tensor de Poisson no-degenerado Π_S y que S es la intersección con U de la hoja simpléctica S_p de dimensión $2r$ que contiene a p .

Las coordenadas que asegura el Teorema de Descomposición de Weinstein no son únicas. Aún así, los tensores de Poisson Π_N 's correspondientes resultan isomorfos. Esto permite hablar de la estructura de Poisson transversal Π_N al punto p .

Objetos Geométricos Asociados a Π . De manera natural todos los objetos asociados a un corchete de Poisson se pueden expresar en términos del tensor de Poisson correspondiente, tal como sucede con los campos Hamiltonianos. Sea pues Π un tensor de Poisson en M .

Una función $K \in C_M^\infty$ es una función de *Casimir* para Π si y solamente si

$$\Pi^\sharp(dK) = 0$$

En otras palabras, K es una función de Casimir si su diferencial dK pertenece al *kernel* de Π , el cual puntualmente se define por

$$\ker \Pi := \{\alpha \in \mathbb{T}^*M \mid \Pi^\sharp(\alpha) = 0\}.$$

Aún más, notemos que $\ker \Pi = (\mathcal{C}^\Pi)^\circ$, esto es, el kernel de Π coincide con el anulador de la distribución característica de este tensor de Poisson.

Ahora, una manera equivalente de caracterizar a un *campo de Poisson* W en M es por medio de la condición

$$[[W, \Pi]] = 0.$$

Esta condición, como se mostrará en líneas posteriores, tiene una interpretación cohomológica. A saber, que el campo W es un cociclo del complejo inducido por el operador adjunto $[[\Pi, \cdot]]$ del tensor de Poisson Π respecto al corchete de Schouten-Nijenhuis. No es difícil mostrar que los campos Hamiltonianos satisfacen esta ecuación.

Por otro lado, dados dos tensores de Poisson Π_1 y Π_2 en la variedad M , éstos forman un *par de Poisson* si y solamente si

$$[[\Pi_1, \Pi_2]] = 0.$$

El conjunto de combinaciones lineales $\{c_1\Pi_1 + c_2\Pi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ es el *lápiz de Poisson* generado por el par (de Poisson) Π_1 y Π_2 .

Cohomología de Lichnerowicz-Poisson. En cada variedad de Poisson (M, Π) el corchete de Schouten-Nijenhuis da lugar a la noción de *Cohomología de Poisson* la cual se define como la cohomología del complejo de *Lichnerowicz* $(\Gamma \wedge \mathbb{T}M, \delta_\Pi)$, donde

$$\delta_\Pi := [[\Pi, \cdot]] : \Gamma \wedge^\bullet \mathbb{T}M \longrightarrow \Gamma \wedge^{\bullet+1} \mathbb{T}M, \quad (1.12)$$

es el operador de cofrontera,

$$\delta_\Pi^2 = 0,$$

definido por el adjunto de Π respecto al corchete de Schouten-Nijenhuis. Explícitamente, la k -cohomología de Poisson es el cociente

$$\mathcal{H}_\Pi^k(M) := \frac{\ker \delta_\Pi : \Gamma \wedge^k \mathbb{T}M \rightarrow \Gamma \wedge^{k+1} \mathbb{T}M}{\text{Im } \delta_\Pi : \Gamma \wedge^{k-1} \mathbb{T}M \rightarrow \Gamma \wedge^k \mathbb{T}M}. \quad (1.13)$$

A los elementos del espacio $\ker \delta_\Pi$ se les llama *k-cociclos* mientras que a los elementos del espacio $\text{Im } \delta_\Pi$ se les llama *k-cofronteras*.

En general, los cociclos son una *subálgebra* graduada de Poisson de la súper-álgebra de Poisson $(\Gamma \wedge \mathbb{T}M, \wedge, [[,]])$. Las cofronteras son un *ideal* del espacio de cociclos con respecto a ambas operaciones, el producto exterior \wedge y el corchete de Schouten-Nijenhuis $[[,]]$. En consecuencia, se tienen un producto y un corchete en el espacio de cohomología $\mathcal{H}_\Pi(M)$ bien definidos:

$$[A] \wedge [B] := [A \wedge B] \quad \text{y} \quad [[A], [B]] := [[A, B]],$$

para cualesquiera $A, B \in \Gamma \wedge \mathbb{T}M$. Estos productos dotan al espacio $\mathcal{H}_\Pi(M)$ de una estructura de súper-álgebra graduada de Poisson de grado -1 .

El morfismo de haces vectoriales $\Pi^\natural : \mathbb{T}^*M \rightarrow \mathbb{T}M$, asociado al tensor de Poisson Π , induce un morfismo de cohomologías

$$\natural_\Pi^* : \mathcal{H}_{\text{DR}}(M) \longrightarrow \mathcal{H}_\Pi(M), \quad [\alpha] \longmapsto [\natural_\Pi^* \alpha],$$

entre la cohomología de De Rham $\mathcal{H}_{\text{DR}}(M)$ de la variedad M y la cohomología de Poisson $\mathcal{H}_{\Pi}(M)$, donde $\natural_{\Pi} : \Gamma \wedge \mathbb{T}^*M \rightarrow \Gamma \wedge \mathbb{T}M$ es el morfismo (de álgebras) entre formas diferenciales y campos multivectoriales definido por

$$(\natural_{\Pi}\alpha)(\beta^1, \dots, \beta^k) := (-1)^a \alpha(\Pi^{\natural}\beta^1, \dots, \Pi^{\natural}\beta^k), \quad \alpha \in \Gamma \wedge^k \mathbb{T}^*M,$$

para cualesquiera $\beta^i \in \Gamma \mathbb{T}^*M$. Notemos que \natural_{Π} es una extensión natural del morfismo Π^{\natural} para 1-formas.

Caso $k = 0$. La cero cohomología de Poisson, por definición, es

$$\mathcal{H}_{\Pi}^0(M) := \{f \in C_M^{\infty} \mid \delta_{\Pi}(f) = -\Pi^{\natural}(df) = 0\},$$

esto es, el espacio de todas las funciones de *Casimir* para Π .

Caso $k = 1$. La primera cohomología de Poisson, por definición, es

$$\mathcal{H}_{\Pi}^1(M) := \frac{\{\text{Campos de Poisson}\}}{\{\text{Campos Hamiltonianos}\}},$$

Así, la primera cohomología mide la obstrucción a que todo campo de Poisson sea un campo Hamiltoniano. En particular, para el caso de cohomología trivial, cada campo de Poisson es tangente a la foliación simpléctica inducida por Π .

Caso $k = 3$. La segunda cohomología de Poisson, por definición, es

$$\mathcal{H}_{\Pi}^2(M) := \frac{\{\llbracket \Pi, P \rrbracket = 0, P \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{T}M\}}{\{P = \llbracket \Pi, X \rrbracket, X \in \Gamma \mathbb{T}M\}}.$$

En este caso, los 2-cociclos se llaman *deformaciones infinitesimales* de Π y las 2-cofronteras *deformaciones triviales*. Esto se debe a lo siguiente, si P es un 2-cociclo, entonces $\Pi + \varepsilon P$ es un tensor de Poisson módulo ε^2 , para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$,

$$\llbracket \Pi + \varepsilon P, \Pi + \varepsilon P \rrbracket = \varepsilon^2 \llbracket P, P \rrbracket = 0 \quad \text{mód } \varepsilon^2.$$

Si $P = \llbracket \Pi, X \rrbracket$ es una 2-cofrontera, entonces $\Pi + \varepsilon P$ es un tensor de Poisson módulo ε^2 que se obtiene deformando Π mediante el flujo del campo vectorial X ,

$$\Pi + \varepsilon P = (\phi_X^{\varepsilon})_* \Pi$$

Por tanto, la segunda cohomología de Poisson es una medida de la obstrucción a que cada deformación infinitesimal de Π provenga del flujo de un campo vectorial en M , es decir, que sea una deformación trivial.

Capítulo 2

Cálculo de Ehresmann en Haces Fibrados

En esta sección se recordarán algunos hechos básicos sobre las conexiones de Ehresmann [23] en haces fibrados que se utilizarán en secciones posteriores para el cálculo bigraduado en variedades fibradas de Poisson. Ver por ejemplo [33, 47, 64, 65, 67].

2.1. Conexiones de Ehresmann. Propiedades Básicas

Una *variedad fibrada* o haz fibrado es un triple (M, π, B) donde

$$\pi : M \longrightarrow B$$

es una submersión sobreyectiva. A la variedad M se le llama espacio total, a π proyección y a la variedad B base.

La *fibra* sobre un punto $x \in B$ es el conjunto

$$M_x := \pi^{-1}(x) \subset M,$$

el cual resulta ser una subvariedad regular cerrada de M con dimensión igual a $\dim M_x = \dim M - \dim B$.

Nota 2.1.1. La definición de variedad fibrada que aquí se presenta no implica que las fibras son difeomorfas entre sí. En particular, no se asegura trivialidad local. Como ejemplo considere la submersión sobreyectiva $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\pi(x, y) = x$. En este caso, todas las fibras de π son difeomorfas a \mathbb{R} excepto la fibra $\pi^{-1}(0)$ la cual es difeomorfa a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, que es una variedad disconexa. \triangleleft

La unión de los espacios tangentes a las fibras define una distribución regular \mathbb{V} en M que se llama *distribución vertical* y que se identifica con

$$\mathbb{V} := \ker d\pi \subset TM.$$

El *anulador* de esta distribución se denotará por

$$\mathbb{V}^\circ := \text{Ann } \mathbb{V} \subset \mathbb{T}^*M.$$

Notemos que los rangos de estas distribuciones son $\text{rank } \mathbb{V} = \dim M - \dim B$ y $\text{rank } \mathbb{V}^\circ = \dim B$, respectivamente.

Un *morfismo de fibrados* entre dos variedades fibradas $\pi_1 : M_1 \rightarrow B_1$ y $\pi_2 : M_2 \rightarrow B_2$ es un par de funciones (F, f) , con $F : M_1 \rightarrow M_2$ y $f : B_1 \rightarrow B_2$, que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

Notemos que la imágen de una fibra M_x bajo F es la fibra $M_{f(x)}$, para cada $x \in B$. En el caso particular de ser $B_1 = B_2$ y $f = \text{id}_B$ se dice solamente que F es un *morfismo sobre* B .

Una *conexión de Ehresmann* en una variedad fibrada M es un morfismo de fibrados

$$\gamma : \mathbb{T}M \longrightarrow \mathbb{T}M \quad \text{tal que} \quad \text{Im } \gamma \subseteq \mathbb{V} \quad \text{y} \quad \gamma|_{\mathbb{V}} = \text{id}_{\mathbb{V}}.$$

Notemos que estas condiciones implican que $\gamma^2 = \gamma$ e $\text{Im } \gamma = \mathbb{V}$. Equivalentemente, una conexión de Ehresmann es una 1-forma valuada vectorial en M

$$\gamma \in \Omega^1(M; \mathbb{V}) \quad \text{tal que} \quad \gamma|_{\Gamma\mathbb{V}} = \text{id}_{\Gamma\mathbb{V}}.$$

Por otro lado, una *distribución horizontal* en M es un subhaz vectorial $\mathbb{H} \subset \mathbb{T}M$ complementario a la distribución vertical \mathbb{V} , es decir, tal que

$$\mathbb{T}M = \mathbb{H} \oplus \mathbb{V}. \tag{2.1}$$

Notemos que \mathbb{H} es una distribución regular en M con rango igual a $\text{rank } \mathbb{H} = \dim B$. Aún más, la descomposición (2.1) induce de manera automática una descomposición del haz contangente sobre M dada por

$$\mathbb{T}^*M = \mathbb{V}^\circ \oplus \mathbb{H}^\circ, \tag{2.2}$$

donde $\mathbb{H}^\circ \subset \mathbb{T}^*M$ denota el subhaz anulador de \mathbb{H} .

Como es sabido *existe una correspondencia uno a uno entre conexiones de Ehresmann y distribuciones horizontales en* M . En efecto, dada una distribución horizontal \mathbb{H} en M se define $\gamma := \text{pr}_{\mathbb{V}} : \mathbb{H} \oplus \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$. Recíprocamente, dada una conexión de Ehresmann $\gamma \in \Omega^1(M; \mathbb{V})$ esta induce una conexión de Ehresmann \mathbb{H} en M definida por

$$\mathbb{H} := \ker \gamma. \tag{2.3}$$

Expresión Coordinada. En lo que resta de este capítulo, respecto al haz fibrado $\pi : M \rightarrow B$, serán

$$b := \dim B \quad \text{y} \quad r := \dim \pi^{-1}(x), \quad \forall x \in B;$$

esto es, b será la dimensión de la variedad base B y r la dimensión de las fibras de π . Además, se fijará

$$(U; x^i, y^a) \quad \text{una carta coordenada adaptada a } \pi, \quad i = 1, \dots, b; \quad a = 1, \dots, r; \quad (2.4)$$

esto es, una carta en la cual π es una proyección estándar, $\pi(x^1, \dots, x^b, y^1, \dots, y^r) = (x^1, \dots, x^b)$. Notemos que como consecuencia el conjunto $\{x^i\}$ consiste de coordenadas a lo largo de la base B y el conjunto $\{y^a\}$ de coordenadas a lo largo de las fibras de π .

Las coordenadas en (2.4) inducen la siguiente base de campos vectoriales y 1-formas diferenciales en M

$$\begin{aligned} \Gamma TM &= \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^a} \right\}, & \text{en particular} \quad \mathbb{V} &= \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial y^a} \right\}; \\ \Gamma T^*M &= \text{span} \{ dx^i, dy^a \}, & \text{en particular} \quad \mathbb{V}^\circ &= \text{span} \{ dx^i \}. \end{aligned}$$

Así, cada conexión de Ehresmann γ en M tiene por representación coordenada

$$\gamma = (\gamma_i^a dx^i + dy^a) \otimes \frac{\partial}{\partial y^a}. \quad (2.5)$$

Las funciones $\gamma_i^a \in C_M^\infty$ se llaman las *componentes* de γ y están determinadas por

$$\gamma_i^a = \langle dy^a, \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \rangle. \quad (2.6)$$

Transición entre Conexiones de Ehresmann. Dadas dos conexiones de Ehresmann γ y $\tilde{\gamma}$ en M éstas se relacionan por

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \Xi, \quad (2.7)$$

donde $\Xi : TM \rightarrow TM$ es un morfismo de haces vectoriales con la propiedad

$$\text{Im } \Xi \subseteq \mathbb{V} \subseteq \ker \Xi. \quad (2.8)$$

Notemos que esta propiedad implica que $\Xi^2 = 0$. En otras palabras, (2.7) dice que el conjunto de todas las conexiones en M es un espacio afín asociado al espacio vectorial de morfismos Ξ que satisfacen (2.8).

Las respectivas distribuciones horizontales están relacionadas por

$$\tilde{\mathbb{H}} := \ker \tilde{\gamma} = (\text{id}_{TM} + \Xi)(\mathbb{H}), \quad (2.9)$$

donde \mathbb{H} está definido en (2.3). El subhaz anulador de $\tilde{\mathbb{H}}$ es dado por

$$\tilde{\mathbb{H}}^\circ = (\text{id}_{T^*M} - \Xi^*)(\mathbb{H}^\circ), \quad (2.10)$$

donde $\Xi^* : \mathbb{T}^*M \rightarrow \mathbb{T}^*M$ es el morfismo dual de Ξ . Notemos que

$$\text{Im } \Xi^* \subseteq \mathbb{V}^\circ \subseteq \ker \Xi^*. \quad (2.11)$$

Expresión Coordinada. En una carta coordenada (adaptada) como en (2.4) la expresión de la 1-forma valuada vectorial Ξ en (2.7) es dada por

$$\Xi = \Xi_i^a dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^a}, \quad (2.12)$$

donde las funciones componentes $\Xi_i^a \in C_M^\infty$ están determinadas por $\Xi_i^a = \langle dy^a, \Xi(\frac{\partial}{\partial x^i}) \rangle$.

Levantamiento Horizontal de Campos. Sea u un campo vectorial en B . Se define el *levantamiento horizontal* de u , respecto a una conexión de Ehresmann γ en M , como el *único* campo horizontal $\text{hor}^\gamma u \in \Gamma \mathbb{H}$ en M que está π -relacionado con u , esto es, el único que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}M & \xrightarrow{d\pi} & \mathbb{T}B \\ \text{hor}^\gamma u \uparrow & & \uparrow u \\ M & \xrightarrow{\pi} & B \end{array} \iff d\pi \circ \text{hor}^\gamma u = u \circ \pi.$$

Recordemos que las secciones de una distribución horizontal \mathbb{H} se llaman *campos horizontales*. Si bien no todo campo horizontal es el levantamiento horizontal de un campo vectorial en la base B , sí se cumple que estos levantamientos generan el espacio de campos horizontales, es decir,

$$\Gamma \mathbb{H} = \text{span}\{ \text{hor}^\gamma u \mid u \in \Gamma \mathbb{T}B \}. \quad (2.13)$$

Ahora, dada otra conexión de Ehresmann $\tilde{\gamma}$ en M definida por (2.7), se sigue de (2.9) que

$$\text{hor}^{\tilde{\gamma}} u = \text{hor}^\gamma u + \Xi(\text{hor}^\gamma u). \quad (2.14)$$

Expresión Coordinada. En una carta coordenada (adaptada) como en (2.4) está bien definido el levantamiento horizontal de los campos básicos $\partial/\partial x^i$ en B . La representación coordenada de estos levantamientos es

$$\text{hor}_i^\gamma \equiv \text{hor}^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} - \gamma_i^a \frac{\partial}{\partial y^a}, \quad (2.15)$$

donde γ_i^a son las componentes de la conexión de Ehresmann γ definidas en (2.6).

Nota 2.1.2. Por convenio, $\partial/\partial x^i$ denota los campos básicos asociados a las coordenadas x^i tanto en la variedad fibrada M como en la variedad base B . \triangleleft

Bases Locales de Campos Vectoriales y 1-Formas Diferenciales. Recordemos que dada una conexión de Ehresmann γ en M se inducen las descomposiciones (2.1) y (2.2) de los

haces vectoriales $\mathbb{T}M$ y \mathbb{T}^*M respectivamente. Respecto a la descomposición (2.1), en una carta coordenada como en (2.4), se tiene la siguiente base para campos vectoriales

$$\Gamma \mathbb{T}M = \text{span} \left\{ \text{hor}_i^\gamma, \frac{\partial}{\partial y^a} \right\}, \quad \text{en particular} \quad \mathbb{H} = \text{span} \left\{ \text{hor}_i^\gamma \right\}. \quad (2.16)$$

Análogamente, respecto a la descomposición (2.2) se tiene la siguiente base para 1-formas diferenciales

$$\Gamma \mathbb{T}^*M = \text{span} \left\{ dx^i, \eta_\gamma^a \right\}, \quad \text{en particular} \quad \mathbb{H}^\circ = \text{span} \left\{ \eta_\gamma^a \right\}, \quad (2.17)$$

donde las 1-formas η_γ^a dependientes de γ se definen por

$$\eta^a \equiv \eta_\gamma^a = \gamma_i^a dx^i + dy^a, \quad (2.18)$$

con γ_i^a las componentes de la conexión de Ehresmann γ definidas en (2.6).

Nota 2.1.3. Naturalmente se tiene una dualidad entre las bases

$$\left\{ \text{hor}_1^\gamma, \dots, \text{hor}_b^\gamma, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^r} \right\} \quad \xleftrightarrow{\text{dual}} \quad \left\{ dx^1, \dots, dx^b, \eta_\gamma^1, \dots, \eta_\gamma^r \right\}$$

◁

Es claro que los campos vectoriales hor_i y las 1-formas diferenciales η^a dependen de la conexión de Ehresmann γ fijada. Dada otra conexión de Ehresmann $\tilde{\gamma}$ en M definida por (2.7) se tiene que el cambio de estos elementos básicos es, respectivamente, dado por

$$\text{hor}_i^{\tilde{\gamma}} = \text{hor}_i^\gamma + \Xi_i^a \frac{\partial}{\partial y^a} \quad \text{y} \quad \eta_{\tilde{\gamma}}^a = \eta_\gamma^a - \Xi_i^a dx^i, \quad (2.19)$$

donde Ξ_i^a son las componentes de la 1-forma valuada vectorial Ξ definidas en (2.12).

Curvatura de una Conexión de Ehresmann. En general, dada una conexión en M , el corchete de Lie de dos campos horizontales no es un campo horizontal. Una medida de la obstrucción a que esto suceda es lo que se conoce como curvatura de la conexión de Ehresmann.

La *curvatura* de una conexión de Ehresmann γ en M es la 2-forma (vectorial) en la base definida por

$$\text{Curv}^\gamma(u, v) := [\text{hor}^\gamma u, \text{hor}^\gamma v] - \text{hor}^\gamma [u, v], \quad \forall u, v \in \Gamma \mathbb{T}B. \quad (2.20)$$

Notemos que esta forma vectorial valúa en campos verticales en M como consecuencia de que los campos vectoriales $[\text{hor}^\gamma u, \text{hor}^\gamma v]$ y $\text{hor}^\gamma [u, v]$ están (ambos) π -relacionados con el corchete $[u, v] \in \Gamma \mathbb{T}B$. Es claro que la curvatura de una conexión es cero si y solamente si el corchete de Lie de campos horizontales es nuevamente horizontal. Esto equivale a decir que la distribución horizontal (regular) \mathbb{H} asociada a γ es integrable en el sentido de Frobenius.

En ciertos casos resulta conveniente pensar a la 2-forma de curvatura como una forma vectorial en M . Esto se realiza definiendo la 2-forma valuada vectorial $R^\gamma \in \Omega(M; \mathbb{V})$ por

$$R^\gamma(\text{hor}^\gamma u, \text{hor}^\gamma v) := \text{Curv}^\gamma(u, v) \quad \text{y} \quad R^\gamma(X, \cdot) = 0, \quad \forall X \in \Gamma\mathbb{V}. \quad (2.21)$$

Esto permite dar una definición de curvatura en términos del corchete de Frölicher-Nijenhuis [50],

$$R^\gamma := \frac{1}{2} [\gamma, \gamma]_{\text{FN}},$$

la cual se puede adaptar a variedades foliadas (regulares), no necesariamente fibradas.

Ahora, dada otra conexión de Ehresmann $\tilde{\gamma}$ en M , por (2.14), se tiene la siguiente regla de transición para la curvatura

$$\begin{aligned} \text{Curv}^{\tilde{\gamma}}(\text{hor}^{\tilde{\gamma}} u_1, \text{hor}^{\tilde{\gamma}} u_2) &= \text{Curv}^\gamma(\text{hor}^\gamma u_1, \text{hor}^\gamma u_2) + [\Xi(\text{hor}^\gamma u_1), \Xi(\text{hor}^\gamma u_2)] - \Xi[\text{hor}^\gamma u_1, \text{hor}^\gamma u_2] \\ &\quad + [\Xi(\text{hor}^\gamma u_1), \text{hor}^\gamma u_2] + [\text{hor}^\gamma u_1, \Xi(\text{hor}^\gamma u_2)] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Expresión Coordinada. En una carta coordenada (adaptada) como en (2.4) la expresión de la 2-forma de curvatura de γ definida en (2.20) es dada por

$$\text{Curv}^\gamma = \frac{1}{2} C_{ij}^a dx^i \wedge dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^a}, \quad i, j = 1, \dots, b;$$

donde las funciones $C_{ij}^a \in C_M^\infty$ (dependientes de γ) se llaman las *componentes* de la curvatura y están determinadas por

$$C_{ij}^a = \langle dy^a, \text{Curv}^\gamma(\text{hor}_i^\gamma, \text{hor}_j^\gamma) \rangle,$$

o en términos más explícitos $C_{ij}^a = \mathcal{L}_{\text{hor}_j^\gamma} \gamma_i^a - \mathcal{L}_{\text{hor}_i^\gamma} \gamma_j^a$, donde γ_i^a son las componentes de la conexión de Ehresmann γ definidas en (2.6).

Dada otra conexión de Ehresmann $\tilde{\gamma}$ en M , definida por (2.7), la expresión en las coordenadas (2.4) de la 2-forma de curvatura asociada a esta conexión es $\text{Curv}^{\tilde{\gamma}} = \frac{1}{2} \tilde{C}_{ij}^a dx^i \wedge dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^a}$, donde las funciones componentes \tilde{C}_{ij}^a son dadas por

$$\tilde{C}_{ij}^a = C_{ij}^a - \Xi_i^e \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial y^e}} (\gamma_j^a - \Xi_j^a) + \Xi_j^e \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial y^e}} (\gamma_i^a - \Xi_i^a) + \mathcal{L}_{\text{hor}_i^\gamma} \Xi_j^a - \mathcal{L}_{\text{hor}_j^\gamma} \Xi_i^a,$$

con $e = 1, \dots, r$; y donde γ_k^a y Ξ_k^e son las componentes de la conexión de Ehresmann γ y de la 1-forma valuada vectorial Ξ en (2.6) y (2.12) respectivamente.

2.2. Bigraduación de Campos Multivectoriales, Formas Diferenciales y Operadores Diferenciales

Dada una conexión de Ehresmann γ en M , las descomposiciones (2.1) y (2.2) inducen una descomposición \mathbb{Z} -bigrada de los módulos de campos multivectoriales y formas diferenciales en M dependiente de γ ,

$$\Gamma \wedge^k \mathbb{T}M = \bigoplus_{i+a=k} \Gamma \wedge^{i,a} \mathbb{T}M \quad \text{y} \quad \Gamma \wedge^k \mathbb{T}^*M = \bigoplus_{i+a=k} \Gamma \wedge^{i,a} \mathbb{T}^*M, \quad (2.23)$$

donde

$$\Gamma \wedge^{i,a} \mathbb{T}M := \Gamma \wedge^i \mathbb{H} \otimes \Gamma \wedge^a \mathbb{V} \quad \text{y} \quad \Gamma \wedge^{i,a} \mathbb{T}^*M := \Gamma \wedge^i \mathbb{V}^\circ \otimes \Gamma \wedge^a \mathbb{H}^\circ.$$

A los elementos de estos dos últimos espacios se les llama campos multivectoriales y formas diferenciales de *bigrado* (i, a) respectivamente. A los campos multivectoriales con bigrado $(\bullet, 0)$ se les llama *horizontales* y a los con bigrado $(0, \bullet)$ *verticales*, la terminología para formas diferenciales es análoga. Por comodidad, el bigrado de un campo multivectorial o de una forma diferencial se escribirá como subíndice de éstos, por ejemplo, $A_{i,a}$ ó $\alpha_{i,a}$.

De manera explícita, las descomposiciones (2.23) dicen que, en particular, todo $A \in \Gamma \wedge^k \mathbb{T}M$ se puede expresar como una suma (finita) de campos multivectoriales bigraduados,

$$A = A_{k,0} + A_{k-1,1} + \cdots + A_{1,k-1} + A_{0,k}, \quad (2.24)$$

Notemos que, por definición, es

$$A_{i,a} = 0, \quad \text{si} \quad i > \text{rank } \mathbb{H}, \quad a > \text{rank } \mathbb{V} \quad \text{ó} \quad i, a > k.$$

Para una forma diferencial $\alpha \in \Gamma \wedge^k \mathbb{T}^*M$ la descomposición (2.24) es análoga y de manera similar $\alpha_{i,a} = 0$, si $i > \text{rank } \mathbb{V}^\circ$, $a > \text{rank } \mathbb{H}^\circ$ ó $i, a > k$.

Es claro que las descomposiciones en (2.23) y (2.24) dependen de la conexión de Ehresmann fijada. En general, resulta complicado escribir reglas de transición entre las descomposiciones bigraduadas asociadas a conexiones de Ehresmann distintas. Aún así, para el caso de campos vectoriales, campos bivectoriales y 1-formas diferenciales tal descripción es realizable.

Bases Locales de Campos Multivectoriales y Formas Diferenciales. Dada una conexión de Ehresmann γ en M las bases para campos vectoriales y 1-formas diferenciales en (2.16) y (2.17) inducidas por esta conexión permiten construir una base para campos multivectoriales y formas diferenciales en M que se corresponde con la descomposición bigraduada de éstos definida en (2.23).

Respecto a la descomposición (2.23), en una carta coordenada como en (2.4), se tiene la siguiente base para campos multivectoriales de bigrado (k, l)

$$\Gamma \wedge^{k,l} \mathbb{T}M = \text{span} \left\{ \text{hor}_{i_1}^\gamma \wedge \cdots \wedge \text{hor}_{i_k}^\gamma \wedge \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y^{i_l}} \right\}, \quad (2.25)$$

en particular,

$$\Gamma \wedge^k \mathbb{H} = \text{span} \left\{ \text{hor}_{i_1}^\gamma \wedge \cdots \wedge \text{hor}_{i_k}^\gamma \right\} \quad \text{y} \quad \Gamma \wedge^l \mathbb{V} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y^{i_l}} \right\};$$

con los índices $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, b$; e $i_1, \dots, i_l = 1, \dots, r$.

Análogamente, respecto a la descomposición (2.23) se tiene la siguiente base para formas diferenciales de bigrado (k, l)

$$\Gamma \wedge^{k,l} \mathbb{T}^*M = \text{span} \left\{ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge \eta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \eta^{i_l} \right\},$$

con $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, b$; e $i_1, \dots, i_l = 1, \dots, r$. En particular,

$$\Gamma \wedge^k \mathbb{V}^\circ = \text{span} \left\{ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right\} \quad \text{y} \quad \Gamma \wedge^l \mathbb{H}^\circ = \text{span} \left\{ \eta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \eta^{i_l} \right\}.$$

con los índices $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, b$; e $i_1, \dots, i_l = 1, \dots, r$.

Transición de la Bigraduación de Campos y Formas. Sean γ y $\tilde{\gamma}$ dos conexiones de Ehresmann en M relacionadas por (2.7) y (2.8). Sean \mathbb{H} y $\tilde{\mathbb{H}}$ las respectivas distribuciones horizontales definidas por (2.3) y (2.9) (respectivamente).

Por (2.23) se tienen dos descomposiciones bigraduadas para el módulo de campos vectoriales en M : $\Gamma \mathbb{T}M = \Gamma \mathbb{H} \oplus \Gamma \mathbb{V}$ y $\Gamma \mathbb{T}M = \Gamma \tilde{\mathbb{H}} \oplus \Gamma \mathbb{V}$. Para cada $X \in \Gamma \mathbb{T}M$ sean

$$\begin{aligned} X &= X_{1,0} + X_{0,1}, & \text{bigraduación respecto a } \gamma, \\ X &= \tilde{X}_{1,0} + \tilde{X}_{0,1}, & \text{bigraduación respecto a } \tilde{\gamma}. \end{aligned}$$

Entonces, por (2.9), se tiene que

$$\tilde{X}_{1,0} = X_{1,0} + \Xi(X_{1,0}) \quad \text{y} \quad \tilde{X}_{0,1} = X_{0,1} - \Xi(X_{1,0}).$$

Análogamente, por (2.23), se tienen dos descomposiciones bigraduadas para el módulo de formas diferenciales en M : $\Gamma \mathbb{T}^*M = \Gamma \mathbb{V}^\circ \oplus \Gamma \mathbb{H}^\circ$ y $\Gamma \mathbb{T}^*M = \mathbb{V}^\circ \oplus \Gamma \tilde{\mathbb{H}}^\circ$. Para cada $\alpha \in \Gamma \mathbb{T}^*M$ sean

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{1,0} + \alpha_{0,1}, & \text{bigraduación respecto a } \gamma, \\ \alpha &= \tilde{\alpha}_{1,0} + \tilde{\alpha}_{0,1}, & \text{bigraduación respecto a } \tilde{\gamma}. \end{aligned}$$

Entonces, por (2.10), se tiene que

$$\tilde{\alpha}_{1,0} = \alpha_{1,0} - \Xi^*(\alpha_{1,0}) \quad \text{y} \quad \tilde{\alpha}_{0,1} = \alpha_{0,1} + \Xi^*(\alpha_{1,0}).$$

Transición de la Bigraduación para Campos Bivectoriales. Sean γ y $\tilde{\gamma}$ dos conexiones de Ehresmann en M relacionadas por (2.7) y (2.8). Dado un campo bivectorial $\Pi \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{T}M$, sean

$$\Pi = \Pi_{2,0} + \Pi_{1,1} + \Pi_{0,2}, \quad \text{bigraduación respecto a } \gamma, \quad (2.26)$$

$$\Pi = \tilde{\Pi}_{2,0} + \tilde{\Pi}_{1,1} + \tilde{\Pi}_{0,2}, \quad \text{bigraduación respecto a } \tilde{\gamma}. \quad (2.27)$$

Lema 2.2.1 *Las componentes de las descomposiciones bigraduadas (2.26) y (2.27) de un campo bivectorial Π en M se relacionan por medio de las siguientes ecuaciones (lineales)*

$$\tilde{\Pi}_{2,0}^{\natural} = (\text{id}_{\mathbb{T}M} + \Xi) \circ \Pi_{2,0}^{\natural} \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*M} + \Xi^*), \quad (2.28)$$

$$\tilde{\Pi}_{1,1}^{\natural} = (\text{id}_{\mathbb{T}M} + \Xi) \circ \left(\Pi_{1,1}^{\natural} - \Xi \circ \Pi_{2,0}^{\natural} - \Pi_{2,0}^{\natural} \circ \Xi^* \right) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*M} + \Xi^*), \quad (2.29)$$

$$\tilde{\Pi}_{0,2}^{\natural} = \Pi_{0,2}^{\natural} - \Xi \circ \Pi_{1,1}^{\natural} - \left(\Pi_{1,1}^{\natural} - \Xi \circ \Pi_{2,0}^{\natural} \right) \circ \Xi^*, \quad (2.30)$$

donde $\Xi^* : \mathbb{T}^*M \rightarrow \mathbb{V}^\circ$ es el morfismo dual de Ξ .

Demostración. Sea (U, x^i, y^a) una carta coordenada adaptada a la fibración π tal como en (2.4). En esta carta, respecto a la base (2.25), la descomposición bigraduada (2.26) de Π es dada por

$$\Pi = \frac{1}{2} \Pi^{ij} \text{hor}_i^\gamma \wedge \text{hor}_j^\gamma + \Pi^{ia} \text{hor}_i^\gamma \wedge \frac{\partial}{\partial y^a} + \frac{1}{2} \Pi^{ab} \frac{\partial}{\partial y^a} \wedge \frac{\partial}{\partial y^b},$$

con $\Pi_{2,0} = \frac{1}{2} \Pi^{ij} \text{hor}_i^\gamma \wedge \text{hor}_j^\gamma$, $\Pi_{1,1} = \Pi^{ia} \text{hor}_i^\gamma \wedge \frac{\partial}{\partial y^a}$ y $\Pi_{0,2} = \frac{1}{2} \Pi^{ab} \frac{\partial}{\partial y^a} \wedge \frac{\partial}{\partial y^b}$. Luego, usando las fórmulas en (2.19) y después de algunos cálculos directos, se tiene que las componentes bigraduadas de la descomposición (bigraduada) de Π en (2.27) son dadas por

$$\tilde{\Pi}_{2,0} = \Pi_{2,0} + \Pi^{ij} \Xi_j^a \text{hor}_i^\gamma \wedge \frac{\partial}{\partial y^a} + \frac{1}{2} \Xi_i^a \Pi^{ij} \Xi_j^b \frac{\partial}{\partial y^a} \wedge \frac{\partial}{\partial y^b},$$

$$\tilde{\Pi}_{1,1} = \Pi_{1,1} - \Pi^{ij} \Xi_j^a \text{hor}_i^\gamma \wedge \frac{\partial}{\partial y^a} - \left(\Pi^{ia} \Xi_i^b + \Xi_i^a \Pi^{ij} \Xi_j^b \right) \frac{\partial}{\partial y^a} \wedge \frac{\partial}{\partial y^b},$$

$$\tilde{\Pi}_{0,2} = \Pi_{0,2} + \left(\Pi^{ia} \Xi_i^b + \frac{1}{2} \Xi_i^a \Pi^{ij} \Xi_j^b \right) \frac{\partial}{\partial y^a} \wedge \frac{\partial}{\partial y^b}.$$

Estas igualdades implican (2.28)-(2.30) respectivamente. \square

Corolario 2.2.2 *La componente $\tilde{\Pi}_{1,1}$ en (2.27) es cero si y solamente si*

$$\Pi_{1,1}^{\natural}|_{\mathbb{V}^\circ} = \Xi \circ \Pi_{2,0}^{\natural}|_{\mathbb{V}^\circ} \quad (2.31)$$

Demostración. Notemos que $\Xi^2 = 0$, por (2.8). Esto implica que el morfismo $(\text{id}_{\mathbb{T}M} + \Xi)$ es invertible. Por tanto, de (2.29), se sigue que $\tilde{\Pi}_{1,1} = 0$ si y solamente si $\Pi_{1,1}^{\natural} = \Xi \circ \Pi_{2,0}^{\natural} + \Pi_{2,0}^{\natural} \circ \Xi^*$. Esta igualdad, debido a la descomposición (2.1), es equivalente a (2.31) por ser $\Pi_{1,1}^{\natural}$ un morfismo antisimétrico. \square

Notemos que por la antisimetría del morfismo $\Pi_{1,1}^{\natural}$ la condición (2.31) es equivalente a

$$\Pi_{1,1}^{\natural}|_{\mathbb{H}^\circ} = \Pi_{2,0}^{\natural} \circ \Xi^*|_{\mathbb{H}^\circ}$$

Corolario 2.2.3 *El rango de la componente $\Pi_{2,0}$ en (2.26) es independiente de γ .*

Demostración. Esta afirmación es consecuencia de que el morfismo $(\text{id}_{\mathbb{T}M} + \Xi)$ en (2.28) es invertible, por ser $\Xi^2 = 0$ debido a (2.8). \square

Bigraduación de Operadores Diferenciales. Cada conexión de Ehresmann en M no solo induce una bigraduación en los haces tangente y cotangente como en (2.23) si no también una bigraduación en los operadores diferenciales que actúan sobre los módulos de campos multivectoriales y formas diferenciales.

Sea γ una conexión de Ehresmann en M . Un operador diferencial T sobre el módulo de campos multivectoriales se dice de bigrado (j, b) , respecto a γ , si

$$T(\Gamma \wedge^{i,a} \mathbb{T}M) \subseteq \Gamma \wedge^{i+j, a+b} \mathbb{T}M.$$

El bigrado de T se escribirá como subíndice de éste: $T_{j,b}$. La terminología y la notación es análoga para operadores diferenciales sobre el módulo de formas diferenciales. Es inmediato comprobar que la composición de un operador diferencial de bigrado (j, b) con un operador diferencial de bigrado (j', b') es un operador diferencial de bigrado $(j + j', b + b')$.

A continuación, se presentan bigraduaciones de algunos operadores diferenciales conocidos.

Corchete de Schouten-Nijenhuis. Sean $A = A_{i,a}$ y $B = B_{j,b}$ dos campos multivectoriales de bigrados (i, a) y (j, b) respectivamente. El corchete de Schouten-Nijenhuis de A y B , que es un campo multivectorial de grado $(i + j + a + b - 1)$, tiene por descomposición bigraduada respecto a la conexión γ

$$[[A, B]] = [[A, B]]_{i+j, a+b-1} + [[A, B]]_{i+j-1, a+b} + [[A, B]]_{i+j-2, a+b+1} \quad (2.32)$$

Producto Interior. Dado un campo multivectorial A en M de bigrado (j, b) la *inserción* de éste en formas diferenciales es un operador diferencial de bigrado $(-j, -b)$,

$$\mathbf{i}_A(\Gamma \wedge^{i,a} \mathbb{T}^*M) \subseteq \Gamma \wedge^{i-j, a-b} \mathbb{T}^*M,$$

el cual resulta una *derivación* del producto exterior para formas diferenciales.

Análogamente, dada una forma diferencial α en M de bigrado (j, b) la *inserción* de ésta en campos multivectoriales es un operador diferencial de bigrado $(-j, -b)$,

$$\mathbf{i}_\alpha(\Gamma \wedge^{i,a} \mathbb{T}M) \subseteq \Gamma \wedge^{i-j, a-b} \mathbb{T}M.$$

el cual resulta una *derivación* del producto exterior para campos multivectoriales.

Diferencial Exterior. La descomposición bigraduada respecto a γ de la diferencial exterior para formas es

$$d = d_{1,0} + d_{2,-1} + d_{0,1}, \quad (2.33)$$

donde cada uno de los términos $d_{i,a}$ resulta ser una *derivación* del producto exterior para formas diferenciales. La condición de cofrontera $d^2 = 0$ implica las siguientes relaciones entre las componentes bigraduadas [62],

$$d_{1,0}^2 + d_{2,-1} \circ d_{0,1} + d_{0,1} \circ d_{2,-1} = 0, \quad (2.34)$$

$$d_{1,0} \circ d_{0,1} + d_{0,1} \circ d_{1,0} = 0, \quad (2.35)$$

$$d_{0,1}^2 = 0. \quad (2.36)$$

En particular, se tiene que el operador $d_{0,1}$ es de cofrontera.

2.3. Conexiones de Poisson

Una variedad fibrada M se llama *haz de Poisson* si admite una estructura de Poisson (no trivial) por fibras la cual varía suavemente de una a otra. O de manera equivalente, si admite una estructura de Poisson vertical $P \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}$.

Una conexión de Ehresmann γ en un haz de Poisson (M, P) se dice una *conexión de Poisson* si

$$\mathcal{L}_{\text{hor}^\gamma u} P = 0, \quad \forall u \in \Gamma TB. \quad (2.37)$$

Nota 2.3.1. La existencia de conexiones de Poisson se asegura en haces fibrados localmente triviales y en haces fibrados que admiten una estructura de Poisson de acoplamiento [72]. \triangleleft

Como consecuencia de la definición (2.37), por (2.13), se tiene que

$$(\mathcal{L}_X P)_{0,2} = 0, \quad \forall X \in \Gamma \mathbb{H},$$

donde la bigraduación es con respecto a la conexión γ .

Otra de las propiedades principales de las conexiones de Poisson es que la curvatura toma valores en los campos de Poisson verticales, esto es,

$$\text{Curv}^\gamma(u, v) \in \text{Poiss}(M, P), \quad \forall u, v \in \Gamma B.$$

Así, los campos verticales $\text{Curv}^\gamma(u, v)$ son una clase especial de campos de Poisson para P .

Una cuestión que surge de manera natural es el generar conexiones de Poisson a partir de una dada. Usando (2.7) y por la definición (2.37) de conexión de Poisson se tiene la siguiente respuesta.

Lema 2.3.2 *Si γ es una conexión de Poisson en M , entonces $\tilde{\gamma} = \gamma + P^\natural \circ (d\mu)^\flat$ es otra conexión de Poisson en M , para cada $\mu \in \Gamma \mathbb{V}^\circ$.*

Demostración. Recordemos que dos conexiones de Ehresmann γ y $\tilde{\gamma}$ se relacionan por (2.7) y (2.8). En este caso es claro que si se define $\Xi = -P^\natural \circ (d\mu)^\flat$, entonces Ξ satisface (2.8). Ahora, por (2.14), se sigue que $\tilde{\gamma}$ es una conexión de Poisson si y sólo si $\llbracket P^\natural(\langle d\mu, \text{hor}^\gamma u \rangle), P \rrbracket = 0$, para todo $u \in \Gamma TB$. Lo cual se verifica con cálculo directo por la definición (1.6) del corchete de Schouten-Nijenhuis. \square

Capítulo 3

Tensores de Poisson en Variedades Orientables

En este capítulo se abordan dos problemas de la geometría de Poisson: la construcción de una estructura de Poisson que admita como funciones de Casimir un conjunto dado de funciones y la formulación de criterios de unimodularidad [39, 31, 76, 32, 16, 53]. En las secciones siguientes se presentan respuestas parciales a estos problemas empleando como estrategia el uso de formas diferenciales y la aplicación del cálculo de Koszul, en particular, herramientas tales como el operador traza [39].

Una de las ventajas que se tiene al trabajar en variedades orientables es poder reemplazar el cálculo contravariante, es decir, con campos multivectoriales, por el cálculo con formas diferenciales (covariante). Facilitando así ciertas operaciones empleadas en el estudio de las estructuras de Poisson. En particular, se puede prescindir del corchete de Schouten-Nijenhuis y en su lugar utilizar operadores tales como la derivada de Lie para formas diferenciales.

3.1. Tensores de Poisson y Formas Diferenciales

Es bien sabido que en cada superficie todo campo bivectorial es un tensor de Poisson. En particular, en superficies orientadas estos tensores se parametrizan por funciones escalares suaves. En variedades tridimensionales lo anterior ya no ocurre, en general. Lo que sí sucede es que bajo condiciones de orientabilidad la identidad de Jacobi para un tensor de Poisson es equivalente a la condición de integrabilidad de una 1-forma diferencial cuyo kernel determina la distribución característica del tensor. En esta sección se presenta una generalización de esta situación a variedades orientables de dimensión arbitraria.

Sea M una variedad m -dimensional *orientada* con una forma de *volumen* Ω . Como es sabido esta forma de volumen establece una correspondencia uno a uno entre campos multivectoriales y formas diferenciales en M . En particular, cada campo bivectorial $\Pi \in \Gamma \wedge^2 TM$

induce una forma diferencial $\rho \in \Gamma \wedge^{m-2} T^*M$ definida por

$$\rho := \mathbf{i}_\Pi \Omega. \quad (3.1)$$

Es inmediato comprobar que la asignación $\Pi \mapsto \rho$ es un *isomorfismo* C_M^∞ -lineal que claramente depende de la elección de una forma de volumen. La *inversa* de este isomorfismo es dada por $\rho \mapsto \mathbf{i}_\rho \mathbf{Q}$, donde $\mathbf{Q} \in \Gamma \wedge^m TM$ denota el campo multivectorial (volumen) dual de Ω , esto es, el único tal que

$$\mathbf{i}_\mathbf{Q} \Omega = 1. \quad (3.2)$$

En este contexto, la idea general es determinar condiciones para una forma diferencial ρ bajo las cuales el campo bivectorial Π en (3.1) defina una estructura de Poisson en M . Después, describir las propiedades y los objetos geométricos asociados a Π en términos de la forma ρ .

Proposición 3.1.1 *Sea M una m -variedad orientada con una forma de volumen Ω . Dada una $(m-2)$ -forma diferencial ρ , el campo bivectorial Π definido por (3.1) es un tensor de Poisson en M si y sólo si*

$$d\mathbf{i}_{\mathbf{i}_\rho \mathbf{Q}} \rho - 2 \mathbf{i}_{\mathbf{i}_\rho \mathbf{Q}} d\rho = 0, \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{Q} \in \Gamma \wedge^m TM$ está definido en (3.2).

Demostración. Por la definición (1.6) del Corchete de Schouten-Nijenhuis se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{[\Pi, \Pi]} \Omega &= 2 \mathbf{i}_\Pi d\mathbf{i}_\Pi \Omega - d\mathbf{i}_\Pi \mathbf{i}_\Pi \Omega \\ &= 2 \mathbf{i}_\Pi d\rho - d\mathbf{i}_\Pi \rho. \end{aligned}$$

Ahora, por (3.2), notemos que es $\Pi = \mathbf{i}_\rho \mathbf{Q}$. Con esto se concluye que la condición $[\Pi, \Pi] = 0$ es equivalente a la ecuación (3.3). \square

Nota 3.1.2. En el caso 3-dimensional, la forma ρ en (3.1) es una 1-forma diferencial y la ecuación (3.3) es equivalente a la condición de integrabilidad $d\rho \wedge \rho = 0$. Este hecho es bastante conocido en la geometría de Poisson [21]. \triangleleft

A partir de este momento se supondrá que ρ es tal que satisface (3.3) y Π será el tensor de Poisson determinado por esta forma diferencial vía la fórmula (3.1).

El *corchete de Poisson* asociado a Π de dos funciones en M es dado por

$$\{f, g\} = - \frac{df \wedge dg \wedge \rho}{\Omega}, \quad f, g \in C_M^\infty.$$

Aquí, la expresión ζ/Ω denota la única función $a \in C_M^\infty$ que satisface $\zeta = a\Omega$, con ζ una forma diferencial de grado máximo. Esta notación se mantendrá a lo largo de este texto.

La *distribución característica* del tensor de Poisson Π en este caso es dada por

$$\mathcal{C}^\Pi = \{ \mathbf{i}_{df \wedge \rho} \mathbf{Q} \mid f \in C_M^\infty \}.$$

En consecuencia, el *kernel* de Π está determinado por

$$\ker \Pi = \{ \alpha \in \mathbb{T}^*M \mid \alpha \wedge \rho = 0 \}. \quad (3.4)$$

Para cada función $h \in C_M^\infty$, el *campo Hamiltoniano* asociado a h y relativo al tensor de Poisson Π es dado por

$$X_h = \mathbf{i}_{dh \wedge \rho} \mathbf{Q}.$$

En consecuencia, una función $c \in C_M^\infty$ es una *función de Casimir* de Π si y solamente si

$$dc \wedge \rho = 0. \quad (3.5)$$

Por otro lado, la condición $\llbracket W, \Pi \rrbracket = 0$ para que un campo vectorial W en M sea un *campo de Poisson* para Π es equivalente a que

$$\mathcal{L}_W \rho = (\operatorname{div}_\Omega W) \rho,$$

donde $\operatorname{div}_\Omega W \in C_M^\infty$ denota la divergencia del campo W respecto a la forma de volumen Ω , esto es, la única función que satisface $\mathcal{L}_W \Omega = (\operatorname{div}_\Omega W) \Omega$. En particular, un campo W con divergencia cero es un campo de Poisson para Π si y solamente si preserva la forma diferencial ρ , es decir, $\mathcal{L}_W \rho = 0$.

Nota 3.1.3. La condición (3.3) para ρ es equivalente a $\mathcal{L}_{X_f} \rho = (\operatorname{div}_\Omega X_f) \rho$, $\forall f \in C_M^\infty$. Lo que confirma que todo campo Hamiltoniano es un campo de Poisson. \triangleleft

3.2. Estructuras de Poisson con Casimires Predeterminadas

En esta sección se aborda el problema de construir una estructura de Poisson que admita como funciones de Casimir globales un conjunto dado de funciones. Para esto primero se presenta una familia de tensores de Poisson que generaliza a las llamadas estructuras (de Poisson) de Flaschka-Ratiu [16].

Como antes, sea M una m -variedad orientada con una forma de volumen Ω . Primero, por definición, un tensor de Poisson de *Flaschka-Ratiu* Ψ está determinado por un conjunto de $m - 2$ funciones suaves K_i en M mediante la igualdad

$$\mathbf{i}_\Psi \Omega = dK_1 \wedge \cdots \wedge dK_{m-2}. \quad (3.6)$$

Por (3.5), cada una de las funciones K_i resulta una función de Casimir de Ψ , en consecuencia, la foliación simpléctica que induce consiste de hojas con dimensión 0 y 2. En particular, en el abierto de rango máximo, la distribución característica de Ψ coincide con la intersección $\cap \ker dK_i$ de las diferenciales de las funciones K_i .

Nota 3.2.1. Un tensor de Poisson se dice de *tipo Flaschka-Ratiu* si tiene rango igual a 0 y 2. En particular, todo tensor de Poisson en una variedad tres dimensional es de este tipo. \triangleleft

Dada una colección $\alpha^1, \dots, \alpha^{m-2}$ de 1-formas diferenciales en M , debido al isomorfismo (3.1), existe un único campo bivectorial Π determinado por $\mathbf{i}_\Pi \Omega = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^{m-2}$. La distribución característica de este campo bivectorial es

$$\mathcal{C}^\Pi = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \alpha^1, \dots, \alpha^{m-2} \text{ son dependientes,} \\ \cap \ker \alpha^i & \text{si } \alpha^1, \dots, \alpha^{m-2} \text{ son independientes.} \end{cases}$$

El siguiente resultado da condiciones necesarias y suficientes para que esta distribución singular sea integrable. O en otras palabras, para que Π defina una estructura de Poisson en M .

Proposición 3.2.2 *Sea M una m -variedad orientada con una forma de volumen Ω . Dadas $\alpha^1, \dots, \alpha^{m-2} \in \Gamma T^*M$, el campo bivectorial Π definido por*

$$\mathbf{i}_\Pi \Omega = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^{m-2} \quad (3.7)$$

es un tensor de Poisson en M si y sólo si

$$d\alpha^i \wedge \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^{m-2} = 0, \quad (3.8)$$

para cada $i = 1, \dots, m-2$.

Demostración. Sea $\rho = \mathbf{i}_\Pi \Omega$. Notemos que $\alpha_i \wedge \rho = 0$, para cada $i = 1, \dots, m-2$. Luego, por (3.4), es $\alpha_i \in \ker \Pi$. Esto implica que $\mathbf{i}_\Pi \rho = 0$. Así, por (3.3), se tiene que Π es un tensor de Poisson si y solamente si $\mathbf{i}_\Pi d\rho = 0$. Esta ecuación, observando que $d\rho = \sum_{i=1}^{m-2} (-1)^{i+1} d\alpha_i \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha}_i \wedge \dots \wedge \alpha^{m-2}$, es equivalente al sistema (3.8). \square

Este resultado ya es conocido para el caso de estructuras de Poisson regulares. Aquí la diferencia radica en que Π definido por (3.7) es singular, es decir, de rango variable. Lo que ocasiona que la integrabilidad de su distribución característica ya no resulte evidente.

Notemos que si las 1-formas α_i son *cerradas* el campo bivectorial Π en (3.7) define un tensor de Poisson de manera automática. En particular, para 1-formas globalmente *exactas* se recuperan los tensores de Poisson de Flaschka-Ratiu definidos en (3.6). Notemos que en el abierto donde las 1-formas α_i son independientes la condición (3.8) no es más que la condición de integrabilidad de Frobenius aplicado a la distribución de campos vectoriales $\cap \ker \alpha^i$.

Ahora, por construcción y de (3.4), se cumple que

$$\ker \Pi = \text{span} \{ \alpha^1, \dots, \alpha^{m-2} \} \quad \text{en el abierto } \{ \alpha^i \text{ independientes} \}.$$

En consecuencia el rango de Π es

$$\text{rank } \Pi = 0, 2,$$

es decir, Π es un tensor de Poisson de tipo Flaschka-Ratiu.

La foliación simpléctica inducida por Π consiste de puntos y hojas (simplécticas) 2-dimensionales. De esto se sigue que la variedad M admite una descomposición $M = A \cup \partial A \cup (M \setminus A)$ donde $A \subseteq M$ es un abierto foliado por hojas simplécticas de dimensión 2, la frontera de este abierto coincide con el conjunto de puntos singulares de Π y en su exterior $M \setminus A$ es Π trivial (cero).

Una pregunta aún por contestar es el generalizar la Proposición 3.2.2. Esto es, dar condiciones bajo las cuales una forma diferencial $\rho = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s \wedge \beta$ induce un tensor de Poisson, donde las α_i son 1-formas diferenciales y β es una forma tal que $\alpha \wedge \beta \neq 0$ para cada $\alpha \in \Gamma \mathbb{T}^*M$ no nula.

Funciones de Casimir Predeterminadas. A continuación, con base en la Proposición 3.2.2, se presenta un resultado que provee una manera de construir una estructura de Poisson que admita como Casimires globales un conjunto dado de funciones. Para esto, recordemos que una k -forma diferencial β se dice *localmente descomponible* si $\beta = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^k$ alrededor de cada punto en M para algunas 1-formas β^i .

Teorema 3.2.3 *Sea M una m -variedad orientada con una forma de volumen Ω y $K_1, \dots, K_s \in C_M^\infty$, con $s < m - 2$. Si $\beta \in \Gamma \wedge^{m-s-2} \mathbb{T}^*M$ es cerrada y localmente descomponible, entonces el campo bivectorial Π definido por*

$$\mathbf{i}_\Pi \Omega = dK_1 \wedge \cdots \wedge dK_s \wedge \beta \tag{3.9}$$

es un tensor de Poisson en M que tiene a cada K_i como función de Casimir.

Demostración. Por ser β localmente descomponible, en cada carta coordenada de M es $\rho = \mathbf{i}_\Pi \Omega$ de la forma (3.7). Por ser β cerrada las condiciones (3.8) se satisfacen de manera automática. Así, por la Proposición 3.2.2, se concluye que Π es un tensor de Poisson. El que cada K_i sea una función de Casimir para Π se sigue de (3.5). \square

Notemos que el rango del tensor de Poisson Π en (3.9) en general toma valores entre

$$0 \leq \text{rank } \Pi \leq m - s.$$

Sin embargo, la condición para β de ser localmente descomponible en el Teorema 3.2.3 implica que Π tiene rango 0 y 2, es decir, es un tensor de Poisson de tipo Flaschka-Ratiu. Luego, la foliación simpléctica que induce consiste de puntos y hojas 2-dimensionales. Debido a esto, surge la cuestión de dar condiciones para β de manera que Π posea una geometría más rica en el sentido que la foliación simpléctica que induzca no consista solamente de hojas con dimensión a lo más dos.

Otra observación al Teorema 3.2.3 es que el tensor de Poisson Π en (3.9) puede admitir más funciones de Casimir (globales). Por esto, otra cuestión que surge es construir una estructura de Poisson cuyo espacio de funciones de Casimir sea *generado* por un conjunto dado de funciones.

Corolario 3.2.4 (del Teorema 3.2.3) *Si β , además de ser cerrada y localmente descomponible, es tal que $\alpha \wedge \beta \neq 0$ para cada $\alpha \in \Gamma T^*M$ no nula, entonces el espacio de funciones de Casimir globales de Π es generado por las funciones K_1, \dots, K_s .*

Demostración. Si $\alpha \wedge \beta \neq 0$ para cada $\alpha \in \Gamma T^*M$ no nula, entonces no puede ser $\beta = \alpha_0 \wedge \tilde{\beta}$ (globalmente) para alguna 1-forma α_0 en M . En particular, no puede ser $\beta = df \wedge \tilde{\beta}$ (globalmente) para alguna $f \in C_M^\infty$. Por tanto, la forma diferencial en (3.9) ya no admite factorización por 1-formas salvo las diferenciales dK_i . Esto implica, por (3.4) y (3.5), que el espacio de funciones de Casimir globales de Π es generado por K_1, \dots, K_s . \square

Nota 3.2.5. En [16, 29, 25] se encuentran algunos resultados obtenidos para el problema de construcción de estructuras de Poisson con foliaciones características predeterminadas. En [16] se construyen en variedades casi-simplécticas estructuras de Poisson cuyo espacio de Casimires es generado por un conjunto dado de funciones independientes. En [29] se construyen estructuras de Poisson en variedades 4-dimensionales que tienen por foliación característica una fibración de Lefschetz singular y en [25] estructuras de Poisson en variedades 3-dimensionales que tienen por foliación característica una fibración de Bott-Morse. \triangleleft

3.2.1. Caso 3-Dimensional

Como corolario del Teorema 3.2.3 se recobra un resultado conocido en Geometría de Poisson respecto al problema de existencia de Tensores de Poisson con Casimires predeterminados.

Proposición 3.2.6 *En toda variedad orientable 3-dimensional, dada cualquier función escalar (global), existe una estructura de Poisson que tiene como Casimir dicha función.*

En efecto, dada una función K en una variedad 3-dimensional orientada con forma de volumen Ω , el campo bivectorial Π definido por

$$\mathbf{i}_\Pi \Omega = dK \quad (3.10)$$

es un tensor de Poisson que tiene a K como función de Casimir global, esto como consecuencia del Teorema 3.2.3. Notemos que esta construcción, de hecho, es la versión tres dimensional de los tensores de Poisson de Flaschka-Ratiu.

Es claro que Π no es único: para toda función f , el campo bivectorial $f\Pi$ es nuevamente un tensor de Poisson que tiene a K como Casimir. Esto es consecuencia de la *propiedad conforme* para los tensores de Poisson en variedades de dimensión tres.

Ejemplo 3.2.7 Sea $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ con forma de volumen euclídea $\Omega_0 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Entonces, dada $K \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$, el tensor de Poisson

$$\Pi = -\frac{\partial K}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial K}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial K}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2},$$

definido por $\mathbf{i}_\Pi \Omega_0 = dK$, tiene a K como función de Casimir. \triangleleft

3.2.2. Caso 4-Dimensional

Con base en lo visto en esta sección se realiza en este apartado un estudio de las estructuras de Poisson en variedades orientables de dimensión cuatro.

Sea M una variedad 4-dimensional orientada con una forma de volumen Ω . Primero, por (3.1), se tiene una correspondencia uno a uno entre campos bivectoriales y 2-formas diferenciales en M . Así, dada $\rho \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{T}^*M$ existe un único campo bivectorial $\Pi \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{T}M$ determinado por

$$\mathbf{i}_\Pi \Omega = \rho. \quad (3.11)$$

Nota 3.2.8. En una carta coordenada (U, x^1, \dots, x^4) en M la expresión coordenada de Π en (3.11) es

$$\Pi = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (-1)^{i+j} \rho_{ij} \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x^j}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^4},$$

donde $\rho = \frac{1}{2} \rho_{ij} dx^i \wedge dx^j$. El símbolo $\widehat{}$ indica la omisión del término debajo de él. \triangleleft

Proposición 3.2.9 *El campo bivectorial Π definido en (3.11) es un tensor de Poisson en M si y sólo si*

$$d\left(\frac{\rho \wedge \rho}{\Omega}\right) - 2\mathbf{i}_\rho \zeta = 0, \quad (3.12)$$

donde la expresión ζ/Ω denota la única función $a \in C_M^\infty$ que satisface $\zeta = a\Omega$, con ζ una forma diferencial de grado máximo en M .

Demostración. La ecuación (3.12) se sigue de (3.3) observando que en este caso es $\mathbf{i}_\Pi \rho = \mathbf{i}_\rho \Pi = (\rho \wedge \rho)/\Omega$. \square

En general, determinar todas las soluciones de la ecuación (3.12) es una tarea complicada. Por esto, se presentan a continuación soluciones particulares a tal ecuación, de las cuales, algunas permiten construir tensores de Poisson con Casimires predeterminados.

Caso ρ Descomponible. Por la Proposición 3.2.2, dada una 2-forma descomponible en M

$$\rho = \alpha^1 \wedge \alpha^2, \quad \alpha^i \in \Gamma \mathbb{T}^*M,$$

el campo bivectorial Π definido por $\mathbf{i}_\Pi \Omega = \rho$ es un tensor de Poisson en M si y solamente si

$$d\alpha^i \wedge \alpha^1 \wedge \alpha^2 = 0, \quad i = 1, 2.$$

Notemos que estas condiciones se satisfacen de manera automática si cada α^i es una 1-forma cerrada. Si además M es simplemente conexa, en cuyo caso cada α^i es exacta globalmente, Π es un tensor de Poisson de Flaschka-Ratiu, ver (3.6).

Ahora, en relación con el problema de la existencia de tensores de Poisson con *Casimires predeterminados*, a diferencia de lo que sucede en el caso tres dimensional (ver Proposición 3.2.6), en variedades cuatro dimensionales no siempre se asegura la existencia de tales campos bivectoriales. Una manera de construirlos es utilizar formas diferenciales descomponibles.

Primero, por dimensión, un tensor de Poisson en M puede admitir a lo más *dos* funciones de Casimir globales. Para este caso extremo los tensores de Poisson de Flaschka-Ratiu en (3.6) dan respuesta al problema. En efecto, dadas $K_1, K_2 \in C_M^\infty$, el campo bivectorial Π definido por

$$\mathbf{i}_\Pi \Omega = dK_1 \wedge dK_2,$$

es un tensor de Poisson en M que tiene a K_1 y K_2 como funciones de Casimir globales.

Proposición 3.2.10 *Sean M una 4-variedad orientada con forma de volumen Ω y $K \in C_M^\infty$. Si existe $\beta \in \Gamma T^*M$ tal que*

$$dK \wedge d\beta \wedge \beta = 0,$$

entonces el campo bivectorial Π definido por

$$\mathbf{i}_\Pi \Omega = dK \wedge \beta$$

es un tensor de Poisson en M que tiene a K como función de Casimir global.

Esta proposición es consecuencia directa de la Proposición 3.2.2. La condición $dK \wedge d\beta \wedge \beta = 0$ es necesaria y suficiente para que el campo bivectorial Π definido por $\mathbf{i}_\Pi \Omega = dK \wedge \beta$ sea un tensor de Poisson. Claramente ha de ser $dK \wedge \beta \neq 0$ en un abierto no vacío de M para que Π no sea trivial. En cualquier caso, Π resulta un tensor de Poisson de tipo Flaschka-Ratiu, es decir, con rango a lo más 2.

Caso ρ Cerrada. En este apartado se asumirá que M es una variedad *conexa*. Bajo esta hipótesis y de (3.12) se deriva el siguiente criterio.

Proposición 3.2.11 *Sea M una 4-variedad conexa orientada con una forma de volumen Ω . Si ρ una 2-forma diferencial cerrada en M , entonces el campo bivectorial Π definido por (3.11) es un tensor de Poisson si y sólo si*

$$\rho \wedge \rho = c\Omega, \tag{3.13}$$

para alguna constante $c \in \mathbb{R}$ (fija).

Se puede probar que la constante c en (3.13) coincide con el determinante de la matriz (local) asociada a Π . Esto implica que el tensor de Poisson Π es, o bien no degenerado, o bien de tipo Flaschka-Ratiu. Concretamente,

- si $c \neq 0$, entonces Π es un tensor de Poisson no degenerado, es decir, con $\text{rank } \Pi = 4$. En este caso el par (M, ρ) es una variedad simpléctica de dimensión cuatro;

- si $c = 0$, entonces Π es un tensor de Poisson con $\text{rank } \Pi = 0, 2$; es decir, es de tipo Flaschka-Ratiu

Como observación adicional, la condición $\rho \wedge \rho = 0$ implica que la 2-forma ρ es localmente descomponible, es decir, alrededor de cada punto en M es el producto de dos 1-formas.

El caso cuando ρ no es una forma cerrada ni descomponible globalmente queda aún por estudiar. Una opción para construir estructuras de Poisson con este tipo de formas diferenciales es tomar la suma de una 2-forma cerrada y una 2-forma descomponible.

3.3. Operador Divergencia e Identidad de Jacobi

El operador divergencia u operador *traza* en variedades orientables introducido por Koszul en [39] generaliza la noción de divergencia de campos vectoriales al módulo de campos tensoriales contravariantes. Este operador de homología resulta ser un generador del corchete de Schouten-Nijenhuis. Proveyendo así una herramienta alternativa para el estudio de las estructuras de Poisson en variedades orientables. En esta sección se presenten algunas propiedades básicas del operador traza y su relación con los tensores de Poisson. Ver por ejemplo [39, 31, 21].

Como antes, sea M una variedad orientada con una forma de volumen Ω . Se define la *divergencia* de $A \in \Gamma \wedge^a TM$ como el único campo multivectorial $\mathcal{D}(A) \in \Gamma \wedge^{a-1} TM$ que satisface

$$\mathbf{i}_{\mathcal{D}(A)}\Omega = \text{di}_A\Omega. \quad (3.14)$$

Es claro que la divergencia es relativa a una forma de volumen. En este contexto, el *operador divergencia* (traza) es la asignación \mathbb{R} -lineal $\mathcal{D} : A \mapsto \mathcal{D}(A)$, la cual se reitera depende de Ω . Al variar las formas de volumen en M el operador divergencia se modifica por

$$\mathcal{D}_f\Omega = \mathcal{D}\Omega + \mathbf{i}_{d(\ln|f|)}, \quad (3.15)$$

donde $\mathcal{D}\Omega$ es el operador divergencia relativo a la forma de volumen Ω y $f \neq 0$ es una función escalar en M . El nombre de divergencia para este operador se motiva debido a que $\mathcal{D}(X) = \text{div } X$, para todo campo vectorial X en M . Es decir, \mathcal{D} generaliza el operador de divergencia usual para campos vectoriales.

Dos propiedades fundamentales del operador divergencia son, el ser un *operador de homología*,

$$\mathcal{D}^2 = 0,$$

y ser un *generador* del corchete de Schouten-Nijenhuis para campos multivectoriales:

$$\llbracket A, B \rrbracket = A \wedge \mathcal{D}(B) + (-1)^a \mathcal{D}(A) \wedge B + (-1)^{a+1} \mathcal{D}(A \wedge B), \quad (3.16)$$

para cualesquiera $A \in \Gamma \wedge^a TM$ y $B \in \Gamma \wedge TM$. Esto implica, en particular, que el operador divergencia no es una derivación del producto exterior para multivectores pero sí del corchete

de Schouten-Nijenhuis,

$$\mathcal{D}(\llbracket A, B \rrbracket) = \llbracket \mathcal{D}(A), B \rrbracket + (-1)^{a-1} \llbracket A, \mathcal{D}(B) \rrbracket.$$

Identidad de Jacobi. Como consecuencia de (3.16) la identidad de Jacobi en (1.9) para un tensor de Poisson se puede formular en términos del operador divergencia. Concretamente, un campo bivectorial $\Pi \in \Gamma \wedge^2 TM$ es un tensor de Poisson si y solamente si [39, 31]

$$\mathcal{D}(\Pi \wedge \Pi) = 2 \Pi \wedge \mathcal{D}(\Pi).$$

Como es de esperar esta condición no depende del volumen fijado para \mathcal{D} .

Esta versión de la identidad de Jacobi resulta útil para estudiar cierta clase de tensores de Poisson, por ejemplo, los homogéneos en espacios vectoriales. Cabe mencionar que el operador divergencia es una herramienta importante en la geometría de Poisson. Se ha empleado, por ejemplo, para clasificar las estructuras de Poisson cuadráticas en espacios vectoriales 3-dimensionales, para derivar criterios de unimodularidad o para facilitar la construcción de estructuras de Poisson en variedades de baja dimensión. Algunas aplicaciones análogas se presentan en secciones posteriores.

3.4. Variedades de Poisson Unimodulares

En el caso orientable, la propiedad de unimodularidad de una variedad de Poisson se refiere a la existencia de una forma de volumen que sea preservada por el flujo de todo campo Hamiltoniano. Por su interés físico, el problema de determinar la existencia de tal forma de volumen ha sido ampliamente estudiado obteniendo resultados en términos geométricos y cohomológicos [39, 31, 76, 32, 16, 53]. En esta sección se presentan algunas nociones básicas en torno a las variedades de Poisson unimodulares.

Una variedad de Poisson orientable (M, Π) se llama *unimodular* [76] si admite una forma de volumen Ω invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano relativo a Π . Esto es, tal que

$$\mathcal{L}_{\Pi^\sharp(df)}\Omega = 0, \quad \forall f \in C_M^\infty, \quad (3.17)$$

Notemos que, por definición, una variedad de Poisson es unimodular si existe una forma de volumen respecto a la cual la divergencia de todo campo Hamiltoniano es cero [21],

$$(3.17) \iff \operatorname{div}_\Omega X_f = 0, \quad \forall f \in C_M^\infty.$$

Recordemos que la divergencia de un campo vectorial X , respecto a una forma de volumen Ω , se define como la única función (suave) $\operatorname{div}_\Omega X$ que satisface $\mathcal{L}_X \Omega = (\operatorname{div}_\Omega X) \Omega$.

3.4.1. Criterios de Unimodularidad

A continuación se definen un objeto geométrico y uno cohomológico que controlan la propiedad de unimodularidad de una variedad de Poisson.

Campo Modular. Fijada una forma de volumen Ω en M , la asignación

$$Z : f \longmapsto \operatorname{div}_\Omega X_f$$

es una derivación de C_M^∞ , por tanto, un campo vectorial en M . Este campo vectorial recibe el nombre de *campo modular* de la estructura de Poisson Π relativo a la forma de volumen Ω [20].

Dos de las propiedades principales del campo modular son: el ser un *campo de Poisson* para Π y *preservar* el volumen Ω , esto es,

$$[[Z, \Pi]] = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_Z \Omega = 0.$$

Además, si Π es un tensor de Poisson *regular*, entonces el campo modular es *tangente* a la foliación simpléctica inducida por Π . En particular, el campo modular es tangente a la foliación simpléctica en el dominio regular de Π .

Clase Modular. La *clase modular* [76] de una variedad de Poisson (M, Π) es la clase que el campo modular define en la primera cohomología del complejo de Lichnerowicz-Poisson definida por (1.12) y (1.13). Esta clase está bien definida porque al variar sobre las formas de volumen en M el campo modular se modifica por campos Hamiltonianos:

$$Z^{f\Omega} = Z^\Omega - \frac{1}{f} X_f,$$

donde Z^Ω es el campo modular de Π respecto a la forma de volumen Ω y $f \neq 0$ es una función suave en M .

Criterios de Unimodularidad. En una variedad de Poisson orientable M las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. M es unimodular.
2. La clase modular es trivial.
3. El campo modular es Hamiltoniano.
4. El campo modular es nulo respecto a una forma de volumen en M .

Por esto, la clase modular de una variedad de Poisson resulta un invariante natural que mide la obstrucción a la unimodularidad de la variedad.

Operador Divergencia como Herramienta. En términos del operador divergencia (3.14), el campo modular de un tensor de Poisson Π coincide con (menos) la divergencia de éste,

$$Z = -\mathcal{D}(\Pi).$$

Esta caracterización del campo modular resulta de gran utilidad pues permite derivar de manera más sencilla algunas de sus propiedades. Por ejemplo, una variedad de Poisson orientable (M, Π) es *unimodular* si y solamente si existe una forma de volumen Ω en M tal que [21]

$$\mathcal{D}_\Omega(\Pi) = 0. \quad (3.18)$$

Otras propiedades que se deducen de manera inmediata son:

(a) si la suma de dos tensores de Poisson es nuevamente un tensor de Poisson, entonces el campo modular de éste es la suma de los respectivos campos modulares.

(b) si A es un cociclo del complejo de Lichnerowicz-Poisson en (1.12), entonces el corchete $[[Z, A]]$ es una cofrontera. En particular, el corchete del campo modular con cualquier campo de Poisson es un campo Hamiltoniano.

3.4.2. Unimodularidad de Tensores de Poisson Homogéneos

En esta sección se estudia el problema de unimodularidad para estructuras de Poisson homogéneas en \mathbb{R}^n . Se presenta un criterio con condiciones necesarias y suficientes para la unimodularidad de esta clase de tensores de Poisson. Con base en este resultado se realiza una clasificación de las estructuras unimodulares lineales y cuadráticas en \mathbb{R}^3 .

Sea $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$. Un tensor de Poisson en este espacio vectorial

$$\Pi = \frac{1}{2} \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (3.19)$$

se dice *homogéneo de grado r* si cada función Π^{ij} es un polinomio r -homogéneo. Recordemos que un polinomio $P = P(x)$ es r -homogéneo si $P(tx) = t^r P(x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

A continuación se muestra que la unimodularidad de las estructuras de Poisson homogéneas está controlada por la forma de volumen estándar en \mathbb{R}^n [40].

Lema 3.4.1 *Un tensor de Poisson homogéneo es unimodular en \mathbb{R}^n si y sólo si tiene divergencia cero con respecto a la forma de volumen euclídea en \mathbb{R}^n .*

Demostración. Sea $\Omega_0 = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ la forma de volumen euclídea en $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ y Π un tensor de Poisson r -homogéneo en este espacio.

Necesidad. Supongamos que Π es unimodular en \mathbb{R}^n . Luego, por (3.18), existe una forma de volumen Ω tal que $\mathcal{D}_\Omega(\Pi) = 0$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer $\Omega = e^{-g} \Omega_0$, para alguna $g \in C_{\mathbb{R}^n}^\infty$. Así, por (3.15), se tiene que $\mathcal{D}_{\Omega_0}(\Pi) = X_g$. En coordenadas, esta igualdad se traduce en la ecuación

$$\partial_i \Pi^{ij} = \Pi^{ij} \partial_i g, \quad j = 1, \dots, n; \quad (3.20)$$

donde $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$, para cada $i = 1, \dots, n$. Ahora, ya que por hipótesis cada Π^{ij} en (3.19) es un polinomio r -homogéneo se tiene que $\Pi^{ij} = \mathcal{O}(|x|^r)$ en \mathbb{R}^n , es decir, existen $\xi_{ij} > 0$ tales que $|\Pi^{ij}(x)| \leq \xi_{ij} \|x\|^r$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Luego, definiendo $\xi := \max\{\xi_{ij}\}$ se tiene que $|\Pi^{ij}(x)| \leq \xi \|x\|^r$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por otro lado, dado que la bola cerrada unitaria es un conjunto compacto en \mathbb{R}^n , sea

$$\alpha := \sup_{\|x\| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \partial_i g(x) \right| < \infty.$$

Ahora, sea ε tal que $0 < \varepsilon \leq 1$. De la igualdad (3.20) se sigue que $|\partial_i \Pi^{ij}(\varepsilon x)| = |\Pi^{ij}(\varepsilon x) \partial_i g(\varepsilon x)|$. Notemos que cada $\partial_i \Pi^{ij}$ es un polinomio $(r-1)$ -homogéneo en \mathbb{R}^n . Luego, para x tq. $\|x\| \leq 1$, por homogeneidad y desigualdades anteriores, se sigue que $\varepsilon^{r-1} |\partial_i \Pi^{ij}(x)| \leq \varepsilon^r \xi \alpha$. O equivalentemente, $0 \leq |\partial_i \Pi^{ij}(x)| \leq \varepsilon \xi \alpha$. Por tanto, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene que $\partial_i \Pi^{ij}(x) = 0$ para $\|x\| \leq 1$. En palabras, la restricción de cada $\partial_i \Pi^{ij}$ a la bola cerrada unitaria es cero. Esto implica, por homogeneidad, que $\partial_i \Pi^{ij} \equiv 0$ y por lo tanto es $\mathcal{D}_{\Omega_0}(\Pi) = 0$, ya que $\mathcal{D}_{\Omega_0}(\Pi) = \partial_i \Pi^{ij} \partial_j$.

Suficiencia. Por (3.18), es inmediato que Π es un tensor de Poisson unimodular en \mathbb{R}^n si $\mathcal{D}_{\Omega_0}(\Pi) \equiv 0$. \square

Para el caso lineal, el Lema 3.4.1 coincide con un resultado ya conocido: una estructura de Poisson lineal es unimodular si y solamente si el álgebra de Lie asociada es unimodular. Recordemos que un álgebra de Lie (finito dimensional) se dice unimodular si el operador adjunto es de traza cero para cada elemento del álgebra [21].

Nota 3.4.2. El Lema 3.4.1 es un criterio *global* en el sentido que la unimodularidad se asegura en todo el espacio \mathbb{R}^n . Ya que por ejemplo, $\Pi = (x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) \wedge \frac{\partial}{\partial x_3}$ es un tensor de Poisson lineal en \mathbb{R}^3 con $\mathcal{D}_{\Omega_0}(\Pi) \neq 0$, pero que es unimodular en el abierto $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_1 = 0\}$. \triangleleft

Para el siguiente corolario recordemos que una forma diferencial en \mathbb{R}^n se dice s -homogénea si sus funciones componentes son polinomios s -homogéneos.

Corolario 3.4.3 *Un tensor de Poisson r -homogéneo Π es unimodular en \mathbb{R}^n si y sólo si existe una $(n-3)$ -forma diferencial $(r+1)$ -homogénea ζ tal que*

$$\mathbf{i}_{\Pi} \Omega_0 = d\zeta. \tag{3.21}$$

En particular, cada tensor de Poisson homogéneo unimodular en \mathbb{R}^3 admite una función de Casimir global.

Demostración. Por la definición (3.14) de operador divergencia y el Lema 3.4.1, se sigue que Π un tensor de Poisson en \mathbb{R}^n si y solamente si $d\mathbf{i}_{\Pi} \Omega_0 = 0$. Lo que equivale, por ser \mathbb{R}^n simplemente conexo, a que $\mathbf{i}_{\Pi} \Omega_0$ se una forma diferencial exacta. Es decir, que se cumpla (3.21). Para el caso $n = 3$, se tiene que ζ es una función que por (3.10) resulta una función de Casimir para Π . \square

Notemos que la función de Casimir que afirma este corolario es un polinomio homogéneo de grado uno mayor al grado de Π .

A continuación se presenta una clasificación de las estructuras unimodulares lineales y cuadráticas en el espacio euclídeo 3-dimensional. Esta clasificación se realiza por medio de isomorfismos de Poisson lineales. Para esto recordemos que dos tensores de Poisson homogéneos Π y $\tilde{\Pi}$ en \mathbb{R}^n son equivalentes si (y solo si) existe un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\tilde{\Pi} = T^*\Pi. \quad (3.22)$$

Notemos que necesariamente estos tensores deben tener el mismo grado de homogeneidad.

Esquema de la Clasificación. A continuación se presenta un esquema de la manera en cómo se obtienen las clasificaciones en [Table 3.4.2](#) y [Table 3.4.2](#).

Sea Π un tensor de Poisson r -homogéneo y *unimodular* en \mathbb{R}^n , con $r \geq 0$. Por el Corolario [3.4.3](#), se sigue que existe un polinomio $(r+1)$ -homogéneo $f \in C_{\mathbb{R}^n}^\infty$ tal que

$$\mathbf{i}_\Pi \Omega_0 = df. \quad (3.23)$$

Si denotamos al campo bivectorial en [\(3.23\)](#) por Π_f , se sigue de [\(3.1\)](#) que la función $f \mapsto \Pi_f$ es un isomorfismo lineal. En particular, si $\Pi_f = 0$, entonces $f = 0$ por ser \mathbb{R}^n conexo y f un polinomio homogéneo no constante. En consecuencia, $\Pi_{f_1} = \Pi_{f_2}$ implica que $f_1 = f_2$. Por tanto, se tiene que la equivalencia (lineal) definida en [\(3.22\)](#) es dada por

$$\Pi_{f_1} \sim \Pi_{f_2} \quad \text{si y sólo si} \quad f_2 = \frac{1}{\det T} \cdot T^* f_1, \quad (3.24)$$

para alguna transformación lineal e invertible $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Gracias a esto, la clasificación de tensores de Poisson homogéneos en \mathbb{R}^n se reduce a calcular los representantes “más sencillos” de las clases de equivalencia de polinomios homogéneos en \mathbb{R}^n bajo la relación binaria de equivalencia [\(3.24\)](#).

Para el caso de las estructuras de Poisson lineales en \mathbb{R}^3 todo se reduce a clasificar bajo la relación de equivalencia [\(3.24\)](#) los polinomios cuadráticos en 3-variables. Para esto utilizamos una clasificación de las matrices simétricas reales de orden 3×3 por medio de índices de inercia.

Para el caso de las estructuras de Poisson cuadráticas en \mathbb{R}^3 todo se reduce a clasificar bajo la relación de equivalencia [\(3.24\)](#) los polinomios cúbicos en 3-variables. Para esto, utilizamos una clasificación de formas ternarias reales en [\[5, 12\]](#) que resumimos en la siguiente tabla.

Tipo	Polinomio Cúbico	Tipo	Polinomio Cúbico
I.I	$f \equiv 0$	I.VIII	$f = x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$
I.II	$f = x_1^3$	I.IX	$f = x_1(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$
I.III	$f = x_1^2 x_2$	I.X	$f = x_1^3 + x_2^3 + 6x_1 x_2 x_3$
I.IV	$f = x_1(x_1^2 + x_2^2)$	I.XI	$f = x_1^3 + x_3(x_1^2 + x_2^2)$
I.V	$f = x_1(x_1^2 - x_2^2)$	I.XII	$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + a x_1 x_2 x_3$
I.VI	$f = x_1^3 - x_2^2 x_3$	I.XIII	$f = x_3(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$
I.VII	$f = x_1 x_2 x_3$	I.XIV	$f = (x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$

Tabla 3.4.1: Formas normales de polinomios cúbicos en \mathbb{R}^3 , con $a \in \mathbb{R}$.

Clasificación de Estructuras Unimodulares Lineales en \mathbb{R}^3 . Toda estructura de Poisson lineal *unimodular* en \mathbb{R}^3 (no trivial) es linealmente isomorfa a alguna de las siguientes estructuras

Tipo	Corchetes de Poisson Lineales		
	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_3, x_1\}$
I	x_3	x_1	x_2
II	$-x_3$	x_1	x_2
III	0	x_1	x_2
IV	0	x_1	$-x_2$
V	0	x_1	0

Tabla 3.4.2: Formas normales de los corchetes de Poisson lineales unimodulares en \mathbb{R}^3 .

Naturalmente esta clasificación se corresponde salvo isomorfismos con los casos unimodulares de la clasificación de Bianchi de álgebras de Lie reales 3-dimensionales:

- el tipo I está asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$,
- el tipo II está asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$,
- el tipo III está asociado al álgebra de Lie del grupo de isometrías del plano,
- el tipo IV está asociado al álgebra de Lie del grupo the Poincaré 2-dimensional, esto es, el grupo de isometrías del espacio de Minkowski 2-dimensional,
- el tipo V está asociado al álgebra de Lie del grupo Heisenberg.

Clasificación de Estructuras Unimodulares Cuadráticas en \mathbb{R}^3 . Toda estructura de Poisson cuadrática *unimodular* en \mathbb{R}^3 (no trivial) es linealmente isomorfa a alguna de las siguientes estructuras

Tipo	Corchetes de Poisson Cuadráticos		
	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_3, x_1\}$
I	0	x_1^2	0
II	0	$2x_1x_2$	x_1^2
III	0	$x_1^2 + x_2^2$	$2x_1x_2$
IV	0	$x_1^2 - x_2^2$	$-2x_1x_2$
V	x_2^2	x_1^2	$2x_2x_3$
VI	x_1x_2	x_2x_3	x_1x_3
VII	$2x_1x_3$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$2x_1x_2$
VIII	$-2x_1x_3$	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$2x_1x_2$
IX	$-6x_1x_2$	$x_1^2 - 6x_2x_3$	$x_2^2 - 6x_1x_3$
X	$x_1^2 + x_2^2$	$x_1^2 + 2x_1x_3$	$2x_2x_3$
XI	$x_3^2 - ax_1x_2$	$x_1^2 - ax_2x_3$	$-27x_2^2 - ax_1x_3$
XII	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$2x_1x_3$	$2x_2x_3$
XIII	$x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 - 3x_3^2$	$2x_1(x_2 + x_3)$	$x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$

Tabla 3.4.3: *Formas normales de los corchetes de Poisson cuadráticos unimodulares en \mathbb{R}^3 , con $a \in \mathbb{R}$.*

La clasificación que en esta tabla se presenta, que se desprende básicamente de la clasificación de polinomios reales homogéneos de grado tres, es una clasificación más explícita que clasificaciones presentadas en otros trabajos, ver por ejemplo [43].

Capítulo 4

Tensores de Poisson en Variedades Fibradas

En este capítulo se presenta un estudio de una clase de tensores de Poisson en variedades fibradas que se llaman de *casi acoplamiento*. Esta familia de tensores de Poisson, que se caracterizan por una condición de compatibilidad con la estructura fibrada de estas variedades, generalizan a la clase de tensores de Poisson de *acoplamiento* los cuales surgen de manera natural como modelos (semilocales) alrededor de hojas simplécticas encajadas. A su vez, los tensores de Poisson de casi acoplamiento se presentan como casos particulares de tensores de Poisson *parcialmente acoplados* cuyo análisis se aborda desde la perspectiva de conexiones parciales (generalizadas).

4.1. Campos Bivectoriales Compatibles y Dominio de Acoplamiento

A lo largo de este capítulo

$$\pi : M \longrightarrow B$$

será una variedad fibrada. Recordemos que $\mathbb{V} = \ker d\pi$ es la distribución vertical de π y que dada una conexión de Ehresmann $\gamma \in \Omega^1(M; \mathbb{V})$ la distribución horizontal asociada a esta conexión se denotará por $\mathbb{H} \equiv \mathbb{H}^\gamma = \ker \gamma$.

En esta sección se presenta un estudio de campos bivectoriales, no necesariamente de Poisson, compatibles con estructuras fibradas. Concretamente, dado un campo bivectorial $\Pi \in \Gamma \wedge^2 TM$ se pueden definir al menos tres tipos de compatibilidad entre éste y la estructura fibrada π en M . La primera de ellas se formula en términos del concepto de conexión parcial:

- Π se dice *parcialmente acoplado*, a la distribución vertical \mathbb{V} , si

$$\Pi^\sharp(\mathbb{V}^\circ) \cap \mathbb{V} = \{0\}. \quad (4.1)$$

La terminología utilizada se motiva por el hecho que la condición (4.1) equivale a decir que la distribución singular $\Pi^{\natural}(\mathbb{V}^{\circ}) \subset \mathbb{T}M$ define una conexión parcial (generalizada) en M .

El segundo tipo de compatibilidad se define a continuación.

Definición 4.1.1 *Un campo bivectorial Π se dice de casi acoplamiento si existe una conexión de Ehresmann γ en M tal que*

$$\Pi^{\natural}(\mathbb{V}^{\circ}) \subseteq \mathbb{H}. \quad (4.2)$$

Nota 4.1.2. Las definiciones de campo bivectorial parcialmente acoplado y de casi de acoplamiento son *puntuales*. En consecuencia, se puede hablar de estas propiedades de compatibilidad en subconjuntos arbitrarios de la variedad M , no necesariamente abiertos. \triangleleft

Notemos que, por la definición de distribución horizontal en (2.1), la condición (4.2) implica (4.1). Por tanto, un campo bivectorial de casi acoplamiento es un campo bivectorial parcialmente acoplado que admite una conexión de Ehresmann *adaptada* a la conexión parcial $\Pi^{\natural}(\mathbb{V}^{\circ})$ en el sentido (4.2). Esquemáticamente,

$$(\text{Casi acoplamiento}) = (\text{Parcialmente acoplado}) + (\text{Conexión de Ehresmann adaptada})$$

En general, la conexión adaptada a Π *no es única*. Debido a esto, si es necesario especificarla, se dirá que Π es de casi acoplamiento vía γ , por ejemplo.

Ejemplo 4.1.3 Cada campo bivectorial vertical $P \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}$ en una variedad fibrada es de casi acoplamiento con respecto a cualquier conexión de Ehresmann por ser $P^{\natural}(\mathbb{V}^{\circ}) = \{0\}$. \triangleleft

Recordemos que dada una conexión de Ehresmann γ en M cada campo bivectorial Π admite una descomposición bigraduada

$$\Pi = \Pi_{2,0} + \Pi_{1,1} + \Pi_{0,2}, \quad (4.3)$$

donde a $\Pi_{2,0} \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{H}$ y $\Pi_{0,2} \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}$ se les llama las componentes horizontal y vertical (relativas a γ) del campo bivectorial Π , respectivamente, y a $\Pi_{1,1} \in \Gamma(\mathbb{H} \otimes \mathbb{V})$ se le denominará componente mixta. En términos de la descomposición (4.3) la condición para que Π sea de casi acoplamiento, con conexión adaptada γ , es equivalente a la trivialidad de su componente mixta. Es decir,

$$\Pi^{\natural}(\mathbb{V}^{\circ}) \subseteq \mathbb{H} \iff \Pi_{1,1} = 0 \iff \Pi = \Pi_{2,0} + \Pi_{0,2}, \quad (4.4)$$

lo cual significa que $\Pi(\xi, \mu) = 0$ para cualesquier formas $\xi \in \mathbb{V}^{\circ}$ y $\mu \in \mathbb{H}^{\circ}$. En efecto, si γ es tal que $\Pi_{1,1} = 0$ en la descomposición (4.3), entonces $\Pi^{\natural}(\mathbb{V}^{\circ}) = \Pi_{2,0}(\mathbb{V}^{\circ}) \subseteq \mathbb{H}$. Recíprocamente, si existe una distribución horizontal \mathbb{H} en M que satisface (4.2) se sigue que $\Pi(\xi, \mu) = \langle \mu, \Pi^{\natural}(\xi) \rangle = 0$, para cualesquiera $\xi \in \mathbb{V}^{\circ}$ y $\mu \in \mathbb{H}^{\circ}$.

Otro tipo de compatibilidad se presenta con la propiedad de acoplamiento como caso particular de (4.2):

- Π se dice de *acoplamiento* si el subhaz vectorial

$$\mathbb{H} = \Pi^{\natural}(\mathbb{V}^{\circ}) \quad (4.5)$$

define una distribución horizontal en M . Por definición, en este caso existe una *única* conexión de Ehresmann que satisface la condición (4.2).

Notemos que las compatibilidades definidas anteriormente se relacionan entre ellas como casos particulares una de otra:

$$\{\text{Acoplamiento}\} \subset \{\text{Casi Acoplamiento}\} \subset \{\text{Acoplamiento Parcial}\}.$$

Acoplamiento Parcial. Lo primero a mostrar en este apartado es que la condición de acoplamiento parcial (4.1) induce en cada punto de M una descomposición de Π como en (4.4).

Teorema 4.1.4 *Las propiedades de acoplamiento parcial y casi acoplamiento son puntualmente equivalentes.*

Para la demostración de este teorema primero se presenta el siguiente lema.

Lema 4.1.5 *Sea Π un campo bivectorial con descomposición bigraduada (4.3) respecto a una conexión de Ehresmann γ en M . Entonces, Π es parcialmente acoplado si y sólo si*

$$\ker \Pi_{2,0}^{\natural}|_{\mathbb{V}^{\circ}} \subseteq \ker \Pi_{1,1}^{\natural}|_{\mathbb{V}^{\circ}} \quad (4.6)$$

Demostración. Sea (4.3) la descomposición bigraduada de Π con respecto a γ y \mathbb{H} la distribución horizontal asociada a esta conexión. Para probar la *necesidad* supongamos que Π satisface la condición (4.1). Si $\eta \in \mathbb{V}^{\circ}$ es tal que $\Pi_{2,0}^{\natural}(\eta) = 0$, entonces $\Pi_{1,1}^{\natural}(\eta) = 0$ por ser $\Pi^{\natural}(\eta) = \Pi_{1,1}^{\natural}(\eta) \in \mathbb{V}$. Lo que prueba (4.6). Para probar la *suficiencia* supongamos que se cumple (4.6). Sea $X \in \Pi^{\natural}(\mathbb{V}^{\circ}) \cap \mathbb{V}$, esto es, $X \in \mathbb{V}$ y $X = \Pi_{2,0}^{\natural}(\eta) + \Pi_{1,1}^{\natural}(\eta)$, para alguna $\eta \in \mathbb{V}^{\circ}$. Luego, $\Pi_{2,0}^{\natural}(\eta) = 0$ por ser $\Pi_{2,0}^{\natural}(\eta) \in \mathbb{H}$ y $\Pi_{1,1}^{\natural}(\eta) \in \mathbb{V}$. Esto implica, por la hipótesis (4.6), que $\Pi_{1,1}^{\natural}(\eta) = 0$. Por tanto, es $X = 0$. Lo que prueba (4.1). \square

Notemos que la condición (4.6), al igual que (4.1), es una condición puntual e independiente de la conexión de Ehresmann γ . Aún más, se puede verificar que (4.6) es equivalente a que $\mathcal{C}^{\Pi} \subseteq \Pi^{\natural}(\mathbb{V}^{\circ}) + \mathbb{V}$.

Demostración (del Teorema 4.1.4). Sean Π un campo bivectorial en M con descomposición bigraduada (4.3) con respecto a una conexión de Ehresmann γ y \mathbb{H} la distribución horizontal

asociada a esta conexión. Fijemos un punto $p \in M$. Supongamos que Π es parcialmente acoplado, es decir, que satisface la condición (4.1). Lo que se probará es que existe una solución $\Xi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{V}_p$ de la ecuación (2.31). Para esto, primero notemos que se puede tomar una descomposición $\mathbb{H}_p = \Pi_{2,0}^{\natural}(\mathbb{V}_p^{\circ}) \oplus H_p$ de la distribución horizontal en p , para algún subespacio $H_p \subset T_p M$. Así, haciendo uso de la descomposición (2.1), definamos

$$\Xi_p(X) = \begin{cases} \Pi_{1,1}^{\natural}(\eta) & \text{si } X = \Pi_{2,0}^{\natural}(\eta), \quad \eta \in \mathbb{V}_p^{\circ}, \\ 0 & \text{si } X \in H_p, \\ 0 & \text{si } X \in \mathbb{V}_p. \end{cases} \quad (4.7)$$

Notemos que este morfismo está bien definido debido a la condición (4.6) del Lema 4.1.5, tiene la propiedad (2.8) y por construcción Ξ_p satisface (4.1). Por tanto, por el Corolario 2.2.2, se tiene que $\Pi_p = \tilde{\Pi}_{2,0} + \tilde{\Pi}_{0,2}$ respecto a la descomposición $T_p M = (\text{id}_{T_p M} + \Xi_p)(\mathbb{H}_p) \oplus \mathbb{V}_p$ del espacio tangente al punto p . Es decir, Π es de casi acoplamiento en p . El recíproco es claro ya que la propiedad de acoplamiento parcial es necesaria para que Π sea de casi acoplamiento. \square

El problema ahora se traduce en extender la equivalencia puntual que enuncia el Teorema 4.1.4 a una equivalencia local. El siguiente resultado, uno de los principales de esta sección, afirma que tal extensión se puede realizar a “casi” toda la variedad M .

Teorema 4.1.6 *Todo campo bivectorial parcialmente acoplado en una variedad fibrada es de casi acoplamiento en un abierto denso de la variedad.*

En otras palabras, si Π tiene la propiedad $\Pi^{\natural}(\mathbb{V}^{\circ}) \cap \mathbb{V} = \{0\}$, entonces existe un abierto denso $N^{\Pi} \subset M$ y una conexión de Ehresmann $\gamma \in \Omega^1(N^{\Pi}; \mathbb{V})$ tales que $\Pi|_{N^{\Pi}}^{\natural}(\mathbb{V}^{\circ}) \subseteq \mathbb{H}^{\gamma}$.

Para la demostración de este teorema primero se presenta un lema auxiliar.

Lema 4.1.7 *Sea Π un campo bivectorial con descomposición bigraduada (4.3) respecto a una conexión de Ehresmann γ en M . Entonces, Π es de casi acoplamiento si y sólo si existe una conexión de Ehresmann $\tilde{\gamma} = \gamma - \Xi$ tal que*

$$\Pi_{1,1}^{\natural}|_{\mathbb{V}^{\circ}} = \Xi \circ \Pi_{2,0}^{\natural}|_{\mathbb{V}^{\circ}}, \quad (4.8)$$

donde Ξ está determinado por (2.8). En este caso, $\tilde{\gamma}$ resulta una conexión adaptada a Π en el sentido (4.2).

Demostración. Es consecuencia directa de (4.4) y del Corolario 2.2.2. \square

Las componentes de la descomposición bigraduada $\Pi = \tilde{\Pi}_{2,0} + \tilde{\Pi}_{0,2}$ con respecto a la conexión $\tilde{\gamma}$ están determinadas por

$$\tilde{\Pi}_{2,0}^{\natural} = (\text{id}_{T M} + \Xi) \circ \Pi_{2,0}^{\natural} \circ (\text{id}_{T^* M} + \Xi^*), \quad (4.9)$$

$$\tilde{\Pi}_{0,2}^{\natural} = \Pi_{0,2}^{\natural} - \Xi \circ \Pi_{2,0}^{\natural} \circ \Xi^*. \quad (4.10)$$

Ahora, recordemos que para un campo bivectorial Π arbitrario, con descomposición bigraduada (4.3) con respecto a una conexión de Ehresmann γ , el rango de la componente horizontal $\Pi_{2,0}$ es independiente de la conexión γ (ver el Corolario 2.2.3). Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.1.8 *El rango horizontal de un campo bivectorial Π es el rango de la componente horizontal $\Pi_{2,0}$ en su descomposición bigraduada (4.3) respecto a alguna conexión de Ehresmann en M .*

Se dirá que Π es *horizontalmente constante* si su rango horizontal es constante. Es claro que la componente horizontal de Π es cero, respecto a cualquier conexión de Ehresmann, si y solamente si su rango horizontal es cero.

A continuación la demostración del Teorema 4.1.6.

Demostración (del Teorema 4.1.6). Sea Π un campo bivectorial parcialmente acoplado con descomposición bigraduada (4.3) respecto a una conexión de Ehresmann γ en M . Primero, definamos

$$M_k := \{p \in M \mid \text{rank}_p \Pi_{2,0} = k\} \subseteq M, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (4.11)$$

esto es, los conjuntos en los que el rango horizontal de Π es constante. Es claro que estos conjuntos son mutuamente *ajenos* y que $M = \cup_{k \in \mathbb{Z}} M_k$. Lo que se demostrará es que

$$N^\Pi := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \text{Int}(M_k) \quad (4.12)$$

es el abierto en el cual Π es de casi acoplamiento. Primero, N^Π es un abierto denso por ser el dominio regular del campo bivectorial $\Pi_{2,0}$. Ahora, se probará que en el interior de cada $M_k \neq \emptyset$ existe una 1-forma valuada vectorial Ξ_k que es solución (suave) de la ecuación (4.8): en cada punto del abierto $\text{Int}(M_k)$ consideremos un morfismo Ξ_k construido de manera análoga a (4.7). Ahora, dado que $\Pi_{2,0}^\natural(\mathbb{V}^\circ)$ es una distribución *suave* en M y ya que por construcción el rango de $\Pi_{2,0}$ es constante en $\text{Int}(M_k)$, se sigue que $\Xi_k : \mathbb{T}(\text{Int}(M_k)) \rightarrow \mathbb{V}|_{\text{Int}(M_k)}$ es un morfismo de haces vectoriales bien definido y por tanto induce una 1-forma valuada vectorial

$$\Xi_k \in \Omega^1(\text{Int}(M_k); \mathbb{V}).$$

De esta manera Ξ_k es una solución (suave) de la ecuación (4.8) que, por el Lema 4.1.7, induce una conexión de Ehresmann

$$\gamma_k := \gamma|_{\text{Int}(M_k)} - \Xi_k$$

respecto a la cual $\Pi|_{\text{Int}(M_k)}$ es de casi acoplamiento. Finalmente, realizando la construcción anterior en cada conjunto de nivel $M_k \neq \emptyset$, se obtiene una familia de conexiones de Ehresmann $\{\gamma_k\}$ que inducen una conexión de Ehresmann bien definida en N^Π por

$$\gamma' \in \Omega^1(N^\Pi; \mathbb{V}) \quad \text{tal que} \quad \gamma'|_{\text{Int}(M_k)} = \gamma_k,$$

respecto a la cual $\Pi|_{N^\Pi}$ es de casi acoplamiento. □

Corolario 4.1.9 *Si Π es un campo bivectorial parcialmente acoplado horizontalmente constante, entonces Π es de casi acoplamiento.*

Este corolario es consecuencia de que si $\text{rank } \Pi_{2,0} \equiv \text{const}$ en M , entonces M_k en (4.11) es único e igual a M para algún $k \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, existe una conexión de Ehresmann $\gamma \equiv \gamma_k$ adaptada a Π en el sentido (4.2) definida en toda la variedad M .

Corolario 4.1.10 *Un campo bivectorial Π parcialmente acoplado es vertical si y sólo si su rango horizontal es cero.*

Demostración. Si Π es un campo bivectorial vertical es claro que su rango horizontal es cero por no tener componente horizontal respecto a cualquier conexión de Ehresmann. Recíprocamente, si el rango horizontal de Π es cero en particular es constante. Luego, por el Corolario 4.1.9, se sigue que Π es de casi acoplamiento. Es vertical por tener rango horizontal nulo. \square

En general, el problema de dar condiciones bajo las cuales un campo bivectorial parcialmente acoplado es de casi acoplamiento (globalmente) no es trivial y conduce de manera natural al problema de dar criterios bajo los cuales una distribución singular (suave) en una variedad admite una distribución complementaria suave [79, 78].

Distribución Característica de Bivectores Compatibles. A continuación se presenta una manera de caracterizar a los bivectores compatibles en M en términos de la distribución característica de éstos. Para esto, se definen

$$\mathcal{C}_H^\Pi := \Pi^\natural(\mathbb{V}^\circ) \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_V^\Pi := D \cap \mathbb{V}. \quad (4.13)$$

Lema 4.1.11 *Sea Π un campo bivectorial en M . Entonces,*

(a) *Π es parcialmente acoplado si y sólo si*

$$\mathcal{C}^\Pi = \mathcal{C}_H^\Pi \oplus \mathcal{C}_V^\Pi, \quad (4.14)$$

(b) *Π es de casi acoplamiento si y sólo si existe una conexión de Ehresmann γ en M tal que*

$$\mathcal{C}_H^\Pi \subseteq \mathbb{H}^\gamma,$$

(c) *Π es de acoplamiento si y sólo si \mathcal{C}_H^Π define una distribución horizontal en M .*

Demostración. (a) Por el Teorema 4.1.4, si Π es parcialmente acoplado, entonces puntualmente $\Pi = \Pi_{2,0} + \Pi_{0,2}$. Esto implica que (4.14) se cumple siendo en este caso $\mathcal{C}_H^\Pi = \Pi_{2,0}^\natural(\mathbb{V}^\circ)$ y $\mathcal{C}_V^\Pi = \Pi_{0,2}^\natural(\mathbb{H}^\circ)$. Recíprocamente, si (4.14) se cumple, entonces es claro que Π es parcialmente acoplado por la definición de \mathcal{C}_H^Π y \mathcal{C}_V^Π en (4.13). Finalmente, (b) y (c) se siguen directamente de las definiciones (4.2) y (4.5). \square

Dominio de Acoplamiento. El resultado a presentar en este apartado afirma que todo campo bivectorial en una variedad fibrada admite un abierto en la variedad en el cual es de acoplamiento.

Sea Π un campo bivectorial con descomposición bigraduada (4.3) respecto a una conexión de Ehresmann γ en M . Definamos

$$M^\Pi := \{p \in M \mid \text{rank}_p \Pi_{2,0} = \dim B\} \subseteq M, \quad (4.15)$$

esto es, el conjunto donde el rango horizontal de Π es máximo e igual a la dimensión de la variedad base B . Notemos que en términos de los conjuntos M_k definidos en (4.11), es $M^\Pi = M_{\dim B}$.

Nota 4.1.12. El conjunto M^Π es vacío si y solamente si $\text{rank}_p \Pi_{2,0} < \dim B$, para todo $p \in M$. \triangleleft

Notemos que M^Π es un subconjunto abierto de la variedad M por ser el rango de todo campo bivectorial una función semicontinua inferiormente.

Definición 4.1.13 *El abierto M^Π definido en (4.15) se llama dominio de acoplamiento del campo bivectorial Π .*

Esta definición se sustenta en el siguiente resultado, que es el principal de este apartado.

Teorema 4.1.14 *Sea Π un campo bivectorial M . Entonces, la restricción de Π al abierto $M^\Pi \neq \emptyset$ es un campo bivectorial de acoplamiento en M^Π .*

Demostración. Sea Π un campo bivectorial con descomposición bigraduada (4.3) respecto a una conexión de Ehresmann γ en M . Por definición de M^Π , el morfismo $\Pi_{2,0}^{\natural}|_{\mathbb{V}^\circ} : \mathbb{V}^\circ \rightarrow \mathbb{H}$ es invertible en este abierto. Luego, la ecuación (4.8) tiene una *única* solución suave dada por $\Xi = (\Pi_{1,1}^{\natural}|_{\mathbb{V}^\circ}) \circ (\Pi_{2,0}^{\natural}|_{\mathbb{V}^\circ})^{-1}$. En otras palabras, debido al Lema 4.1.7, existe una única conexión de Ehresmann que realiza la condición (4.2). Es decir, Π es un campo bivectorial de acoplamiento. \square

Con otras palabras, por definición de acoplamiento, el subhaz vectorial $\Pi|_{M^\Pi}^{\natural}(\mathbb{V}^\circ)$ es una distribución horizontal en M^Π , es decir, $\mathbb{T}M^\Pi = \Pi|_{M^\Pi}^{\natural}(\mathbb{V}^\circ) \oplus \mathbb{V}|_{M^\Pi}$.

Corolario 4.1.15 *Un campo bivectorial Π en M es de acoplamiento si y sólo si $M^\Pi = M$.*

Otra manera de enunciar este corolario es: Π en M es de acoplamiento si y solamente si tiene rango horizontal máximo e igual a la dimensión de la base B .

Ahora, de manera automática se tiene la descomposición de la variedad

$$M = M^\Pi \cup \partial M^\Pi \cup \text{Int}(M \setminus M^\Pi).$$

Notemos que la conexión γ está definida de manera única por Π en la cerradura $\overline{M^\Pi}$ del dominio de acoplamiento, el cual coincide con M en el caso cuando M^Π es denso en M . Pero, en general, γ no está únicamente determinada en el interior de $M \setminus M^\Pi$.

Nota 4.1.16. Todo campo bivectorial Π parcialmente acoplado admite dos abiertos característicos en M : el dominio de casi acoplamiento N^Π definido en (4.12) y su dominio de acoplamiento M^Π . Por construcción, $M^\Pi \subseteq N^\Pi$. \triangleleft

Descomposición Intrínseca. Como se mencionó anteriormente la conexión adaptada a un campo bivectorial de casi acoplamiento no es única, contrario a lo que sucede en el caso de acoplamiento. Por ello, resulta natural la búsqueda de otros tipos de invariantes asociados a esta clase de campos bivectoriales. El primero de ellos, como en breve se mostrará, es la descomposición bigraduada de éstos.

Es claro que en general la descomposición (4.3) de un campo bivectorial Π depende de la conexión de Ehresmann fijada. El siguiente resultado muestra que para los campos bivectoriales de casi acoplamiento esto no es así.

Teorema 4.1.17 *La descomposición bigraduada (4.4) de un campo bivectorial Π de casi acoplamiento no depende de la elección de la conexión de Ehresmann adaptada en (4.2).*

Demostración. Sea $\Pi = \Pi_{2,0} + \Pi_{0,2}$ un campo bivectorial de casi acoplamiento vía una conexión de Ehresmann γ en M . Luego, por el Lema 4.1.7, cualquier otra conexión de Ehresmann $\tilde{\gamma}$ adaptada a Π debe satisfacer (4.8), que en este caso, por ser $\Pi_{1,1} = 0$, se traduce en la ecuación $\Xi \circ \Pi_{2,0} = 0$. Así, se sigue de (4.9) y (4.10) que $\tilde{\Pi}_{2,0} = \Pi_{2,0}$ y $\tilde{\Pi}_{0,2} = \Pi_{0,2}$, si $\Pi = \tilde{\Pi}_{2,0} + \tilde{\Pi}_{0,2}$ es la descomposición bigraduada de Π con respecto a $\tilde{\gamma}$. \square

Gracias a este resultado, en lo que resta, dado un campo bivectorial Π de casi acoplamiento en M , la descomposición bigraduada (4.4) de éste respecto a *alguna* conexión de Ehresmann γ adaptada a Π se denotará por

$$\Pi = \Pi_H + \Pi_V, \tag{4.16}$$

donde $\Pi_H = \Pi_{2,0}$ y $\Pi_V = \Pi_{0,2}$. Al campo bivectorial $\Pi_H \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{H}$ se le llamará la *componente horizontal* de Π y al campo bivectorial $\Pi_V \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}$ la *componente vertical*.

Notemos que, en particular, si Π es de acoplamiento su componente horizontal Π_H es *horizontalmente no degenerada*, es decir, es tal que $\text{rank } \Pi_H = \dim B$.

4.2. Tensores de Poisson de Casi Acoplamiento

El propósito de esta sección consiste en presentar un estudio de los tensores de Poisson de casi acoplamiento. Una de las herramientas principales para realizar este estudio es el cálculo bigraduado con conexiones de Ehresmann. El cual permite en primera instancia factorizar la identidad de Jacobi en cuatro ecuaciones. De las cuales algunas admiten una interpretación geométrica que generaliza a la que se tiene para el caso de acoplamiento. También se realiza una descripción de la foliación simpléctica y demás objetos geométricos asociados a esta clase de tensores de Poisson.

Definición 4.2.1 *Un tensor de Poisson de casi acoplamiento en M es un campo bivectorial de casi acoplamiento que a la vez es de Poisson.*

Recordemos que un tensor de Poisson en M es un campo bivectorial $\Pi \in \Gamma \wedge^2 TM$ que satisface la ecuación (identidad de Jacobi) $[[\Pi, \Pi]] = 0$, donde $[[,]]$ denota el corchete de Schouten-Nijenhuis para campos multivectoriales definido en (1.6).

Cabe mencionar que las estructuras de Poisson de (casi) acoplamiento surgen de manera natural como modelos alrededor de hojas simplécticas encajadas de variedades de Poisson. Este resultado se presenta en [72, 73, 71].

Ejemplo 4.2.2 Sea (M, Π) una variedad de Poisson y S una hoja simpléctica *encajada* en M . Entonces, existe un entorno tubular de S en M en el cual Π es isomorfo a un tensor de Poisson de acoplamiento. ◁

Ahora, se mostrará que para la clase de campos bivectoriales de casi acoplamiento la ecuación (1.9) se factoriza en cuatro ecuaciones las cuales admiten una interpretación geométrica bien definida en el caso particular de acoplamiento.

• Un campo bivectorial de casi acoplamiento $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ es un tensor de Poisson en M si y solamente si

$$[[\Pi_V, \Pi_V]] = 0, \tag{4.17}$$

$$[[\Pi_H, \Pi_V]]_{1,2} = 0, \tag{4.18}$$

$$[[\Pi_H, \Pi_H]]_{2,1} + 2[[\Pi_H, \Pi_V]]_{2,1} = 0, \tag{4.19}$$

$$[[\Pi_H, \Pi_H]]_{3,0} = 0, \tag{4.20}$$

donde la bigraduación para el corchete de Schouten-Nijenhuis es respecto a alguna conexión de Ehresmann adaptada a Π . Esta factorización, que es única, se sigue de la descomposición bigraduada (2.32) inducida al corchete de Schouten-Nijenhuis.

Notemos que la ecuación (4.17) no es más que la identidad de Jacobi para la componente vertical $\Pi_V \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}$. Por esto y el Teorema 4.1.17 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.2.3 *Sea M una variedad fibrada. La descomposición $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ de un tensor de Poisson de casi acoplamiento en M es intrínseca, en el sentido que no depende de la conexión de Ehresmann adaptada en (4.2). Aún más, la componente Π_V es un tensor de Poisson vertical en M .*

Como consecuencia, existe una correspondencia (no biunívoca) entre tensores de Poisson de casi acoplamiento y haces de Poisson. Recordemos que un haz de Poisson es un haz fibrado con una estructura de Poisson (no trivial) en cada fibra que varía suavemente de una a otra.

Identidad de Curvatura. En este apartado se mostrará que la ecuación (4.19) equivale a que la curvatura de cada conexión de Ehresmann adaptada a Π tome valores en campos Hamiltonianos verticales al evaluarse en la distribución (singular) $\Pi^\sharp(\mathbb{V}^\circ)$. Esto generaliza la llamada identidad de curvatura para el caso de acoplamiento [72, 73, 64, 65].

Proposición 4.2.4 *La ecuación (4.19) es equivalente a*

$$R^\gamma \left(\Pi^\sharp(d\pi^* f_1), \Pi^\sharp(d\pi^* f_2) \right) = \Pi_V^\sharp \left(d \left(\Pi_H(d\pi^* f_1, d\pi^* f_2) \right) \right), \quad \forall f_i \in C_B^\infty; \quad (4.21)$$

donde γ es una conexión adaptada a Π en el sentido (4.2) y $R^\gamma \in \Omega^2(M, \mathbb{V})$ es la forma de curvatura de γ definida en (2.21).

Demostración. Sea (U, x^i, y^a) una carta coordenada adaptada a la fibración π tal como en (2.4). En esta carta, la ecuación (4.19) es equivalente al sistema

$$\Pi_H^{ki} \Pi_H^{lj} \text{Curv}^\gamma(\text{hor}_k, \text{hor}_l) - \Pi_V^\sharp(d\Pi_H^{ij}) = 0,$$

con $\Pi_H = \frac{1}{2} \Pi_H^{ij} \text{hor}_i \wedge \text{hor}_j$, para $i, j, k, l = 1, \dots, \dim B$. Este sistema, a su vez, es equivalente a

$$\text{Curv}^\gamma \left(\Pi_H^\sharp(dx^i), \Pi_H^\sharp(dx^j) \right) - \Pi_V^\sharp \left(d\Pi_H(dx^i, dx^j) \right) = 0.$$

Finalmente, por la $(\pi^* C_B^\infty)$ -linealidad de los términos en esta ecuación se sigue (4.21). \square

La ecuación (4.21) se llamará *identidad de curvatura* (generalizada). Notemos que a pesar de que la conexión de Ehresmann γ adaptada a Π no es única, la identidad de curvatura garantiza que la curvatura de γ está determinada de manera única en la distribución $\Pi^\sharp(\mathbb{V}^\circ)$. Como se mostrará más adelante la identidad de curvatura se puede pensar como una medida de la obstrucción a que la componente horizontal Π_H sea un tensor de Poisson.

Caso de Acoplamiento. Tal como se mostró en los trabajos [72, 73, 64, 65] en el caso cuando Π es un tensor de Poisson de acoplamiento las ecuaciones (4.18)-(4.20) admiten una interpretación geométrica bien definida. Concretamente,

$$(4.18) \quad \iff \quad \mathcal{L}_{\text{hor}^\gamma u} \Pi_V = 0, \quad \forall u \in \Gamma \mathbb{T}B,$$

$$(4.19) \quad \iff \text{Curv}^\gamma \left(\text{hor}^\gamma u_1, \text{hor}^\gamma u_2 \right) = \Pi_V^\sharp \left(d \left(\sigma \left(\text{hor}^\gamma u_1, \text{hor}^\gamma u_2 \right) \right) \right)$$

$$(4.20) \quad \iff d\sigma \left(\text{hor}^\gamma u_1, \text{hor}^\gamma u_2, \text{hor}^\gamma u_3 \right) = 0,$$

para cualesquiera $u_1, u_2, u_3 \in \Gamma \mathbb{T}B$ y donde γ es la conexión de Ehresmann (única) asociada a la distribución horizontal $\mathbb{H} = \Pi^\sharp(\mathbb{V}^\circ)$.

En palabras, (4.18) equivale a que γ sea una conexión de Poisson, ver (2.37). Por otro lado, (4.19) dice que la curvatura de γ toma valores en campos Hamiltonianos de la estructura de Poisson vertical Π_V . Notemos que, a diferencia del caso de casi acoplamiento, la identidad de curvatura (4.21) en este caso determina totalmente la curvatura de γ por ser $\mathbb{H} = \Pi^\sharp(\mathbb{V}^\circ)$. Finalmente, (4.20) es equivalente a que la 2-forma horizontal $\sigma \in \Gamma \mathbb{V}^\circ$, llamada *forma de acoplamiento*, sea covariantemente cerrada. O en otras palabras, cerrada a lo largo de la distribución horizontal \mathbb{H} . La forma de acoplamiento está determinada por

$$\sigma^\flat|_{\mathbb{H}} = \left(\Pi_H^\sharp|_{\mathbb{V}^\circ} \right)^{-1} \quad (4.22)$$

La terna (γ, σ, Π_V) recibe el nombre de *datos geométricos* asociados a Π . En [72] se demuestra que, recíprocamente, datos geométricos que satisfacen las ecuaciones (4.17)-(4.20) inducen una única estructura de Poisson de casi acoplamiento.

La factorización (4.17)-(4.20) de la identidad de Jacobi, además de la interpretación geométrica que admite en el caso de acoplamiento, resulta útil para el estudio y construcción de tensores de Poisson en variedades fibradas de baja dimensión, tema que se abordará en secciones posteriores.

Tensor de Poisson Π_H . A diferencia de lo que sucede con la componente vertical, Π_H en general no define un tensor de Poisson en M . Naturalmente, la obstrucción para que esto suceda se relaciona con la curvatura de las conexiones adaptadas a Π .

Proposición 4.2.5 *Sea $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ un tensor de Poisson de casi acoplamiento vía una conexión de Ehresmann γ y $R^\gamma \in \Omega^2(M, \mathbb{V})$ la forma de curvatura de γ en (2.21). Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *la componente horizontal Π_H es un tensor de Poisson;*
- (ii) *la curvatura de γ se anula en la distribución $\Pi^\sharp(\mathbb{V}^\circ) \subset \mathbb{T}M$, es decir,*

$$R^\gamma \left(\Pi^\sharp(d\pi^* f_1), \Pi^\sharp(d\pi^* f_2) \right) = 0, \quad \forall f_i \in C_B^\infty;$$

o equivalentemente,

$$\left[\Pi^\sharp(\xi^1), \Pi^\sharp(\xi^2) \right] \in \Gamma \mathbb{H}, \quad \forall \xi^1, \xi^2 \in \Gamma \mathbb{V}^\circ;$$

- (iii) *las componentes horizontal Π_H y vertical Π_V de Π forman un par de Poisson.*

Aquí, \mathbb{H} es la distribución horizontal asociada a γ .

Demostración. De las ecuaciones (4.18)-(4.20) se sigue que, por ser Π un tensor de Poisson, su componente horizontal Π_H es de Poisson si y solamente si $\llbracket \Pi_H, \Pi_H \rrbracket_{2,1} = 0$. Por la identidad de curvatura (4.21), esto es equivalente a que $R^\gamma(\Pi_H^\natural(\mathbb{V}^\circ), \Pi_H^\natural(\mathbb{V}^\circ)) = 0$. Lo que prueba la equivalencia entre (i) y (ii). Finalmente, es claro que si Π_H es un tensor de Poisson, entonces la suma $\Pi_H + \Pi_V$ es un par de Poisson por el Teorema 4.2.3. Recíprocamente, si $\Pi_H + \Pi_V$ es un par de Poisson, por definición, Π_H es un tensor de Poisson. Esto prueba la equivalencia entre (i) y (iii). \square

Recordemos que dos tensores de Poisson Π_1 y Π_2 forman *par de Poisson* si la suma $\Pi_1 + \Pi_2$ es nuevamente un tensor de Poisson. Notemos que debido a la identidad de curvatura (4.21), la condición (iii) en la Proposición 4.2.5 es equivalente a $\Pi_V^\natural(d(\Pi_H^\natural(\mathbb{V}^\circ, \mathbb{V}^\circ))) = 0$.

Corolario 4.2.6 *Si Π es un tensor de Poisson de acoplamiento, entonces las condiciones (i)-(iv) en la Proposición 4.2.5 son equivalentes a la integrabilidad de la distribución horizontal $\mathbb{H} = \Pi^\natural(\mathbb{V}^\circ)$. Es decir, a que la curvatura de la conexión de Ehresmann asociada a \mathbb{H} sea nula.*

Corolario 4.2.7 *Sea ψ un tensor de Poisson en B y γ una conexión de Ehresmann en M . Entonces, el levantamiento horizontal $\text{hor}^\gamma \psi \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{H}$ es un tensor de Poisson si y sólo si*

$$R^\gamma(\text{hor}^\gamma X_{f_1}, \text{hor}^\gamma X_{f_2}) = 0, \quad \forall f_i \in C_B^\infty;$$

donde cada $X_{f_i} = \psi^\natural(df_i)$ es el campo Hamiltoniano asociado a f_i y relativo a ψ .

Demostración. Es claro que $\text{hor}^\gamma \psi$ es un campo bivectorial de casi acoplamiento horizontal. Luego, por (iii) de la Proposición 4.2.5, $\text{hor}^\gamma \psi$ es un tensor de Poisson si y solamente si $R^\gamma((\text{hor}^\gamma \psi)^\natural(d\pi^* f_1), (\text{hor}^\gamma \psi)^\natural(d\pi^* f_2)) = R^\gamma(\text{hor}^\gamma(\psi^\natural df_1), \text{hor}^\gamma(\psi^\natural df_2)) = 0$. \square

Distribución Característica. Sea $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ un tensor de Poisson de casi acoplamiento en M . Como anteriormente se mencionó, se tiene una descomposición inducida de la distribución característica de Π ,

$$\mathcal{C}^\Pi = \mathcal{C}_H^\Pi \oplus \mathcal{C}_V^\Pi, \quad (4.23)$$

donde

$$\mathcal{C}_H^\Pi = \Pi_H^\natural(\mathbb{V}^\circ) \subseteq \mathbb{H} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_V^\Pi = \Pi_V^\natural(\mathbb{H}^\circ) = \mathcal{C}^\Pi \cap \mathbb{V}$$

se llaman las componentes horizontal y vertical de la distribución característica \mathcal{C}^Π , respectivamente.

Notemos que, por ser Π un tensor de Poisson, la distribución singular (vertical) \mathcal{C}_V^Π es integrable por ser la distribución característica del tensor de Poisson vertical Π_V (ver el Teorema 4.2.3). Por el contrario, la distribución singular (horizontal) \mathcal{C}_H^Π no es integrable en general. La Proposición 4.2.5 da condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de esta distribución.

Nota 4.2.8. La propiedad de casi acoplamiento implica la descomposición (4.23) de la distribución característica de Π . Sin embargo, notemos que el recíproco no es cierto. Es decir, si la distribución característica de un tensor de Poisson Π en una variedad fibrada admite una descomposición como en (4.23), para algunas distribuciones suaves $\mathcal{C}_H^\Pi \subset \mathbb{T}M$ y $\mathcal{C}_V^\Pi \subseteq \mathbb{V}$, esto no implica que Π sea de casi acoplamiento. \triangleleft

Dominio de Acoplamiento y Foliación Simpléctica. En general, describir de manera completa y detallada la foliación simpléctica de una variedad de Poisson es una tarea poco realizable. Aun así, en variedades fibradas, para foliaciones simplécticas inducidas por tensores de Poisson de casi acoplamiento esta labor se puede realizar parcialmente.

Sea Π un tensor de Poisson de casi acoplamiento en M . Recordemos que el dominio de acoplamiento M^Π de Π se define por (4.15). En este caso el hecho que la descomposición $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ es única (ver el Teorema 4.1.17) confirma que M^Π está bien definida, en el sentido que no depende de la conexión de Ehresmann que se fije.

Como corolario del Teorema 4.1.14, se tiene que

$$\Pi|_{M^\Pi} \text{ es un tensor de Poisson de acoplamiento en } M^\Pi.$$

Notemos que la propiedad de ser de Poisson es consecuencia de que la condición (1.9) es natural con respecto a la restricción a subconjuntos abiertos en M .

Proposición 4.2.9 *Sea Π un tensor de Poisson de casi acoplamiento en M y M^Π su dominio de acoplamiento. Entonces, M^Π es invariante bajo el flujo de todos los campos Hamiltonianos en (M, Π) . Aún más, su frontera ∂M^Π consiste de puntos singulares de Π .*

Demostración. Sea Π un tensor de Poisson de casi acoplamiento en M . Primero se probará que la frontera ∂M^Π consiste de puntos singulares de Π . En efecto, primero notemos que todo entorno U de un punto $p \in \partial M^\Pi$ contiene un punto $q \in M^\Pi$. Por definición de M^Π , se tiene que $\text{rank}_p \Pi_H < \text{rank}_q \Pi_H$. Además, para cada U suficientemente pequeño es $\text{rank}_p \Pi_V \leq \text{rank}_q \Pi_V$, por ser el rango una función continua inferiormente. Luego, por (4.24), se sigue que $\text{rank}_p \Pi < \text{rank}_q \Pi$. Es decir, p es un punto singular de Π . Lo que demuestra que ∂M^Π consiste de puntos singulares. En consecuencia, si $S_q \subseteq M$ es una hoja simpléctica de Π por un punto $q \in M^\Pi$, entonces $S_q \subseteq M^\Pi$. En efecto, de contener S_q un punto $\tilde{p} \in \text{Int}(M \setminus M^\Pi)$, tomando una curva continua en S_q que conecte a q y \tilde{p} , se sigue que existe un punto $p \in \partial M^\Pi$ tal que $p \in S_q$. Por lo anteriormente mostrado, $\text{rank}_p \Pi < \text{rank}_q \Pi$. Pero esto contradice al hecho que $\text{rank}_{S_p} \Pi \equiv \text{const}$. Por tanto, $S_p \subseteq M^\Pi$ y en consecuencia M^Π hereda una foliación por hojas simplécticas de Π . Lo que prueba que M^Π es invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano de (M, Π) . \square

Con base en la Proposición 4.2.9, se presenta un esquema de la manera en cómo la foliación simpléctica inducida por Π se distribuye en la variedad M . Para esto, recordemos que M^Π induce una partición natural de M ,

$$M = M^\Pi \cup \partial M^\Pi \cup \text{Int}(M \setminus M^\Pi).$$

Esto permite examinar la foliación simpléctica “por partes”. Primero, como consecuencia directa de la Proposición 4.2.9, se tiene que el dominio de acoplamiento M^Π está foliado por hojas simplécticas con dimensión igual o mayor a la dimensión de B . Esta cota para la dimensión de las hojas se obtiene por definición de M^Π y la fórmula (4.24). Naturalmente, en general, M^Π contiene puntos singulares del tensor de Poisson Π .

Los puntos en la frontera ∂M^Π del dominio de acoplamiento son puntos singulares de Π , como se afirma en la Proposición 4.2.9. Así, de contener ∂M^Π una hoja simpléctica ésta será singular. En particular, el tensor de Poisson Π puede anularse en los puntos de esta frontera.

Para el abierto $\text{Int}(M \setminus M^\Pi)$, en general, es complicado el dar una descripción del comportamiento de la foliación simpléctica que queda contenida en él. Como se verá en secciones posteriores, esta tarea se torna un poco más realizable en variedades fibradas de baja dimensión.

Foliación Simpléctica de M^Π . En este apartado se presentan algunas propiedades adicionales de la foliación simpléctica inducida en el dominio de acoplamiento M^Π . Sean (S, ω_S) y (L, ω_L) hojas simplécticas por un punto $p \in M^\Pi$ de los tensores de Poisson Π y Π_V respectivamente. Entonces, se tiene primero que $L \subset S$. El espacio tangente a S y la forma simpléctica ω_S en p admiten la siguiente descomposición

$$\mathbb{T}_p S = \Pi_p^{\sharp}(\mathbb{V}_p^{\circ}) \oplus \mathbb{T}_p L \quad \text{y} \quad \omega_{Sp} = \sigma_p \oplus \omega_{Lp},$$

donde $\sigma \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}^{\circ}$ es la 2-forma de acoplamiento en M^Π del tensor de Poisson $\Pi|_{M^\Pi}$ (de acoplamiento) definida en (4.22). Notemos que en la medida que el punto p se aproxima a la frontera ∂M^Π el factor σ_p se torna singular. Esta observación exhibe una obstrucción a la existencia de una forma diferencial análoga a σ para la clase de tensores de Poisson de casi acoplamiento.

Rango y Otras Propiedades. En este apartado se presenta una descripción del rango de los tensores de Poisson de casi acoplamiento así como la de algunas propiedades generales.

Sea $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ un tensor de Poisson de casi acoplamiento vía una conexión de Ehresmann γ en M . Luego, la unicidad de su descomposición implica que

$$\text{rank } \Pi = \text{rank } \Pi_H + \text{rank } \Pi_V \quad (4.24)$$

En consecuencia, se puede dar una caracterización del conjunto de puntos de un rango definido:

$$\{\text{rank } \Pi = r\} = \bigcup_{r_1+r_2=r} M_{r_1}^H \cap M_{r_2}^V, \quad (4.25)$$

donde $M_{r_1}^H := \{p \in M \mid \text{rank}_p \Pi_H = r_1\}$ y $M_{r_2}^V := \{p \in M \mid \text{rank}_p \Pi_V = r_2\}$, con $r, r_i \in \mathbb{Z}$.

Notemos que los índices r_i varían por $r_1 = 0, \dots, \dim B$ y $r_2 = 0, \dots, (\dim M - \dim B)$. A su vez, estos subconjuntos de M se pueden calcular de manera más explícita por

$$M_{r_1}^H = \{\Pi_H^{s_1} \neq 0\} \cap \{\Pi_H^{s_1+1} = 0\}, \quad \text{si} \quad r_1 = 2s_1,$$

$$M_{r_2}^V = \{ \Pi_V^{s_2} \neq 0 \} \cap \{ \Pi_V^{s_2+1} = 0 \}, \quad \text{si } r_2 = 2s_2,$$

donde se ha definido $\Pi_H^n := \Pi_H \wedge \cdots \wedge \Pi_H$ y $\Pi_H^0 \equiv 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. La definición para Π_V es análoga. Esta descripción de los rangos de Π es útil en variedades fibradas de baja dimensión.

Corchete de Poisson. Debido a la descomposición bigraduada de Π el corchete de Poisson asociado a este tensor, $\{f, g\}_\Pi = \Pi(df, dg)$, se puede expresar como suma de dos componentes

$$\{f, g\}_\Pi = \{f, g\}_H + \{f, g\}_{\Pi_V}, \quad \forall f, g \in C_M^\infty;$$

donde $\{, \}_{\Pi_V}$ denota el corchete de Poisson asociado al tensor de Poisson vertical Π_V y $\{, \}_H$ está definido por $\{f, g\}_H = \Pi_H(d_{1,0}f, d_{1,0}g)$. Notemos que en general $\{, \}_H$ no define un corchete de Poisson en M .

Campos Hamiltonianos. Dada una función $h \in C_M^\infty$, el campo Hamiltoniano $X_h = \Pi^\sharp(dh)$, asociado a h y relativo al tensor de Poisson Π , hereda una descomposición bigraduada $X_h = (X_h)_{1,0} + (X_h)_{0,1}$ donde

$$(X_h)_{1,0} = \Pi_H^\sharp(d_{1,0}h) \quad \text{y} \quad (X_h)_{0,1} = \Pi_V^\sharp(d_{0,1}h). \quad (4.26)$$

Notemos que el término vertical $(X_h)_{0,1}$ es el campo Hamiltoniano asociado a la función h y relativo al tensor de Poisson vertical Π_V .

Claramente los campos Hamiltonianos asociados a funciones *proyectables* en M son campos vectoriales horizontales con respecto a la conexión de Ehresmann γ . Recordemos que una función en M se dice proyectable si está π -relacionada con una función en la base B .

Funciones de Casimir. Por ser Π de casi acoplamiento, se tiene la siguiente relación entre las funciones de Casimir de Π y las de su componente vertical Π_V ,

$$\text{Casim}(U, \Pi) \subseteq \text{Casim}(U, \Pi_V).$$

Esto se puede ver como consecuencia inmediata de (4.26).

Notemos que $\pi^*C_B^\infty \subseteq \text{Casim}(M, \Pi_V)$, es decir, toda función proyectable en M es una función de Casimir del tensor de Poisson vertical Π_V . En particular, si Π_V es no degenerado, entonces $\text{Casim}(M, \Pi_V) = \pi^*C_B^\infty$.

Campos de Poisson. En términos bigraduados, un campo vectorial W es un campo de Poisson para el tensor de Poisson de casi acoplamiento Π si y solamente si

$$\llbracket W, \Pi_H \rrbracket_{2,0} = 0, \quad (4.27)$$

$$\llbracket W, \Pi_H \rrbracket_{1,1} + \llbracket W_{1,0}, \Pi_V \rrbracket_{1,1} = 0, \quad (4.28)$$

$$\llbracket W, \Pi_V \rrbracket_{0,2} = 0, \quad (4.29)$$

donde la bigraduación del campo $W = W_{1,0} + W_{0,1}$ y del corchete de Schouten-Nijenhuis en (2.32) es con respecto a γ . Es sencillo verificar que si $W = \Pi^{\sharp}(df)$, entonces satisface de manera automática las tres ecuaciones anteriores. Lo que corrobora que todo campo Hamiltoniano es un campo de Poisson.

Notemos que, por definición, todo campo de Poisson *proyectable* para Π es un campo de Poisson para su componente vertical Π_V ,

$$\text{Poiss}_{\text{pr}}(M, \Pi) \subseteq \text{Poiss}(M, \Pi_V)$$

Recordemos que un campo vectorial W en M se llama *proyectable* si $[W, \Gamma\mathbb{V}] \subseteq \Gamma\mathbb{V}$. En consecuencia, $\llbracket W, \Pi_V \rrbracket = \llbracket W, \Pi_V \rrbracket_{2,0}$ y por tanto $\llbracket W_{1,0}, \Pi_V \rrbracket_{1,1} = 0$ en (4.28).

La discusión anterior da lugar a la siguiente proposición que es una generalización de resultados obtenidos en [69] para el caso de acoplamiento.

Proposición 4.2.10 *Sea $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ un tensor de Poisson de casi acoplamiento en una variedad fibrada M . Entonces, existen homomorfismos canónicos*

$$\text{Ham}(M, \Pi) \longrightarrow \text{Ham}(M, \Pi_V), \quad (4.30)$$

$$\text{Poiss}_{\text{pr}}(M, \Pi) \longrightarrow \text{Poiss}(M, \Pi_V), \quad (4.31)$$

Demostración. Sea γ una conexión de Ehresmann adaptada a Π en el sentido (4.2). Si $X_h \in \text{Ham}(M, \Pi)$, entonces, por (4.26), el homomorfismo (4.30) se define como la proyección lineal

$$\text{pr}_V(X_h) := (X_h)_{0,1},$$

donde la bigraduación $X = (X_h)_{1,0} + (X_h)_{0,1}$ es con respecto a γ . Análogamente, si $W \in \text{Poiss}_{\text{pr}}(M, \Pi)$, entonces, por (4.28) y (4.29), el homomorfismo (4.30) se define como la proyección lineal

$$\text{pr}_V(W) := W_{0,1},$$

donde la bigraduación $W = W_{1,0} + W_{0,1}$ es con respecto a γ . En general, si W no es proyectable el término $\llbracket W_{1,0}, \Pi_V \rrbracket_{1,1}$ en (4.28) no es cero y por tanto la componente vertical $W_{0,1}$ del campo vectorial W no es un campo de Poisson para Π_V . \square

Nota 4.2.11. Los homomorfismos (4.30) y (4.31) no son homomorfismos de álgebras de Lie en general. \triangleleft

Corolario 4.2.12 *Sea γ una conexión de Ehresmann adaptada a $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$. Si γ es una conexión de Poisson en (M, Π_V) , entonces el dominio del morfismo (4.31) es el conjunto $\text{Poiss}(M, \Pi)$ de todos los campos de Poisson para Π en M .*

Demostración. Por la definición (2.37), se sigue que si γ es una conexión de Poisson en (M, Π_V) , entonces es $\llbracket W_{1,0}, \Pi_V \rrbracket_{1,1} = 0$ en (4.28). Lo que implica, por (4.29) que la componente vertical de todo campo de Poisson para Π es un campo de Poisson para Π_V . \square

4.3. Simetrías y Reconstrucción

En esta sección se estudia el problema de la invarianza de la propiedad de casi acoplamiento bajo transformaciones gauge para tensores de Poisson. Adicionalmente se presentan otras simetrías para la familia de tensores de Poisson de casi acoplamiento y un método para la construcción de esta clase de tensores en un tipo especial de variedades fibradas.

Dado un tensor de Poisson Π en M , en este apartado será

$$\mathcal{F}_\Pi \equiv \text{Foliación simpléctica inducida por } \Pi. \quad (4.32)$$

Así, una 2-forma diferencial $\lambda \in \Gamma \wedge^2 T^*M$ se dirá \mathcal{F}_Π -cerrada si es cerrada a lo largo de las hojas de la foliación simpléctica de Π , es decir, el pullback de λ a cada hoja simpléctica de Π es cerrada.

4.3.1. Transformaciones Gauge.

Primero notemos que si λ es una 2-forma \mathcal{F}_Π -cerrada y el morfismo

$$(\text{id} - \lambda^\flat \circ \Pi^\sharp) : T^*M \rightarrow TM \quad \text{es invertible,}$$

entonces existe un tensor de Poisson (bien) definido por el morfismo antisimétrico

$$\bar{\Pi}^\sharp = \Pi^\sharp \circ (\text{id}_{T^*M} - \lambda^\flat \circ \Pi^\sharp)^{-1} \quad (4.33)$$

donde $\lambda^\flat : TM \rightarrow T^*M$ denota el morfismo de haces vectoriales definido por $X \mapsto \mathbf{i}_X \lambda$. En este contexto, a la función $\tau_\lambda : \Pi \mapsto \bar{\Pi}$ se le llama la *transformación gauge* de Π asociada a la 2-forma λ , o más brevemente, la transformación λ -gauge de Π .

Definición 4.3.1 *Dos tensores de Poisson Π y $\bar{\Pi}$ se dirán gauge equivalentes si están relacionadas por (4.33) para alguna 2-forma \mathcal{F}_Π -cerrada λ en M .*

Como se mencionó anteriormente las foliaciones simplécticas de dos tensores de Poisson λ -gauge equivalentes Π y $\bar{\Pi}$ son iguales salvo por la estructura simpléctica en cada hoja. Concretamente, una hoja simpléctica típica de $\bar{\Pi}$ es dada por $(S, \omega_S + \mathbf{i}_S^* \lambda)$, donde (S, ω_S) es una hoja simpléctica de Π e $\mathbf{i}_S : S \hookrightarrow M$ la inclusión canónica.

Ahora, para un tensor de Poisson de casi acoplamiento resulta natural preguntar bajo qué condiciones la transformación gauge de éste es nuevamente de casi acoplamiento.

Teorema 4.3.2 *Sean $\pi : M \rightarrow B$ una variedad fibrada y $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ un tensor de Poisson de casi acoplamiento y γ una conexión de Ehresmann adaptada a Π . Sea λ una 2-forma en M con descomposición bigraduada $\lambda = \lambda_{2,0} + \lambda_{1,1} + \lambda_{0,2}$ respecto a γ . Supóngase que la*

2-forma diferencial λ es \mathcal{F}_Π -cerrada y los siguientes morfismos de haces vectoriales son invertibles,

$$(\text{id}_{\mathbb{T}^*M} - \lambda^b \circ \Pi^{\natural}) : \mathbb{T}^*M \rightarrow \mathbb{T}^*M \quad e \quad (\text{id}_{\mathbb{T}^*M} - \lambda_{0,2}^b \circ \Pi_V^{\natural})|_{\mathbb{H}^\circ} : \mathbb{H}^\circ \rightarrow \mathbb{H}^\circ. \quad (4.34)$$

Entonces la transformación λ -gauge $\bar{\Pi}$ de Π determinado por (4.33) es un tensor de Poisson de casi acoplamiento con respecto a la conexión de Ehresmann

$$\tilde{\gamma} = \gamma - (\text{id}_{\mathbb{T}M} - \Pi_V^{\natural} \circ \lambda_{0,2}^b)^{-1} \circ \Pi_V^{\natural} \circ \lambda_{1,1}^b. \quad (4.35)$$

Aún más, la segunda condición en (4.34) no depende de γ .

Para la demostración de este teorema primero se presenta un lema auxiliar.

Lema 4.3.3 (Complemento de Schur) *Sea $A = [A_{ij}]$ una matriz por bloques 2×2 invertible. Si el bloque A_{22} es invertible, entonces*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (A/A_{22})^{-1} & -(A/A_{22})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} (A/A_{22})^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} (A/A_{22})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

donde $A/A_{22} := A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$ se llama complemento de Schur, asociado al bloque A_{22} .

Demostración (del Teorema 4.3.2). Fijemos una carta coordenada (U, x^i, y^a) adaptada a la fibración π tal como en (2.4). Por la descomposición (2.1) de $\mathbb{T}M$ inducida por \mathbb{H}^γ , los morfismos lineales Π^{\natural} y λ^b se pueden identificar con matrices por bloques 2×2 ,

$$\Pi^{\natural} \simeq \begin{pmatrix} \Pi_H^{\natural}|_{\mathbb{V}^\circ} & 0 \\ 0 & \Pi_V^{\natural}|_{\mathbb{H}^\circ} \end{pmatrix} \quad y \quad \lambda^b \simeq \begin{pmatrix} \lambda_{2,0}^b|_{\mathbb{H}} & \lambda_{1,1}^b|_{\mathbb{V}} \\ \lambda_{1,1}^b|_{\mathbb{H}} & \lambda_{0,2}^b|_{\mathbb{V}} \end{pmatrix},$$

donde $\lambda = \lambda_{2,0} + \lambda_{1,1} + \lambda_{0,2}$ es la descomposición bigraduada de λ inducida por γ . Así, se puede identificar

$$(\text{id}_{\mathbb{T}^*M} - \lambda^b \circ \Pi^{\natural}) \simeq \begin{pmatrix} \text{id}_{\mathbb{V}^\circ} - \lambda_{2,0}^b \circ \Pi_H^{\natural}|_{\mathbb{V}^\circ} & -\lambda_{1,1}^b \circ \Pi_V^{\natural}|_{\mathbb{H}^\circ} \\ -\lambda_{1,1}^b \circ \Pi_H^{\natural}|_{\mathbb{V}^\circ} & \text{id}_{\mathbb{H}^\circ} - \lambda_{0,2}^b \circ \Pi_V^{\natural}|_{\mathbb{H}^\circ} \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Luego, si se supone que el morfismo $(\text{id}_{\mathbb{H}^\circ} - \lambda_{0,2}^b \circ \Pi_V^{\natural}|_{\mathbb{H}^\circ}) = (\text{id}_{\mathbb{T}^*M} - \lambda_{0,2}^b \circ \Pi_V^{\natural})|_{\mathbb{H}^\circ}$ es invertible, por el Lema 4.3.3, se puede determinar de manera explícita la inversa de la matriz en (4.36) y por tanto la matriz por bloques (y los bloques) con la que podemos identificar el morfismo antisimétrico $\bar{\Pi}^{\natural}$ en (4.33). En particular, después de cálculos directos, se obtiene que

$$\bar{\Pi}_{1,1}^{\natural}|_{\mathbb{H}^\circ} = \bar{\Pi}_{2,0}^{\natural} \circ \lambda_{1,1}^b \circ \Pi_V^{\natural} \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*M} - \lambda_{0,2}^b \circ \Pi_V^{\natural})^{-1}|_{\mathbb{H}^\circ},$$

o equivalentemente,

$$\bar{\Pi}_{1,1}^{\natural}|_{\mathbb{V}^\circ} = [(\text{id}_{\mathbb{T}M} - \Pi_V^{\natural} \circ \lambda_{0,2}^b)^{-1} \circ \Pi_V^{\natural} \circ \lambda_{1,1}^b] \circ \bar{\Pi}_{2,0}^{\natural}|_{\mathbb{V}^\circ},$$

donde $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_{2,0} + \bar{\Pi}_{1,1} + \bar{\Pi}_{0,2}$ es la descomposición bigraduada respecto a γ del campo bivectorial $\bar{\Pi}$ inducido por el morfismo (4.33). Notemos que si definimos

$$\Xi_\lambda := (\text{id}_{\mathbb{T}M} - \Pi_V^{\flat} \circ \lambda_{0,2}^b)^{-1} \circ \Pi_V^{\flat} \circ \lambda_{1,1}^b, \quad (4.37)$$

se tiene una relación como en (4.8)

$$\bar{\Pi}_{1,1}^{\flat}|_{\mathbb{V}^\circ} = \Xi_\lambda \circ \bar{\Pi}_{2,0}^{\flat}|_{\mathbb{V}^\circ},$$

donde $\Xi_\lambda : \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}M$, por construcción, es un morfismo lineal (suave) con la propiedad $\text{Im } \Xi_\lambda \subseteq \mathbb{V} \subseteq \ker \Xi_\lambda$. Por tanto, por el Lema 4.1.7, se sigue que $\bar{\Pi}$ es de casi acoplamiento vía la conexión de Ehresmann

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \Xi_\lambda = \gamma - (\text{id}_{\mathbb{T}M} - \Pi_V^{\flat} \circ \lambda_{0,2}^b)^{-1} \circ \Pi_V^{\flat} \circ \lambda_{1,1}^b.$$

Finalmente, es claro que $\bar{\Pi}$ es un tensor de Poisson por ser λ una 2-forma diferencial $\mathcal{F}_{\bar{\Pi}}$ -cerrada. \square

Asumiendo que $\bar{\Pi}$ es un tensor de Poisson de casi acoplamiento, una pregunta natural es el determinar sus componentes horizontal y vertical de manera explícita.

Corolario 4.3.4 *Las componentes horizontal $\bar{\Pi}_H$ y vertical $\bar{\Pi}_V$ de la transformación λ -gauge $\bar{\Pi}$ del tensor de Poisson Π que enuncia el Teorema 4.3.2 están determinadas respectivamente por*

$$\bar{\Pi}_H^{\flat} = (\text{id}_{\mathbb{T}M} + \Xi_\lambda) \circ \Pi_H^{\flat} \circ \left(\frac{\text{I} - \lambda^b \circ \Pi^{\flat}}{\text{I} - \lambda_{0,2}^b \circ \Pi_V^{\flat}} \right)^{-1} \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*M} + \Xi_\lambda^*) \quad (4.38)$$

$$\bar{\Pi}_V^{\flat} = \left[\Pi_V^{\flat} - (G_V^* \circ \Pi_V^{\flat} - \Pi_V^{\flat} \circ G_V) \circ \lambda_{1,1}^b \circ \Pi_H^{\flat} \circ \left(\frac{\text{I} - \lambda^b \circ \Pi^{\flat}}{\text{I} - \lambda_{0,2}^b \circ \Pi_V^{\flat}} \right)^{-1} \circ \lambda_{1,1}^b \circ \Pi_V^{\flat} \right] \circ G_V \quad (4.39)$$

donde el morfismo Ξ_λ está definido en (4.37) y

- $G_V := (\text{id}_{\mathbb{T}^*M} - \lambda_{0,2}^b \circ \Pi_V^{\flat})^{-1} : \mathbb{T}^*M \rightarrow \mathbb{T}^*M$,
- $\frac{\text{I} - \lambda^b \circ \Pi^{\flat}}{\text{I} - \lambda_{0,2}^b \circ \Pi_V^{\flat}} := \text{id}_{\mathbb{T}^*M} - \left(\lambda_{2,0}^b + \lambda_{1,1}^b \circ \Pi_V^{\flat} \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*M} - \lambda_{0,2}^b \circ \Pi_V^{\flat})^{-1} \circ \lambda_{1,1}^b \right) \circ \Pi_H^{\flat} : \mathbb{T}^*M \rightarrow \mathbb{T}^*M$.

Demostración. Sea $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_{2,0} + \bar{\Pi}_{1,1} + \bar{\Pi}_{0,2}$ la descomposición bigraduada respecto a γ del tensor de Poisson $\bar{\Pi}$. Luego, por el Lema 4.1.7 y las igualdades (4.9)-(4.10), las componentes horizontal y vertical de $\bar{\Pi}$ (de casi acoplamiento) respecto a la conexión de Ehresmann $\tilde{\gamma}$ en (4.35) están determinadas por

$$\tilde{\bar{\Pi}}_{2,0}^{\flat} = (\text{id}_{\mathbb{T}M} + \Xi_\lambda) \circ \bar{\Pi}_{2,0}^{\flat} \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*M} + \Xi_\lambda^*),$$

$$\tilde{\bar{\Pi}}_{0,2}^{\flat} = \bar{\Pi}_{0,2}^{\flat} - \Xi_\lambda \circ \bar{\Pi}_{2,0}^{\flat} \circ \Xi_\lambda^*,$$

donde Ξ_λ está definido en (4.37). Observando que la matriz por bloques con la que podemos identificar el morfismo $\bar{\Pi}^\natural$ en (4.33) es

$$\begin{pmatrix} \bar{\Pi}_{2,0}^\natural|_{\mathbb{V}^\circ} & \bar{\Pi}_{1,1}^\natural|_{\mathbb{H}^\circ} \\ \bar{\Pi}_{1,1}^\natural|_{\mathbb{V}^\circ} & \bar{\Pi}_{0,2}^\natural|_{\mathbb{H}^\circ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_H^\natural|_{\mathbb{V}^\circ} & 0 \\ 0 & \Pi_V^\natural|_{\mathbb{H}^\circ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id}_{\mathbb{V}^\circ} - \lambda_{2,0}^\flat \circ \Pi_H^\natural|_{\mathbb{V}^\circ} & -\lambda_{1,1}^\flat \circ \Pi_V^\natural|_{\mathbb{H}^\circ} \\ -\lambda_{1,1}^\flat \circ \Pi_H^\natural|_{\mathbb{V}^\circ} & \text{id}_{\mathbb{H}^\circ} - \lambda_{0,2}^\flat \circ \Pi_V^\natural|_{\mathbb{H}^\circ} \end{pmatrix}^{-1},$$

por el Lema 4.3.3, se pueden determinar de manera explícita $\bar{\Pi}_{2,0}^\natural$ y $\bar{\Pi}_{0,2}^\natural$. Con esto y el Teorema 4.1.17 se obtienen (4.38) y (4.39). \square

A continuación, se presenta una familia de 2-formas diferenciales que, bajo la condición (4.33) y de \mathcal{F}_Π -cerradura, preservan la propiedad de casi acoplamiento.

Corolario 4.3.5 (del Teorema 4.3.2) *Si $\text{Im } \lambda_{0,2} \subseteq \ker \Pi_V^\natural$, entonces la transformación λ -gauge $\bar{\Pi}$ del tensor de Poisson Π es de casi acoplamiento con respecto a la conexión de Ehresmann*

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \Pi_V^\natural \circ \lambda_{1,1}^\flat.$$

Las componentes horizontal y vertical de $\bar{\Pi}$ están determinadas por

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_H^\natural &= (\text{id}_{\mathbb{T}M} + \Pi_V^\natural \circ \lambda_{1,1}^\flat) \circ \Pi_H^\natural \circ \left(\frac{\text{I} - \lambda_{0,2}^\flat \circ \Pi^\natural}{\mathbb{H}^\circ} \right)^{-1} \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*M} + \lambda_{1,1}^\flat \circ \Pi_V^\natural), \\ \bar{\Pi}_V^\natural &= \Pi_V^\natural, \end{aligned} \tag{4.40}$$

donde $\frac{\text{I} - \lambda_{0,2}^\flat \circ \Pi^\natural}{\mathbb{H}^\circ} = \text{id}_{\mathbb{T}^*M} - (\lambda_{2,0}^\flat + \lambda_{1,1}^\flat \circ \Pi_V^\natural \circ \lambda_{1,1}^\flat) \circ \Pi_H^\natural$.

Demostración. Si $\text{Im } \lambda_{0,2} \subseteq \ker \Pi_V^\natural$, entonces $(\text{id}_{\mathbb{T}^*M} - \lambda_{0,2}^\flat \circ \Pi_V^\natural) = \text{id}_{\mathbb{T}^*M}$ es un morfismo invertible y por tanto la segunda condición en (4.34) se cumple de manera automática. La igualdad (4.40) se sigue de (4.39). \square

Corolario 4.3.6 (del Teorema 4.3.2) *Si Π es un tensor de Poisson de acoplamiento, entonces $\bar{\Pi}$ es nuevamente un tensor de Poisson de acoplamiento.*

Demostración. De (4.38) es sencillo verificar que $\tilde{\mathbb{H}} = \bar{\Pi}^\natural(\mathbb{V}^\circ)$, donde $\tilde{\mathbb{H}} = (\text{id}_{\mathbb{T}M} + \Xi_\lambda)(\mathbb{H})$, es la distribución horizontal inducida por la conexión de Ehresmann $\tilde{\gamma}$ dada por (4.35). \square

Corolario 4.3.7 *Los dominios de acoplamiento de Π y $\bar{\Pi}$ son iguales, esto es, $M^{\bar{\Pi}} = M^\Pi$.*

Demostración. Por ser $\Xi_\lambda^2 = 0$, el morfismo $(\text{id} + \Xi_\lambda)$ es invertible. Luego, de (4.38) se sigue que $\text{rank } \bar{\Pi}_H = \text{rank } \Pi_H$. Lo que implica, por la definición (4.15) de dominio de acoplamiento, que $M^{\bar{\Pi}} = M^\Pi$. \square

Ejemplo 4.3.8 En un haz fibrado $\pi : M \rightarrow B$, sea $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ un tensor de Poisson de casi acoplamiento vía una conexión de Ehresmann γ en M . Consideremos la familia de 2-formas diferenciales en M dada por

$$\lambda = -d\mu + \zeta,$$

donde $\mu \in \Gamma \mathbb{V}^0$ es una 1-forma horizontal y $\zeta \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}^0$ es una 2-forma horizontal la cual satisface que $d_{1,0}\zeta = 0$ y $\zeta(\text{hor}^\gamma u_1, \text{hor}^\gamma u_2) \in \text{Casim}(M, \Pi_V)$, para cualesquiera $u_1, u_2 \in \Gamma \text{T}B$. Notemos que cada λ es una forma diferencial \mathcal{F}_Π -cerrada. Por tanto, bajo la condición de no-degeneración,

$$(\text{id}_{\text{T}^*M} - \lambda^\flat \circ \Pi_H^\sharp + (d_{0,1}\mu)^\flat \circ \Pi_V^\sharp) \quad \textit{invertible},$$

la transformación λ -gauge de Π es un tensor de Poisson de casi acoplamiento respecto a la conexión de Ehresmann

$$\tilde{\gamma} = \gamma + \Pi_V^\sharp \circ (d_{0,1}\mu)^\flat. \quad (4.41)$$

Esto se deduce del Corolario 4.3.5 pues en este caso son $\lambda_{0,2} = 0$, $\lambda_{1,1} = -d_{0,1}^\gamma \mu$ y $\lambda_{2,0} = -d_{1,0}^\gamma \mu + \zeta$, donde la bigraduación $d = d_{1,0}^\gamma + d_{2,-1}^\gamma + d_{0,1}^\gamma$ para la diferencial exterior es con respecto a la conexión γ . \triangleleft

Simetrías. Por una *simetría* de las ecuaciones de integrabilidad (4.17)-(4.20) se entenderá una transformación sobre la familia de campos bivectoriales de casi acoplamiento que preserve estas ecuaciones. Es decir, que preserve la familia de tensores de Poisson de casi acoplamiento.

Corolario 4.3.9 *Bajos las hipótesis del Teorema 4.3.2, la transformación λ -gauge $\Pi \mapsto \bar{\Pi}$ en (4.33) define una simetría de las ecuaciones de integrabilidad (4.17)-(4.20).*

Difeomorfismos que Preservan Fibras. Recordemos que un difeomorfismo $g : M \rightarrow M$ se dice preserva las fibras de π si existe un difeomorfismo $g_0 : B \rightarrow B$ en la base tal que $\pi \circ g = g_0 \circ \pi$. La propiedad principal de g es que su diferencial $dg : \text{T}M \rightarrow \text{T}M$ deja invariante la distribución vertical \mathbb{V} , esto es, $(dg)(\mathbb{V}) \subseteq \mathbb{V}$.

Entonces, dado un tensor de Poisson de casi acoplamiento $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ vía una conexión de Ehresmann γ , el pullback $g^*\Pi$ es nuevamente un tensor de Poisson de casi acoplamiento vía la conexión $g^*\gamma$ con componentes bigraduadas

$$(g^*\Pi)_H = g^*\Pi_H \quad \text{y} \quad (g^*\Pi)_V = g^*\Pi_V.$$

Aquí, el pullback $g^*\gamma$ es la conexión de Ehresmann en M definida por $(g^*\gamma)(X) = g^*(\gamma(g_*X))$, para cada $X \in \Gamma \text{T}M$. Esta conexión está bien definida ya que el difeomorfismo g preserva la distribución vertical \mathbb{V} .

4.4. Propiedad de Casi Acoplamiento Vía Levantamiento

En este apartado se presenta una manera de inducir tensores de Poisson de casi acoplamiento en una clase especial de variedades fibradas: aquellas cuya variedad base también admite una fibración (no trivial). La idea básica para realizar lo anterior es “levantar” tensores de Poisson de casi acoplamiento. A este procedimiento lo denominaremos *reconstrucción*.

Supóngase que existen submersiones sobreyectivas

$$M_2 \xrightarrow{p} M_1 \xrightarrow{\pi_1} B,$$

entre las variedades diferenciales M_2 , M_1 y B . En otras palabras, M_2 es una variedad fibrada sobre M_1 y ésta, a su vez, es una variedad fibrada sobre B . Notemos que de manera automática se tiene una fibración de M_2 sobre B dada por

$$M_2 \xrightarrow{\pi_2} B, \quad \pi_2 = \pi_1 \circ p.$$

La distribución vertical de esta fibración $\mathbb{V}_2 = \ker d\pi_2 \subset \mathbb{T}M_2$, por construcción, se recupera por

$$\mathbb{V}_2 = (dp)^{-1}(\mathbb{V}_1),$$

donde $\mathbb{V}_1 = \ker d\pi_1 \subset \mathbb{T}M_1$ es la distribución vertical del fibrado $\pi_1 : M_1 \rightarrow B$.

Aunque se pueden fijar distintos subhaces complementarios a la distribución vertical \mathbb{V}_2 , una manera de hacerlo es utilizando descomposiciones de los haces tangente sobre las variedades M_2 y M_1 . Concretamente, dada una descomposición del haz tangente $\mathbb{T}M_1 = \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{V}_1$ inducida por una distribución horizontal \mathbb{H}_1 asociada a una conexión de Ehresmann γ_1 en M_1 , se tiene que

$$\mathbb{T}M_2 = \mathbb{H}_2 \oplus \mathbb{V}_2 \quad \text{con} \quad \mathbb{H}_2 = (dp)^{-1}(\mathbb{H}_1) \cap \tilde{\mathbb{H}}_2. \quad (4.42)$$

donde $\tilde{\mathbb{H}}_2 \subset \mathbb{T}M_2$ es una distribución horizontal asociada a una conexión de Ehresmann $\tilde{\gamma}_2$ en M_2 .

Proposición 4.4.1 Sean Π_1 un tensor de Poisson en M_1 y γ_2 la conexión de Ehresmann asociada a la distribución horizontal \mathbb{H}_2 en (4.42). Entonces, el levantamiento horizontal $\Pi_2 = \text{hor}^{\gamma_2}(\Pi_1)$ es un tensor de Poisson de casi acoplamiento vía γ_2 en M_2 si y sólo si

$$\text{Curv}^{\gamma_2} \left(\text{hor}^{\gamma_2}(\Pi_1^\sharp df_1), \text{hor}^{\gamma_2}(\Pi_1^\sharp df_2) \right) = 0, \quad \forall f_1, f_2 \in C_{M_1}^\infty.$$

Demostración. Es consecuencia directa del Corolario 4.2.7. □

En particular, si \mathbb{H}_2 (4.42) es una distribución integrable, entonces Π_2 resulta un tensor de Poisson de casi acoplamiento en M_2 .

Ejemplo 4.4.2 Sea $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_y^{n-3} \rightarrow \mathbb{R}_x^3$ un haz fibrado trivial con $\Pi_1 = \psi(x) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial x}$ un tensor de Poisson en \mathbb{R}_x^3 , esto es, tal que $\langle \psi, \text{rot } \psi \rangle = 0$. Entonces, el levantamiento horizontal $\text{hor}^{\gamma_2} \Pi_1 = \psi(x) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial x} \oplus 0$, respecto a la conexi3n trivial γ_2 en \mathbb{R}^n , es un tensor de Poisson horizontal en \mathbb{R}^n . \triangleleft

Ejemplo 4.4.3 Sea $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^4 \times \mathbb{R}_y^{n-4} \rightarrow \mathbb{R}_x^4$ un haz fibrado trivial. Consideremos $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}_{x'}^3 \times \mathbb{R}_{y'} \rightarrow \mathbb{R}_{x'}^3$ como haz fibrado trivial sobre $\mathbb{R}_{x'}^3$. Sea $\Pi_1 = \psi(x', y') \frac{\partial}{\partial x'} \wedge \frac{\partial}{\partial x'} + \phi(x', y') \frac{\partial}{\partial x'} \wedge \frac{\partial}{\partial y'}$ un tensor de Poisson en \mathbb{R}^4 , esto es, tal que

$$\begin{aligned} \psi \cdot \left(\text{rot } \psi + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) - \frac{\partial(\psi \cdot \phi)}{\partial y'} &= 0, \\ \phi \times \left(\text{rot } \psi + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) + (\text{div } \phi) \psi - \nabla(\psi \cdot \phi) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, el levantamiento horizontal $\text{hor}^{\gamma_2} \Pi_1 = \Pi_1 \oplus 0$, respecto a la conexi3n trivial γ_2 en \mathbb{R}^n , es un tensor de Poisson horizontal en \mathbb{R}^n . \triangleleft

4.5. Caso Orientable Sobre Bases 2-Dimensionales

En esta secci3n se estudian propiedades de los tensores de Poisson de casi acoplamiento en variedades fibradas sobre bases 2-dimensionales. Una de las motivaciones para centrarse en este tipo de fibraciones es la combinaci3n entre la practicidad de los c3lculos y la no trivialidad de los resultados. Por ejemplo, los tensores de Poisson de casi acoplamiento y las ecuaciones de integrabilidad (4.17)-(4.20) se pueden expresar de manera m3s expl3cita en t3rminos de una funci3n y una forma diferencial. Por dimensiones, tambi3n se deduce que el dominio de acoplamiento de un tensor de Poisson de casi acoplamiento es vac3o si y solamente si el tensor es vertical, entre otros resultados.

Sea $\pi : M \rightarrow B$ un haz fibrado sobre una variedad diferencial 2-dimensional B . Se supondr3 en esta secci3n que M es una m -variedad *orientada* con una forma de *volumen descomponible* Ω . Esto es, dada una conexi3n de Ehresmann γ en M (arbitraria) se tiene

$$\Omega = \Omega^H \wedge \Omega^V, \tag{4.43}$$

donde

$$\Omega^H \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}^\circ \quad \text{y} \quad \Omega^V \in \Gamma \wedge^{m-2} \mathbb{H}^\circ, \tag{4.44}$$

con $m = \dim M$. Notemos que $\text{rank } \mathbb{H} = 2$.

Si bien la descomposici3n (4.43) no es 3nica 3sta *no depende* de la conexi3n de Ehresmann que se elija. En esta secci3n se asumir3n Ω^H y Ω^V fijos salvo que se mencione lo contrario.

Notemos que (4.43) se realiza, si por ejemplo, las fibras de π o la base B son orientables. De hecho, la orientabilidad de las fibras de π es una condici3n necesaria para (4.43) pues la

restricción de Ω^V a cada una de estas fibras induce una forma de volumen en ellas.

Por otro lado, para las formas diferenciales Ω^H y Ω^V en la descomposición (4.44) existen unos *únicos* campos multivectoriales (duales) $Q_H \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{H}$ y $Q_V \in \Gamma \wedge^{m-2} \mathbb{V}$ tales que

$$\mathbf{i}_{Q_H} \Omega^H = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{i}_{Q_V} \Omega^V = 1. \quad (4.45)$$

Recordemos que aquí el producto interior de campos multivectoriales y formas diferenciales está definida por la regla $\mathbf{i}_{X \wedge Y} = \mathbf{i}_X \circ \mathbf{i}_Y$, para cualesquiera $X, Y \in \Gamma \mathbb{T}M$. Además, Ω^V y Q_H dependen de la conexión de Ehresmann γ dada.

Triples de Poisson. En este apartado se muestra que bajo la condición de orientabilidad (4.43) cada tensor de Poisson de casi acoplamiento en M está en correspondencia con una terna (γ, κ, β) que consiste de

- una conexión de Ehresmann γ en M ,
- una función $\kappa \in C_M^\infty$,
- una $(m-4)$ -forma horizontal $\beta \in \Gamma \wedge^{m-4} \mathbb{V}^\circ$, con $m = \dim M$,

las cuales satisfacen un sistema de ecuaciones llamadas ecuaciones de integrabilidad. Como se verá, esta correspondencia no es biunívoca pero ayuda a describir ciertas propiedades de los tensores de Poisson de casi acoplamiento de una manera más explícita.

Primero, a una terna (γ, κ, β) se le puede asociar el campo bivectorial en M dado por

$$\Pi = -\kappa Q_H + P_\beta, \quad (4.46)$$

donde

$$P_\beta := -\mathbf{i}_\beta Q_V \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}, \quad (4.47)$$

es independiente de γ y está determinado de manera única por la restricción de la forma β a la distribución vertical \mathbb{V} , $\beta|_{\mathbb{V}} \in \Gamma \wedge^{m-4} \mathbb{V}^*$, la cual resulta una $(m-4)$ -forma diferencial fibrada. Es claro que Π es un campo bivectorial de casi acoplamiento con componente horizontal $\Pi_H = -\kappa Q_H$ y componente vertical $\Pi_V = P_\beta$.

Antes de presentar el primer resultado de este apartado se introducen las siguientes formas diferenciales en M que serán necesarias para su formulación:

$$\Gamma \mathbb{V}^\circ \ni \theta := (-1)^m \mathbf{i}_{Q_V} d_{1,0} \Omega^V, \quad (4.48)$$

$$\Gamma \mathbb{H}^\circ \ni \nu := \mathbf{i}_{Q_H} d_{0,1} \Omega^H, \quad (4.49)$$

$$\Gamma \wedge^{m-3} \mathbb{H}^\circ \ni \varrho := \mathbf{i}_{Q_H} d_{2,-1} \Omega^V. \quad (4.50)$$

donde la descomposición de la diferencial exterior para formas en (2.33) es con respecto a la conexión de Ehresmann γ . En consecuencia, las formas diferenciales (4.48)-(4.50) son dependientes de γ .

Teorema 4.5.1 *Sea $\pi : M \rightarrow B$ un haz fibrado sobre una 2-variedad B . Supóngase que M es una variedad orientada con una forma de volumen descomponible $\Omega = \Omega^H \wedge \Omega^V$ definida por (4.44). Entonces, un campo bivectorial de casi acoplamiento $\Pi = -\kappa Q_H + P_\beta$ es un tensor de Poisson en M si y sólo si la terna (γ, κ, β) satisface las siguientes ecuaciones de integrabilidad:*

$$d_{0,1} \mathbf{i}_{\beta} Q_V \beta - 2 \mathbf{i}_{\beta} Q_V d_{0,1} \beta = 0, \quad (4.51)$$

$$\kappa (d_{1,0} \beta - \theta \wedge \beta) = 0, \quad (4.52)$$

$$d_{0,1} \kappa \wedge \beta - \kappa (\nu \wedge \beta + \kappa \varrho) = 0. \quad (4.53)$$

La prueba de este teorema se basa en una verificación directa de que las ecuaciones (4.17)-(4.20) son equivalentes a las ecuaciones (4.51)-(4.53) definiendo $\rho = \mathbf{i}_\Pi(\Omega^H \wedge \Omega^V)$ y usando argumentos de bigrado para la ecuación (3.3) en la Proposición 3.1.1. Notemos que la ecuación (4.20) se satisface automáticamente debido a la dimensión de la variedad B . Naturalmente, las ecuaciones (4.51)-(4.53) no dependen de la elección de la forma de volumen Ω elegida.

Definición 4.5.2 *Un triple de Poisson es una terna (γ, κ, β) que satisface (4.51)-(4.53).*

La ecuación (4.51) para β no depende de la conexión de Ehresmann γ y como se mencionó en la anteriormente representa la identidad de Jacobi para el campo bivectorial vertical P_β en (4.47), el cual induce el haz de Poisson $(M \xrightarrow{\pi} B, P_\beta)$. El correspondiente tensor de Poisson fibrado se obtiene mediante la restricción de β a las fibras de π .

La ecuación (4.53) es equivalente a la identidad de curvatura (4.21) que en este caso adopta la forma

$$\kappa^2 R^\gamma(\mathbf{i}_{d\pi^* f_1} Q_H, \mathbf{i}_{d\pi^* f_2} Q_H) = \mathbf{i}_{d(\kappa Q_H(d\pi^* f_1, d\pi^* f_2))} P_\beta \quad (4.54)$$

para cualesquiera $f_1, f_2 \in C_B^\infty$.

Corolario 4.5.3 *Un campo bivectorial horizontal $\Pi = -\kappa Q_H$ inducido por una terna $(\gamma, \kappa, 0)$ es un tensor de Poisson en M si y sólo si la conexión de Ehresmann γ es plana en el dominio de acoplamiento $M^\Pi = M \setminus \{\kappa = 0\}$ de Π .*

Demostración. Para el caso $\beta = 0$, las ecuaciones (4.51)-(4.53) son equivalentes a la condición $\kappa \varrho = 0$. Esta ecuación, por la identidad de curvatura (4.54), traduce en pedir que la conexión γ sea plana en el abierto $\{\kappa \neq 0\}$ que es el dominio de acoplamiento de $\Pi = -\kappa Q_H$. \square

A continuación se presenta la versión recíproca del Teorema 4.5.1 la cual afirma que todo tensor de Poisson de casi acoplamiento en M se puede representar como en (4.46).

Teorema 4.5.4 *Sea $\pi : M \rightarrow B$ un haz fibrado sobre una 2-variedad B . Supóngase que M es una variedad orientada con una forma de volumen descomponible $\Omega = \Omega^H \wedge \Omega^V$ definida*

por (4.44). Entonces, cada tensor de Poisson de casi acoplamiento $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ vía una conexión de Ehresmann γ' en M es de la forma (4.46) y en consecuencia induce un triple de Poisson (γ, κ, β) dado por

$$\gamma = \gamma', \quad \kappa = -\mathbf{i}_{\Pi_H} \Omega^H, \quad \beta = -\mathbf{i}_{\Pi_V} \Omega^V. \quad (4.55)$$

Demostración. Si se define el triple (4.55) es claro que

$$\Pi_H = -\mathbf{i}_{\mathbf{i}_{\Pi_H} \Omega^H} \Omega^H = -\kappa Q_H \quad \text{y} \quad \Pi_V = -\mathbf{i}_{\mathbf{i}_{\Pi_V} \Omega^V} \Omega^V = -\mathbf{i}_\beta Q_V.$$

Por tanto, se tiene que $\Pi = -\kappa Q_H - \mathbf{i}_\beta Q_V$. \square

Como corolario de este teorema se tiene que la asignación $(\gamma, \kappa, \beta) \mapsto \Pi$ es sobreyectiva. Sin embargo, esta asignación no es uno a uno (ver Ejemplo 4.5.5).

Ejemplo 4.5.5 Una terna $(\gamma, 0, \beta)$, donde γ es una conexión de Ehresmann en M arbitraria y β una $(m-4)$ -forma vertical que satisface (4.51), es un triple de Poisson el cual induce el tensor de Poisson vertical $\Pi = P_\beta$ en (4.47). \triangleleft

A continuación se presenta una descripción de ciertas propiedades y objetos asociados a los tensores de Poisson de casi acoplamiento en términos de los triples de Poisson. Para esto, en lo que sigue Π en (4.46) será un tensor de Poisson de casi acoplamiento asociado a un triple de Poisson (γ, κ, β) . El conjunto de ceros de la función κ y la $(m-4)$ -forma diferencial β se denotarán por

$$\mathcal{Z}(\kappa) = \{\kappa = 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{Z}(\beta) = \{\beta = 0\}. \quad (4.56)$$

Notemos que $\{\kappa Q_H = 0\} = \mathcal{Z}(\kappa)$ y $\{P_\beta = 0\} = \mathcal{Z}(\beta)$.

Dominio de Acoplamiento y Rango. Por definición, se tiene que el dominio de acoplamiento M^Π del tensor de Poisson Π en (4.46) es dado por

$$M^\Pi = M \setminus \mathcal{Z}(\kappa).$$

Luego, se tiene la descomposición de la variedad

$$M = M^\Pi \cup \partial(\mathcal{Z}(\kappa)) \cup \text{Int}(\mathcal{Z}(\kappa)). \quad (4.57)$$

Ahora, usando (4.25), se pueden determinar los conjuntos en los cuales el rango de Π tiene un valor constante:

$$\begin{aligned} \{\text{rank } \Pi = 0\} &= \mathcal{Z}(\kappa) \cap \mathcal{Z}(\beta), \\ \{\text{rank } \Pi = 2\} &= M^\Pi \cap \mathcal{Z}(\beta) \cup \mathcal{Z}(\kappa) \cap (M \setminus \mathcal{Z}(\beta)) \cap \{P_\beta^2 = 0\}, \\ &\vdots \\ \{\text{rank } \Pi = 2r\} &= M^\Pi \cap \{P_\beta^{r-1} \neq 0\} \cap \{P_\beta^r = 0\} \cup \mathcal{Z}(\kappa) \cap \{P_\beta^r \neq 0\} \cap \{P_\beta^{r+1} = 0\}, \end{aligned}$$

donde se ha definido $P_\beta^n := P_\beta \wedge \dots \wedge P_\beta$ y $P_\beta^0 \equiv 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular,

$$\{\text{rank } \Pi = \text{máximo}\} = M^\Pi \cap \{P_\beta^{\lfloor m/2 \rfloor - 1} \neq 0\},$$

donde $\lfloor m/2 \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m/2\}$.

Nota 4.5.6. Si $M^\Pi \cap \text{supp } \beta = \emptyset$ y $P_\beta^n = 0$ para todo $n \geq 2$, entonces el rango de Π es igual a 0 ó 2 y el tensor de Poisson Π es de tipo *Flaschka-Ratiu* [16]. Tal clase de tensores son utilizados en la construcción de estructuras de Poisson con foliaciones características predeterminadas [29, 25]. \triangleleft

El corchete de Poisson definido por Π en (4.46) es dado por

$$\{f, g\} = \kappa \frac{d_{1,0}f \wedge d_{1,0}g}{\Omega^H} + \frac{d_{0,1}f \wedge d_{0,1}g \wedge \beta}{\Omega^V},$$

donde el segundo término en la parte derecha de esta igualdad representa el corchete de Poisson inducido por P_β el cual se denotará por $\{, \}_\beta$.

Dada una función $h \in C_M^\infty$, el campo Hamiltoniano $X_h = \mathbf{i}_{dh}\Pi$ asociado a esta función tiene por descomposición bigraduada $X_h = (X_h)_{1,0} + (X_h)_{0,1}$ donde

$$(X_h)_{1,0} = -\kappa \mathbf{i}_{d_{1,0}h}Q_H \quad \text{y} \quad (X_h)_{0,1} = \mathbf{i}_{dh}P_\beta = -\mathbf{i}_{d_{0,1}h \wedge \beta}Q_V. \quad (4.58)$$

De esto se sigue que

$$C^\Pi = \{\kappa \text{hor}^\gamma u \mid u \in \Gamma TB\} \oplus \{\mathbf{i}_{df \wedge \beta}Q_V \mid f \in C_M^\infty\}.$$

Como consecuencia de la bigraduación (4.58) de los campos Hamiltonianos se sigue que el espacio $\text{Casim}(M, \Pi)$ de funciones de Casimir de Π consiste de todas las funciones $c \in C_M^\infty$ tales que

$$\kappa d_{1,0}c = 0 \quad \text{y} \quad d_{0,1}c \wedge \beta = 0, \quad (4.59)$$

donde la segunda condición determina el espacio de funciones de Casimir de P_β , $\text{Casim}(M, P_\beta)$.

Interpretación Geométrica de las Ecuaciones de Integrabilidad. Como ya se mencionó, la ecuación (4.51) representa la identidad de Jacobi para el tensor de Poisson P_β . Análogamente, es posible dar una interpretación a las ecuaciones de integrabilidad restantes.

Acorde a la descomposición (4.57) para la variedad M , las ecuaciones (4.52) y (4.53) para un triple de Poisson (γ, κ, β) admiten las siguientes representaciones equivalentes

- en el dominio de acoplamiento M^Π :

$$d_{1,0}\beta - \theta \wedge \beta = 0, \quad (4.60)$$

$$\left(d_{0,1}\left(\frac{1}{\kappa}\right) + \frac{1}{\kappa}\nu\right) \wedge \beta + \varrho = 0; \quad (4.61)$$

- en el subconjunto cerrado $\mathcal{Z}(\kappa)$: $d_{0,1}\kappa \wedge \beta = 0$.

Aún más, esta última condición se cumple automáticamente en el interior $\text{Int}(\mathcal{Z}(\kappa))$ del cerrado $\mathcal{Z}(\kappa)$ y por tanto se puede reformular de manera equivalente por

$$(d_{0,1}\kappa)_p \wedge \beta_p = 0, \quad \forall p \in \partial(\mathcal{Z}(\kappa)). \quad (4.62)$$

Por esto, y de la relación $\partial(\mathcal{Z}(\kappa)) = \partial M^\Pi$, se concluye que la condición (4.62) involucra solamente la variación a primer orden de κ en puntos de la frontera del dominio de acoplamiento de Π .

Ahora, en el abierto M^Π , la ecuación (4.60) es equivalente a la condición

$$\mathcal{L}_{\text{hor}^\gamma u} P_\beta = 0, \quad \forall u \in \Gamma TB, \quad (4.63)$$

la cual significa que los levantamientos horizontales de campos vectoriales en la base son *campos de Poisson* para el tensor de Poisson vertical P_β restringido al abierto M^Π . En otras palabras, por la definición (2.37), es γ una *conexión de Poisson* para el haz de Poisson $(M^\Pi, P_\beta|_{M^\Pi})$.

La ecuación (4.61), como se mencionó anteriormente, es equivalente a la identidad de curvatura (4.21). En el dominio de acoplamiento M^Π esta identidad se expresa por

$$\text{Curv}^\gamma(u_1, u_2) = -\Omega^H(\text{hor}^\gamma u_1, \text{hor}^\gamma u_2) P_\beta^\sharp d\left(\frac{1}{\kappa}\right),$$

para cualesquiera $u_i \in \Gamma TB$. Esta relación dice que la función escalar κ controla la curvatura de γ en M^Π en el siguiente sentido: la conexión γ es plana, $\text{Curv}^\gamma = 0$, si y solamente si κ es una función de Casimir de $P_\beta|_{M^\Pi}$, es decir, la condición (4.62) se satisface en el dominio de acoplamiento.

Como consecuencia de la Proposición 4.2.5, la nulidad de la curvatura de γ en M^Π implica en este caso que el campo bivectorial κQ_H es un tensor de Poisson. Luego, la componente horizontal κQ_H y vertical P_β de Π forma un par de Poisson en M .

Ejemplo 4.5.7 Una terna $(\gamma, \kappa, 0)$ es un triple de Poisson para cada conexión de Ehresmann γ plana en M y cada función $\kappa \in C_B^\infty$. ◁

En resumen, tomando en cuenta las propiedades de los tensores de Poisson de acoplamiento, se presenta la siguiente descripción de los tensores de Poisson de casi acoplamiento en variedades fibradas (orientables) sobre bases 2-dimensionales.

Proposición 4.5.8 *Un tensor de Poisson de casi acoplamiento $\Pi = -\kappa Q_H + P_\beta$ en M posee el siguiente comportamiento:*

- (i) en el abierto $M^\Pi = M \setminus \mathcal{Z}(\kappa)$, es Π un tensor de Poisson de acoplamiento asociado a los datos geométricos $(\gamma, \sigma, P_\beta|_{M^\Pi})$, donde γ es una conexión de Poisson determinada de manera única por la distribución $\Pi|_{M^V}^h(\nabla^\circ)$ y σ es la 2-forma de acoplamiento en M^Π definida por $\sigma = \frac{1}{\kappa} \Omega^H$;
- (ii) en el abierto $\text{Int}(\mathcal{Z}(\kappa))$, el tensor de Poisson Π es vertical y coincide con P_β , $\Pi = P_\beta$;
- (iii) en los puntos de la frontera ∂M^Π , la linealización de κ es compatible con β por medio de la condición (4.62).

Demostración. Por el Teorema 4.1.14, la restricción de Π a M^Π es un tensor de Poisson de casi acoplamiento. Luego, en este abierto Π tiene asociado datos geométricos (γ, σ, Π_V) donde la forma de acoplamiento σ , que se define por (4.22), está determinada por $\sigma^b = (\kappa Q_H^b)^{-1} = (\frac{1}{\kappa} \Omega^H)^b$ y el tensor de Poisson vertical es $\Pi_V = P_\beta$. Lo que prueba (i). El inciso (ii) es por la definición de $\mathcal{Z}(\kappa)$ en (4.56). Finalmente, (iii) se sigue de (4.62). \square

Nota 4.5.9. Por el inciso (i) de la Proposición 4.5.8, la conexión de Poisson γ está completamente determinada por Π en la cerradura $\overline{M^\Pi}$ del dominio de acoplamiento. En el abierto $\text{Int}(\mathcal{Z}(\kappa))$ la conexión γ no es única y es independiente de β . Pero en el caso cuando M^Π es denso en M el abierto $\text{Int}(\mathcal{Z}(\kappa))$ es vacío y en consecuencia la conexión γ queda determinada de manera única en toda la variedad M . \triangleleft

4.5.1. Criterio de Unimodularidad

El resultado a presentar en este apartado es un criterio para determinar la unimodularidad global de una estructura de Poisson de casi acoplamiento. Este resultado, que se formula en términos de los llamados triples de Poisson, es una versión extendida de un criterio general para estructuras de Poisson de acoplamiento [53].

Recordemos que un tensor de Poisson se dice unimodular en M si en esta variedad existe una forma de volumen invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano relativo al tensor de Poisson. Esto es equivalente, como se mostró anteriormente, a que el campo modular del tensor de Poisson sea nulo, o bien Hamiltoniano, respecto a una forma de volumen en M .

Para lo que sigue se mantendrá fija una forma de volumen descomponible en M

$$\Omega = \Omega^H \wedge \Omega^V,$$

definida por (4.44). Ahora, sea $\Pi = -\kappa Q_H + P_\beta$ un tensor de Poisson de casi acoplamiento asociado a un triple de Poisson (γ, κ, β) .

El campo modular de Π relativo a la forma de volumen Ω tiene por descomposición bigrada $Z = Z_{1,0} + Z_{0,1}$, respecto a la conexión de Ehresmann γ , con

$$Z_{1,0} = \mathbf{i}_{\kappa\theta + d_{1,0}\kappa} Q_H \quad \text{y} \quad Z_{0,1} = \mathbf{i}_{\kappa\varrho} Q_V + Z_{P_\beta}, \tag{4.64}$$

donde el campo vertical

$$Z_{P_\beta} = \mathbf{i}_{\nu \wedge \beta + d_{0,1}\beta} Q_V \quad (4.65)$$

es el campo modular del tensor de Poisson vertical P_β relativo a la forma de volumen Ω . En lo anterior, la 1-forma horizontal θ está definida por (4.48) y las formas verticales ν y ϱ por (4.49)-(4.50), los campos multivectoriales duales Q_H y Q_V por (4.45) y la descomposición bigraduada de la diferencial exterior para formas por (2.33).

Ahora, las *hipótesis principales* para el desarrollo de los resultados subsecuentes son

$$d_{0,1}\beta = 0 \quad \text{y} \quad \nu = -d_{0,1}h, \quad (4.66)$$

para alguna función $h \in C_M^\infty$. En otras palabras, que la $(m-4)$ -forma vertical β sea cerrada a lo largo de las fibras de π y la 1-forma vertical ν sea $d_{0,1}$ -exacta.

Lema 4.5.10 *Bajo las hipótesis (4.66) el tensor de Poisson vertical $P_\beta = -\mathbf{i}_\beta \Omega^V$ es unimodular en M . Aún más, en el dominio de acoplamiento $M^\Pi = M \setminus \{\kappa = 0\}$ de Π se cumple que:*

- la 1-forma horizontal $\theta \in \Gamma \mathbb{V}^\circ$ (4.48) toma valores en el espacio $\text{Casim}(M^\Pi, P_\beta)$ de funciones de Casimir del tensor de Poisson vertical P_β ,
- la 1-forma θ es covariantemente constante, es decir,

$$d_{1,0}\theta = 0.$$

Demostración. Primero, la unimodularidad de P_β se sigue directamente de (4.65) y las condiciones en (4.66), las cuales implican que el campo modular de P_β respecto a la forma de volumen (4.43) es Hamiltoniano. Ahora, de (4.60) se sigue que

$$d_{0,1}(\beta \wedge \theta) = -d_{0,1} \circ d_{1,0}\beta = d_{1,0} \circ d_{0,1}\beta = 0,$$

y por tanto $d_{0,1}(\beta \wedge \theta) = -\beta \wedge d_{0,1}\theta = 0$. Lo que implica, por (4.59), que en cada carta de M las funciones θ_i son funciones de Casimir de P_β , con $\theta = \theta_i dx^i$. Esto es equivalente a decir que $\mathbf{i}_{\text{hor}^\gamma u} \theta \in \text{Casim}(M^\Pi, P_\beta)$, para cualquier $u \in \Gamma \text{T}B$. Finalmente, usando que $d_{0,1}\Omega^V = 0$ y $d_{0,1}\nu = 0$, por (4.61), se tiene que

$$\begin{aligned} d_{1,0}\theta \wedge \Omega^V &= d_{1,0}^2 \Omega^V = -d_{2,-1}(d_{0,1}\Omega^V) - d_{0,1}(d_{2,-1}\Omega^V) \\ &= -d_{0,1}(\Omega^H \wedge \varrho) = -d_{0,1}\Omega^H \wedge \varrho - \Omega^H \wedge d_{0,1}\varrho \\ &= -\Omega^H \wedge (\nu \wedge \varrho - d_{0,1}\varrho) = 0. \end{aligned}$$

Lo que implica que $d_{1,0}\theta = 0$. □

A continuación, con base en este lema, se presenta un primer resultado el cual es una versión adaptada al caso de casi acoplamiento de un criterio de unimodularidad general para los tensores de Poisson de acoplamiento [53].

Teorema 4.5.11 *Sea $\pi : M \rightarrow B$ un haz fibrado sobre una 2-variedad B . Supóngase que M es una variedad orientada con una forma de volumen descomponible $\Omega = \Omega^H \wedge \Omega^V$ definida por (4.44). Entonces, dado $\Pi = -\kappa Q_H + P_\beta$ un tensor de Poisson de casi acoplamiento en M , bajo las hipótesis en (4.66), se cumple que:*

- (i) *en el dominio de acoplamiento $M^\Pi = M \setminus \{\kappa = 0\}$, el tensor de Poisson Π es unimodular si y sólo si la 1-forma horizontal θ es $d_{1,0}$ -exacta, esto es,*

$$\theta = -d_{1,0}h, \quad (4.67)$$

para alguna función de Casimir $h \in \text{Casim}(M^\Pi, P_\beta)$ del tensor de Poisson vertical P_β . En este caso, la forma de volumen en M^Π dada por

$$\Omega_1^{\text{inv}} := \frac{e^h}{\kappa} \Omega^H \wedge \Omega^V, \quad (4.68)$$

es invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano relativo a Π ;

- (ii) *en el abierto $\text{Int}(M \setminus M^\Pi)$ de M , el tensor de Poisson $\Pi = P_\beta$ es unimodular y una forma de volumen invariantes es*

$$\Omega_2^{\text{inv}} := \Omega^H \wedge \Omega^V. \quad (4.69)$$

Demostración. Primero, supongamos que $\Pi|_{M^\Pi}$ es unimodular en M^Π . Ahora, por (4.58), (4.64) y (4.65), se sigue que existe una función escalar suave $a > 0$ en M^Π tal que

$$\frac{\kappa}{a} d_{1,0}a + d_{1,0}\kappa + \kappa\theta = 0, \quad (4.70)$$

$$\frac{1}{a} d_{0,1}a \wedge \beta + d_{0,1}\beta + \nu \wedge \beta + \kappa\rho = 0. \quad (4.71)$$

Ya que por hipótesis es $d_{0,1}\beta = 0$ y dado que $M^\Pi = \{\kappa \neq 0\}$, las dos ecuaciones anteriores son, respectivamente, equivalentes a

$$\frac{1}{a} d_{1,0}a + \frac{1}{\kappa} d_{1,0}\kappa + \theta = 0,$$

$$\frac{1}{a} d_{0,1}a \wedge \beta + \nu \wedge \beta + \kappa\rho = 0.$$

Luego, por (4.61), se sigue que

$$\theta = -\left(\frac{1}{a} d_{1,0}a + \frac{1}{\kappa} d_{1,0}\kappa\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{a} d_{0,1}a + \frac{1}{\kappa} d_{0,1}\kappa\right) \wedge \beta = 0.$$

En otras palabras, si se define $h := \ln|a\kappa|$, se tiene que $\theta = -d_{1,0}h$ con $d_{0,1}h \wedge \beta = 0$. Es decir, por (4.59), es $\theta = -d_{1,0}h$ con $h \in \text{Casim}(M^\Pi, P_\beta)$. Recíprocamente, si existe una función $h \in \text{Casim}(M^\Pi, P_\beta)$ tal que $\theta = -d_{1,0}h$, entonces la forma de volumen $\Omega^{\text{inv}} = \Omega^H \wedge \frac{e^h}{\kappa} \Omega^V$ es una forma de volumen en M^Π invariante bajo el flujo de todos los campos Hamiltonianos de $\Pi|_{M^\Pi}$. En efecto, definiendo $a := e^h/\kappa$ y dado que es $d_{0,1}\beta = 0$ por hipótesis, es inmediato comprobar que en M^Π se satisfacen las ecuaciones (4.70) y (4.71). Esto implica, por (4.58), (4.64) y (4.65), que $\Pi|_{M^\Pi}$ es unimodular en M^Π con forma de volumen invariante $\Omega^{\text{inv}} = \Omega^H \wedge \frac{e^h}{\kappa} \Omega^V$. Lo que prueba (i). La afirmación en (ii) es consecuencia inmediata del Lema 4.5.10. \square

Con otras palabras, bajo las condiciones (4.66) y (4.67), en la variedad M existen dos abiertos en los cuales el tensor de Poisson Π es unimodular. A saber, el dominio de acoplamiento M^Π y el exterior de este dominio. En cada uno de estos abiertos existe una forma de volumen invariante. Sin embargo, estos volúmenes en general no inducen una forma de volumen invariante global. Ya que, por ejemplo, para la forma invariante $\frac{e^h}{\kappa} \Omega^H \wedge \Omega^V$ en M^Π el factor $1/k$ se torna singular en puntos de la frontera de M^Π .

Nota 4.5.12. La restricción de la derivada covariante $d_{1,0}$ al espacio de formas horizontales con valores en el espacio de funciones de Casimir de P_β está bien definida y da lugar a un complejo cocadena llamado el complejo de Rham-Casimir [69]. Así, el Lema 4.5.10 y el Teorema 4.5.11 dice que, bajo las hipótesis en (4.66), existe una obstrucción cohomológica a la unimodularidad del tensor de Poisson de acoplamiento $\Pi|_{M^\Pi}$, la cual generaliza la clase de Reeb [1, 35]. \triangleleft

Teorema 4.5.13 *Sea $\pi : M \rightarrow B$ un haz fibrado sobre una 2-variedad B . Supóngase que M es una variedad orientada con una forma de volumen descomponible $\Omega = \Omega^H \wedge \Omega^V$ definida por (4.44). Entonces, bajo las hipótesis en (4.66), un tensor de Poisson de casi acoplamiento $\Pi = -\kappa Q_H + P_\beta$ es unimodular en (todo) M si y sólo si*

- (i) la condición (4.67) se cumple para alguna $h \in \text{Casim}(M^\Pi, P_\beta)$,
- (ii) existe un función escalar $K \neq 0$ en todo M cuya restricción al abierto $\text{Int}(M \setminus M^\Pi)$ es una función de Casimir de P_β y tal que

$$\kappa|_{M^\Pi} = e^h K|_{M^\Pi}. \quad (4.72)$$

Aún más, la forma de volumen $\Omega^{\text{inv}} = \frac{1}{K} \Omega^H \wedge \Omega^V$ es invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano en (M, Π) .

Demostración. La suficiencia es clara, se sigue del Teorema 4.5.11 y las relaciones $\Omega^{\text{inv}} = \Omega_1^{\text{inv}}$ en M^Π y $\Omega^{\text{inv}} = K^{-1} \Omega_2^{\text{inv}}$ en $\text{Int}(M \setminus M^\Pi)$, donde Ω_1^{inv} y Ω_2^{inv} están definidas por (4.68) y (4.69), respectivamente. Para probar la necesidad supongamos que Π es unimodular en M . Luego, existe una función $K \in C_M^\infty$ tal que $K^{-1} \Omega^H \wedge \Omega^V$ es una forma de volumen global. Por otro lado, por el Teorema 4.5.11, en el dominio de acoplamiento M^Π , la forma de volumen (4.68) también es invariante para alguna primitiva h of θ . Luego, estas dos formas de volumen en M^Π se relacionan por un factor multiplicativo $\kappa_0 \in \text{Casim}(M^\Pi, \Pi)$ y por tanto

$$\kappa|_{M^\Pi} = e^h \kappa_0 K|_{M^\Pi}. \quad (4.73)$$

Se sigue de (4.59) que la primitiva h de θ está únicamente determinada salvo por la adición de una función de Casimir de $\Pi|_{M^\Pi}$. En consecuencia, (4.73) se transforma en (4.72) bajo el cambio $h \mapsto h + \ln |\kappa_0| \in \text{Casim}(M^\Pi, P_\beta)$. Finalmente, el hecho que $K \in \text{Casim}(\text{Int } \mathcal{Z}(\kappa), P_\beta)$ se sigue de la invarianza de las formas de volumen Ω_2 y $K^{-1} \Omega_2$ con respecto al flujo de todos los campos Hamiltonianos en $(\text{Int } \mathcal{Z}(\kappa), P_\beta)$. \square

Notemos que el Teorema 4.5.13 presenta una manera de “pegar” la dos formas de volumen invariantes Ω_1^{inv} y Ω_2^{inv} que se asegura en el Teorema 4.5.11 para construir una forma

de volumen invariante global. La condición de “pegado” es dada por (4.72), la cual adopta una versión equivalente dada por (4.73) debido a la libertad que existe para fijar una anti-derivada h de la 1-forma θ . Es claro que esta libertad es una función de Casimir κ_0 en M^Π del tensor de Poisson $\Pi|_{M^\Pi}$. En consecuencia, se tiene el siguiente corolario al Teorema 4.5.13.

Corolario 4.5.14 *Bajo las condiciones (4.66), si $\theta = 0$ y $\kappa \in \text{Casim}(M^\Pi, \Pi)$, entonces el tensor de Poisson $\Pi = -\kappa Q_H + P_\beta$ es unimodular en (todo) M . En este caso, $\Omega = \Omega^H \wedge \Omega^V$ es una forma de volumen invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano relativo a Π .*

Con este corolario se tienen condiciones suficientes bajo las cuales (4.72) se satisface. A continuación, un ejemplo de lo contrario.

Ejemplo 4.5.15 En el fibrado $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_y^{n-2}$ el tensor de Poisson (homogéneo) de casi acoplamiento, vía la conexión trivial,

$$\Pi = \kappa(x, y) \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \kappa \text{ polinomio homogéneo no constante;}$$

es unimodular en su dominio de acoplamiento $M^\Pi = \mathbb{R}^n \setminus \{\kappa = 0\}$, pues en este caso es $\theta = 0$ y (4.67) se cumple trivialmente. Pero Π no es unimodular en \mathbb{R}^n ya que se puede probar que no existe función $K \neq 0$ en todo \mathbb{R}^n que satisfaga (4.72). \triangleleft

Este ejemplo ilustra que la forma de volumen invariante Ω_1^{inv} en (4.68), definida en M^Π , no se puede extender a una forma de volumen invariante global aún cuando el dominio de acoplamiento es un abierto denso. En el Ejemplo 4.5.15 el abierto M^Π es denso en \mathbb{R}^n por ser el complemento del conjunto de ceros de un polinomio (homogéneo). Como nota, usando el Lema 3.4.1 se puede confirmar que Π no es unimodular en \mathbb{R}^n .

4.5.2. Caso 3-Dimensional

En general, dar una descripción completa de los tensores de Poisson de casi acoplamiento en variedades fibradas de dimensión arbitraria resulta una tarea complicada. Aun así, para variedades fibradas 3-dimensionales tal descripción se puede realizar. Primero, se presenta este resultado para variedades no necesariamente orientables.

Proposición 4.5.16 *Sea M una variedad fibrada 3-dimensional. Entonces, un campo bivectorial Π en M es un tensor de Poisson de casi acoplamiento si y sólo si*

- (i) Π es vertical, o bien,
- (ii) Π es horizontal respecto a una conexión de Ehresmann que es plana en su dominio de acoplamiento M^Π . Aún más, $\Pi = 0$ en el complemento de M^Π .

Demostración. Este resultado es básicamente consecuencia de la siguiente observación: fibriciones no triviales de 3-variedades se realizan sobre variedades (bases) 1 ó 2 dimensionales. Si la base es 1-dimensional, la propiedad de casi acoplamiento y (4.16) aseguran que Π es vertical. En este caso, por ser las fibras de dimensión dos, de manera automática Π es un tensor de Poisson. Si la base es 2-dimensional, entonces todo campo bivectorial vertical es trivial. Luego, dada una conexión de Ehresmann γ en M , si Π es de casi acoplamiento éste debe ser horizontal. Además, en este caso, Π es no trivial solamente en los puntos de rango 2, es decir en M^Π . Así, por el Corolario 4.2.6, es Π un tensor de Poisson si y solamente si la curvatura de γ es cero en M^Π . \square

Corolario 4.5.17 *En cada variedad de Poisson 3-dimensional (M, Π) se tiene que $M^\Pi = \emptyset$ si y solamente si Π es un tensor de Poisson vertical.*

Corolario 4.5.18 *Si M es una variedad fibrada de Poisson 3-dimensional con una estructura de Poisson de acoplamiento, entonces M admite una conexión de Ehresmann plana. A saber, la asociada a la distribución horizontal $\mathbb{H} = \Pi^\sharp(\mathbb{V}^\circ)$.*

Este último corolario se puede utilizar para comprobar si ciertas variedades tridimensionales pueden admitir estructuras de Poisson de acoplamiento. Como se muestra en el siguiente ejemplo existen variedades en las que no se pueden construir este tipo de estructuras.

Ejemplo 4.5.19 La fibrición de Hopf $\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^2$ no admite estructuras de Poisson de acoplamiento. Esto como consecuencia del Corolario 4.5.18 y de que la fibrición de Hopf no posee conexiones globales planas [37]. \triangleleft

Foliación Simpléctica. Por dimensión, toda foliación (singular) no trivial de M consta de puntos y de hojas de dimensión dos.

Para el caso (i) de la Proposición 4.5.16, se tiene que toda hoja simpléctica de la foliación (simpléctica) inducida por Π está contenida en alguna fibra en M . Luego, cada fibra en M es la unión de un abierto dotado de una estructura simpléctica y de puntos en los cuales el tensor de Poisson Π se anula. La frontera de este abierto en cada fibra consiste de puntos singulares de Π .

Para el caso (ii) de la Proposición 4.5.16, la foliación simpléctica inducida por Π consiste de:

- puntos de M pertenecientes al complemento del dominio de acoplamiento M^Π ,
- hojas simplécticas S de dimensión 2 totalmente contenidas en M^Π para las cuales se cumple que $\mathbb{T}_q S = \mathbb{H}_q^\gamma$, para todo $q \in S$.

Aún más, $\partial M^\Pi = \{\text{puntos singulares de } \Pi\}$, esto es, el conjunto de puntos singulares del tensor de Poisson Π es la frontera ∂M^Π de su dominio de acoplamiento.

Caso (2+1) orientable. En este apartado se describen algunas propiedades de los tensores de Poisson de casi acoplamiento en términos de los llamados triples de Poisson (ver la Definición 4.5.2).

Sean M una variedad diferencial 3-dimensional orientable y $\pi : M \rightarrow B$ una fibración de ésta sobre una variedad B de dimensión 2. Supóngase que M está orientada con una forma de volumen descomponible

$$\Omega = \Omega^H \wedge \Omega^V,$$

donde $\Omega^H \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}^\circ$ y $\Omega^V \in \Gamma \mathbb{H}^\circ$, con \mathbb{H} una distribución horizontal en M . Los campos multivectoriales duales de estas formas diferenciales serán $Q_H \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{H}$ y $Q_V \in \Gamma \mathbb{V}$, esto es, los únicos tales que $\mathbf{i}_{Q_H} \Omega^H = 1$ e $\mathbf{i}_{Q_V} \Omega^V = 1$.

Bajo las hipótesis anteriores, a cada par (γ, κ) donde γ es una conexión de Ehresmann en M y $\kappa \in C_M^\infty$ se le puede asociar el campo bivectorial de casi acoplamiento en M

$$\Pi = -\kappa Q_H.$$

Notemos que todo campo bivectorial de casi acoplamiento en M es de esta forma por ser $\text{rank } \mathbb{V} = 1$ (ver Teorema el 4.5.4 y la Proposición 4.5.16). Ahora, como consecuencia del Corolario 4.5.3 se tiene el siguiente criterio.

Proposición 4.5.20 *Un campo bivectorial de casi acoplamiento $\Pi = -\kappa Q_H$ inducido por un par (γ, κ) es un tensor de Poisson en M si y sólo la conexión de Ehresmann γ es plana en el dominio de acoplamiento $M^\Pi = M \setminus \{\kappa = 0\}$ de Π .*

Sea (γ, κ) un par (de Poisson) el cual induce el tensor de Poisson $\Pi = -\kappa Q_H$. Debido a que la conexión de Ehresmann γ es plana en el dominio de acoplamiento M^Π la distribución característica de Π está generada por levantamientos horizontales (respecto a γ) de campos vectoriales en la base, esto es, $\mathcal{C}^\Pi = \text{span}\{\text{hor}^\gamma u \mid u \in \Gamma \mathbb{T}B\}$. Respecto a los rangos del tensor de Poisson Π se tiene que

$$\{\text{rank } \Pi = 0\} = \{\kappa = 0\} \quad \text{y} \quad \{\text{rank } \Pi = 2\} = M^\Pi.$$

En lo que sigue, las descomposiciones bigraduadas de campos tensoriales y operadores diferenciales será con respecto a la conexión de Ehresman γ . El corchete de Poisson inducido por Π es dado por

$$\{f, g\} = \kappa \frac{d_{1,0}f \wedge d_{1,0}g}{\Omega^H}.$$

El campo Hamiltoniano $X_h = \mathbf{i}_{dh} \Pi$, asociado a una función $h \in C_M^\infty$, es horizontal con respecto a la conexión γ :

$$X_h = (X_h)_{1,0} = -\kappa \mathbf{i}_{d_{1,0}h} Q_H.$$

De esto se sigue que el espacio $\text{Casim}(M, \Pi)$ de funciones de Casimir de Π consiste de todas las funciones $c \in C_M^\infty$ tales que $\kappa d_{1,0}c = 0$. Con otras palabras, de todas las funciones c que son horizontalmente constantes en el dominio de acoplamiento M^Π .

4.5.3. Caso $(2 + 2)$ -Dimensional

En este apartado se realiza un estudio de los tensores de Poisson de casi acoplamiento en (4.46) para el caso de una variedad cuatro dimensional. Se describen algunas propiedades y objetos geométricos asociados a los tensores de Poisson de casi acoplamiento en términos de los llamados triples de Poisson.

Sea M una variedad diferencial orientable 4-dimensional la cual admite una fibración $\pi : M \rightarrow B$ sobre una 2-variedad B . Supóngase que M está orientada con una forma de volumen descomponible

$$\Omega = \Omega^H \wedge \Omega^V$$

donde $\Omega^H \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}^\circ$ y $\Omega^V \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{H}^\circ$, con \mathbb{H} una distribución horizontal en M . Los campos multivectoriales duales de estas formas diferenciales serán $Q_H \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{H}$ y $Q_V \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}$, esto es, los únicos tales que $i_{Q_H} \Omega^H = 1$ e $i_{Q_V} \Omega^V = 1$.

Bajo las hipótesis anteriores cada terna (γ, κ, b) , donde γ es una conexión de Ehresmann en M y $\kappa, b \in C_M^\infty$, induce el campo bivectorial de casi acoplamiento en M

$$\Pi = -\kappa Q_H - b Q_V.$$

Notemos que, por el Teorema 4.5.4, todo campo bivectorial de casi acoplamiento en M es de esta forma. Para la formulación del siguiente resultado se definen las formas diferenciales

$$\Gamma \mathbb{V}^\circ \ni \theta := i_{Q_V} d_{1,0} \Omega^V,$$

$$\Gamma \mathbb{H}^\circ \ni \nu := i_{Q_H} d_{0,1} \Omega^H,$$

$$\Gamma \mathbb{H}^\circ \ni \rho := i_{Q_H} d_{2,-1} \Omega^V,$$

donde la bigraduación para la diferencial exterior para formas en (2.33) es con respecto a la conexión de Ehresmann γ .

Proposición 4.5.21 *Un campo bivectorial de casi acoplamiento $\Pi = -\kappa Q_H - b Q_V$ en M es un tensor de Poisson si y sólo la terna (γ, κ, b) satisface las ecuaciones*

$$\kappa (d_{1,0} b - b \theta) = 0, \tag{4.74}$$

$$b d_{0,1} \kappa - \kappa (b \nu + \kappa \rho) = 0. \tag{4.75}$$

Este resultado es consecuencia directa del Teorema 4.5.1.

Notemos que las condiciones (4.74) y (4.75) se satisfacen de manera automática si $\kappa \equiv 0$. Esto refleja el hecho que cada campo bivectorial vertical en M es un tensor de Poisson por ser en este caso $\text{rank } \mathbb{V} = 2$. Por otro lado, para el caso $b = 0$, las ecuaciones (4.74) y (4.75) son equivalentes a $\kappa \rho = 0$. Esta última ecuación, por el Corolario 4.5.3, se traduce en pedir que la conexión γ sea plana en el dominio de acoplamiento $M^\Pi = M \setminus \{\kappa = 0\}$.

Sea (γ, κ, b) un triple que satisface las ecuaciones (4.74)-(4.75) y $\Pi = -\kappa Q_H - b Q_V$ el tensor de Poisson asociado. Por (4.25), los valores del rango de Π están determinados por

$$\begin{aligned} \{\text{rank } \Pi = 0\} &= \{\kappa = 0\} \cap \{b = 0\}, \\ \{\text{rank } \Pi = 2\} &= M^\Pi \cap \{b = 0\} \cup \{\kappa = 0\} \cap \{b \neq 0\}, \\ \{\text{rank } \Pi = 4\} &= M^\Pi \cap \{b \neq 0\}. \end{aligned}$$

En consecuencia, la foliación característica inducida por Π consiste de hojas simplécticas de dimensión 0, 2 y 4. En particular, existen dos tipos de hojas simplécticas 2-dimensionales. Si $\kappa(p) = 0$ y $b(p) \neq 0$, entonces la hoja simpléctica S_p por este punto $p \in M$ coincide con la hoja simpléctica del tensor de Poisson vertical (restringido) $\Pi_V|_{M_b} = -b Q_V|_{M_b}$ en la fibra 2-dimensional M_x de π sobre el punto $x = \pi(p)$ en B . Si $\kappa(p) \neq 0$ y $b(p) = 0$, entonces, por el Corolario 4.5.3, en cada punto $q \in S_p$ la curvatura de la conexión de Ehresmann γ es cero y el espacio tangente S_p coincide con el plano \mathbb{H}_q . La correspondiente forma simpléctica es el pullback de la 2-forma Ω^H/κ a la hoja S_p . Notemos que el dominio de acoplamiento M^Π está foliado por hojas simplécticas de dimensión 2 y 4.

En lo que sigue, las descomposiciones bigraduadas de campos tensoriales y operadores diferenciales será con respecto a la conexión de Ehresman γ . El corchete de Poisson inducido por Π es dado por

$$\{f, g\} = \kappa \frac{d_{1,0}f \wedge d_{1,0}g}{\Omega^H} + b \frac{d_{0,1}f \wedge d_{0,1}g}{\Omega^V},$$

donde el término $b(d_{0,1}f \wedge d_{0,1}g)/\Omega^V$ no es más que el corchete de Poisson asociado al tensor de Poisson vertical $\Pi_V = -b Q_V$.

El campo Hamiltoniano $X_h = \mathbf{i}_{dh}\Pi$, asociado a una función $h \in C_M^\infty$, tiene por descomposición bigraduada $X_h = (X_h)_{1,0} + (X_h)_{0,1}$ donde

$$(X_h)_{1,0} = -\kappa \mathbf{i}_{d_{1,0}h} Q_H \quad \text{y} \quad (X_h)_{0,1} = -b \mathbf{i}_{d_{0,1}h} Q_V.$$

Notemos que la componente vertical $(X_h)_{1,0}$ es el campo Hamiltoniano asociado a h y relativo al tensor de Poisson $\Pi_V = -b Q_V$.

Como consecuencia de la descomposición de los campos Hamiltonianos, el espacio Casim(M, Π) de funciones de Casimir de Π consiste de todas las funciones $c \in C_M^\infty$ tales que $\kappa d_{1,0}c = 0$ y $b d_{0,1}c = 0$, donde esta última condición determina el espacio de funciones de Casimir del tensor de Poisson vertical $\Pi_V = -b Q_H$. En particular, si $b \neq 0$ es $\text{Casim}(M, \Pi_V) = \pi^* C_B^\infty$.

4.5.4. Caso (2 + 3)-Dimensional

En este apartado se realiza un estudio de los tensores de Poisson de casi acoplamiento en (4.46) para el caso de una variedad de dimensión cinco. Se describen algunas propiedades y objetos geométricos asociados a los tensores de Poisson de casi acoplamiento en términos de los llamados triples de Poisson.

Sean M una variedad diferencial 5-dimensional orientable y $\pi : M \rightarrow B$ una fibración de ésta sobre una variedad B de dimensión 2. Supóngase que M está orientada con una forma de volumen descomponible

$$\Omega = \Omega^H \wedge \Omega^V$$

donde $\Omega^H \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}^\circ$ y $\Omega^V \in \Gamma \wedge^3 \mathbb{H}^\circ$, con \mathbb{H} una distribución horizontal en M . Los campos multivectoriales duales de estas formas diferenciales serán $Q_H \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{H}$ y $Q_V \in \Gamma \wedge^3 \mathbb{V}$, esto es, los únicos tales que $\mathbf{i}_{Q_H} \Omega^H = 1$ e $\mathbf{i}_{Q_V} \Omega^V = 1$.

Sea (γ, κ, β) una terna que consiste de una conexión de Ehresmann γ en M , una función escalar suave κ en M y una 1-forma vertical $\beta \in \Gamma \mathbb{H}^\circ$. Como en (4.46), esta terna induce el campo bivectorial de casi acoplamiento en M

$$\Pi = -\kappa Q_H - \mathbf{i}_\beta Q_V.$$

Notemos que, por el Teorema 4.5.4, todo campo bivectorial de casi acoplamiento en M es de esta forma. Las formas diferenciales que aparecen en la siguiente proposición se definen por

$$\begin{aligned} \Gamma \mathbb{V}^\circ &\ni \theta := \mathbf{i}_{Q_V} d_{1,0} \Omega^V, \\ \Gamma \mathbb{H}^\circ &\ni \nu := \mathbf{i}_{Q_H} d_{0,1} \Omega^H, \\ \Gamma \wedge^2 \mathbb{H}^\circ &\ni \varrho := \mathbf{i}_{Q_H} d_{2,-1} \Omega^V, \end{aligned}$$

donde la bigraduación para la diferencial exterior para formas en (2.33) es con respecto a la conexión de Ehresmann γ .

Proposición 4.5.22 *Un campo bivectorial de casi acoplamiento $\Pi = -\kappa Q_H - \mathbf{i}_\beta Q_V$ en M es un tensor de Poisson si y sólo la terna (γ, κ, β) satisface las ecuaciones*

$$d_{0,1} \beta \wedge \beta = 0, \tag{4.76}$$

$$\kappa (d_{1,0} \beta - \theta \wedge \beta) = 0, \tag{4.77}$$

$$d_{0,1} \kappa \wedge \beta - \kappa (\nu \wedge \beta + \kappa \varrho) = 0. \tag{4.78}$$

Este resultado es consecuencia directa del Teorema 4.5.1.

Tal como se mencionó anteriormente, la ecuación (4.76) para β representa la identidad de Jacobi para el campo bivectorial vertical $P_\beta = -\mathbf{i}_\beta Q_V$ el cual induce el haz fibrado de Poisson $(M \xrightarrow{\pi} B, P_\beta)$. La correspondiente estructura de Poisson fibrada se obtiene mediante la restricción de P_β a las fibras 3-dimensionales de π . La restricción $\beta|_{\mathbb{V}} \in \Gamma \mathbb{V}^*$ resulta una 1-forma fibrada que satisface la condición $d_{\mathbb{V}} \beta|_{\mathbb{V}} \wedge \beta|_{\mathbb{V}} = 0$ respecto a la diferencial exterior foliada $d_{\mathbb{V}}$ a lo largo de las fibras de π .

Propiedad Conforme. Por dimensión, la ecuación (4.76) es invariante bajo la transformación $\beta \mapsto f\beta$, para cualquier función $f \in C_M^\infty$. Esta propiedad es la versión fibrada de la propiedad de invarianza conforme de la identidad de Jacobi en variedades 3-dimensionales: el producto por una función de un tensor de Poisson es nuevamente un tensor de Poisson [34].

Ahora, sea (γ, κ, β) un triple que satisface las ecuaciones (4.76)-(4.78) y $\Pi = -\kappa Q_H - \mathbf{i}_\beta Q_V$ el tensor de Poisson asociado. Primero, el dominio de acoplamiento de Π resulta en este caso el abierto

$$M^\Pi = M \setminus \{\kappa = 0\}.$$

Por (4.25), los valores del rango de Π están determinados por

$$\begin{aligned} \{\text{rank } \Pi = 0\} &= \{\kappa = 0\} \cap \{\beta = 0\}, \\ \{\text{rank } \Pi = 2\} &= M^\Pi \cap \{\beta = 0\} \cup \{\kappa = 0\} \cap \{\beta \neq 0\}, \\ \{\text{rank } \Pi = 4\} &= M^\Pi \cap \{\beta \neq 0\}. \end{aligned}$$

De esto se sigue que la foliación simpléctica inducida por Π consiste de hojas (simplécticas) de dimensión 0, 2 y 4. En particular, el dominio de acoplamiento M^Π está foliado por hojas simplécticas de dimensión 2 y 4.

Nota 4.5.23. Si $M^\Pi \cap \text{supp } \beta = \emptyset$, entonces $\text{rank } \Pi = 0, 2$; y el tensor de Poisson Π se dice de tipo Flaschka-Ratiu [16]. Esta clase de tensores han sido utilizados en la construcción de estructuras de Poisson con una foliación característica predeterminada [29, 25]. \triangleright

Hojas Simplécticas 2-Dimensionales. Sea S_p la 2-hoja simpléctica por punto $p \in M$. Luego, esta puede ser de dos tipos:

- si $\kappa(p) = 0$ y $\beta_p \neq 0$, entonces S_p coincide con la 2-hoja simpléctica del tensor de Poisson vertical (restringido) $\Pi_V|_{M_b} = -\mathbf{i}_\beta Q_V|_{M_b}$ en la fibra 2-dimensional M_x de π sobre el punto $x = \pi(p)$ en B ;
- si $\kappa(p) \neq 0$ y $\beta_p = 0$, entonces, por el Corolario 4.5.3, en cada punto $q \in S_p$ la curvatura de la conexión de Ehresmann γ es cero y el espacio tangente S_p coincide con el plano \mathbb{H}_q . La correspondiente forma simpléctica es el pullback de la 2-forma Ω^H/κ a la hoja S_p .

Subvariedad de Poisson B. Derivadas de la Proposición 4.6.3, se presentan a continuación condiciones bajo las cuales la variedad base B se puede incluir como subvariedad de Poisson de (M, Π) .

Proposición 4.5.24 *Sea $\Pi = -\kappa Q_H - \mathbf{i}_\beta Q_V$ un tensor de Poisson de casi acoplamiento asociado a un triple (γ, κ, β) en M . Si $s : B \hookrightarrow M$ es una sección diferenciable tal que*

$$\Gamma(s(B)) = \mathbb{H}|_{s(B)} \quad \text{y} \quad s^*\beta = 0,$$

entonces $s(B)$ es una subvariedad de Poisson de (M, Π) y la correspondiente estructura de Poisson es $\Pi|_{s(B)} = -\kappa Q_H|_{s(B)}$.

Nota 4.5.25. Esta Proposición y todo el análisis en esta sección se pueden utilizar para el estudio de las estructuras de Poisson alrededor de subvariedades de Poisson 2-dimensionales, en particular, alrededor de 2-hojas simplécticas. \triangleleft

Objetos Geométricos. En lo siguiente, las descomposiciones bigraduadas de campos tensoriales y operadores diferenciales será con respecto a la conexión de Ehresmann γ .

El *corchete de Poisson* inducido por Π es dado por

$$\{f, g\} = \kappa \frac{d_{1,0}f \wedge d_{1,0}g}{\Omega^H} + \frac{d_{0,1}f \wedge d_{0,1}g \wedge \beta}{\Omega^V},$$

donde el término $(d_{0,1}f \wedge d_{0,1}g \wedge \beta)/\Omega^V$ no es más que el corchete de Poisson asociado al tensor de Poisson vertical $\Pi_V = -\mathbf{i}_\beta Q_V$.

El *campo Hamiltoniano* $X_h = \mathbf{i}_{dh}\Pi$, asociado a una función $h \in C_M^\infty$, tiene por descomposición bigraduada $X_h = (X_h)_{1,0} + (X_h)_{0,1}$ donde

$$(X_h)_{1,0} = -\kappa \mathbf{i}_{d_{1,0}h} Q_H \quad \text{y} \quad (X_h)_{0,1} = -\mathbf{i}_{d_{0,1}h \wedge \beta} Q_V.$$

De esto se sigue que el espacio de funciones de *Casimir* $\text{Casim}(M, \Pi)$ consiste de todas las funciones $c \in C_M^\infty$ tales que $\kappa d_{1,0}c = 0$ y $d_{0,1}c \wedge \beta = 0$. Esta última condición determina el espacio de funciones de Casimir del tensor de Poisson vertical $\Pi_V = -\mathbf{i}_\beta Q_V$.

Criterios de Unimodularidad. En este apartado se presentan criterios que aseguran la unimodularidad local y global de un tensor de Poisson de casi acoplamiento en una variedad 5-dimensional M fibrada sobre una 2-variedad simpléctica. Estos resultados son consecuencia directa de los Teoremas 4.5.11 y 4.5.13.

Sea $\pi : M \rightarrow B$ un haz fibrado tal que

- (M, Ω) es una 5-variedad orientada con forma de volumen Ω ,
- (B, ω) es una 2-variedad simpléctica.

En lo que resta $\psi \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{T}B$ denotará el tensor de Poisson no degenerado asociado a ω .

Fijada una conexión de Ehresmann γ en M , bajo las hipótesis anteriores, se tiene de manera automática que Ω es una forma de volumen descomponible como en (4.43),

$$\Omega = \pi^* \omega \wedge \Omega^V, \tag{4.79}$$

donde $\Omega^V \in \Gamma \wedge^3 \mathbb{H}^\circ$ está definida por $\Omega^V := \mathbf{i}_{\text{hor}^\gamma \psi} \Omega$.

Así, dado un triple de Poisson (γ, κ, β) como en la Proposición 4.5.22, el tensor de Poisson de casi acoplamiento asociado es

$$\Pi = -\kappa \text{hor}^\gamma \psi - \mathbf{i}_\beta Q_V,$$

donde $Q_V \in \Gamma \wedge^3 \mathbb{V}$ es el campo multivectorial dual de Ω^V , esto es, el único que satisface la condición $\mathbf{i}_{Q_V} \Omega^V = 1$.

En este caso, por ser $d_{0,1} \pi^* \omega = 0$, el campo modular de Π relativo a la forma de volumen Ω en (4.79) tiene por descomposición bigraduada $Z = Z_{1,0} + Z_{0,1}$, respecto a la conexión de Ehresmann γ , con

$$Z_{1,0} = \mathbf{i}_{\kappa\theta + d_{1,0}\kappa} \text{hor}^\gamma \psi \quad \text{y} \quad Z_{0,1} = \mathbf{i}_{\kappa\varrho + d_{0,1}\beta} Q_V,$$

donde la 1-forma horizontal θ está definida por (4.48), la 2-forma vertical ϱ por (4.50) y donde la bigraduación para la diferencial exterior para formas en (2.33) es con respecto a la conexión de Ehresmann γ .

La hipótesis principal para los siguientes resultados es que la 1-forma vertical β es cerrada a lo largo de las fibras de π ,

$$d_{0,1}\beta = 0. \tag{4.80}$$

Proposición 4.5.26 *Sea $\Pi = -\kappa \text{hor}^\gamma \psi - \mathbf{i}_\beta Q_V$ un tensor de Poisson de casi acoplamiento en M , bajo la hipótesis (4.80), se cumple que:*

- (i) *en el dominio de acoplamiento (4.15) $M^\Pi = M \setminus \{\kappa = 0\}$, el tensor de Poisson Π es unimodular si y sólo si la 1-forma horizontal θ (4.48) es $d_{1,0}$ -exacta, esto es,*

$$\theta = -d_{1,0}h, \tag{4.81}$$

para alguna función de Casimir $h \in \text{Casim}(M^\Pi, -\mathbf{i}_\beta Q_V)$. En este caso, la forma de volumen en M^Π dada por

$$\Omega_1^{\text{inv}} := \frac{e^h}{\kappa} \pi^* \omega \wedge \Omega^V,$$

es invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano relativo a Π ;

- (ii) *en el abierto $\text{Int}(M \setminus M^\Pi)$ de M , el tensor de Poisson $\Pi = -\mathbf{i}_\beta Q_V$ es unimodular y una forma de volumen invariante es*

$$\Omega_2^{\text{inv}} := \pi^* \omega \wedge \Omega^V.$$

Este criterio de unimodularidad local es una realización y una consecuencia directa del Teorema 4.5.11. Naturalmente, se presenta enseguida una versión global derivada del Teorema 4.5.13.

Proposición 4.5.27 *Bajo la hipótesis (4.80), un tensor de Poisson de casi acoplamiento $\Pi = -\kappa \text{hor}^\gamma \psi - \mathbf{i}_\beta Q_V$ es unimodular en (todo) M si y sólo si*

- (i) *la condición (4.81) se cumple para alguna $h \in \text{Casim}(M^\Pi, \Pi_V)$, donde $\Pi_V = -\mathbf{i}_\beta Q_V$;*
- (ii) *existe un función escalar $K \neq 0$ en todo M cuya restricción al abierto $\text{Int}(M \setminus M^\Pi)$ es una función de Casimir del tensor de Poisson vertical Π_V y tal que*

$$\kappa|_{M^\Pi} = e^h K|_{M^\Pi}. \tag{4.82}$$

Aún más, la forma de volumen $\Omega^{\text{inv}} = \frac{1}{K} \pi^* \omega \wedge \Omega^V$ es invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano en (M, Π) .

Como se mencionó posteriormente al Teorema 4.5.13, la condición (4.82) es equivalente a

$$(4.82) \quad \iff \quad \kappa|_{M^\Pi} = e^h \kappa_0 K|_{M^\Pi}, \quad \kappa_0 \in \text{Casim}(M^\Pi, \Pi);$$

debiéndose esto a la libertad que existe para fijar una antiderivada h en (4.81) de la 1-forma θ . Es claro que esta libertad es una función de Casimir κ_0 en M^Π del tensor de Poisson $\Pi|_{M^\Pi}$.

Transformaciones Gauge. A continuación se presenta una familia de transformaciones gauge para tensores de Poisson que preservan la propiedad de casi acoplamiento. Evidentemente, esta familia de transformaciones es dada en términos de los llamados triples de Poisson y se derivan del Teorema 4.3.2.

Sea (γ, κ, β) un triple como en la Proposición 4.5.22 con tensor de Poisson de casi acoplamiento asociado $\Pi = -\kappa Q_H - \mathbf{i}_\beta Q_V$. Adicionalmente, sea (μ, c) un par que consiste de

- $\mu \in \Gamma \mathbb{V}^\circ$ una 1-forma vertical,
- $c \in C_M^\infty$ una función de Casimir del tensor de Poisson vertical $\Pi_V = -\mathbf{i}_\beta Q_V$.

Para cada par (μ, c) considérese la transformación

$$\mathcal{T}_{\mu, c} : (\gamma, \kappa, \beta) \longmapsto (\tilde{\gamma}, \tilde{\kappa}, \tilde{\beta}) \quad (4.83)$$

definida por

$$\tilde{\gamma}(X) = \gamma(X) + \mathbf{i}_{d_{0,1}^\gamma \mu \wedge \beta}(Q_V \wedge X), \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{1 - \kappa(\varkappa_\mu - c)}, \quad \tilde{\beta} = \beta, \quad (4.84)$$

para cualquier $X \in \Gamma \text{TM}$.

En lo anterior, $\varkappa_\mu \equiv \varkappa_\mu(\gamma, \beta) := (d_{1,0}\mu + \frac{1}{2}\{\mu \wedge \mu\}_\beta) / \Omega^H \in C_M^\infty$, con

$$\{\mu \wedge \mu\}_\beta(X_1, X_2) := \{\mu(X_1), \mu(X_2)\}_\beta - \{\mu(X_2), \mu(X_1)\}_\beta, \quad \forall X_1, X_2 \in \Gamma \text{TM}$$

Aquí $\{\cdot, \cdot\}_\beta$ denota el corchete de Poisson inducido por el tensor de Poisson vertical $\Pi_V = -\mathbf{i}_\beta Q_V$. Notemos que por construcción $\{\mu \wedge \mu\}_\beta \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}^\circ$.

Proposición 4.5.28 *Las transformaciones (4.83)-(4.84) preservan las soluciones de las ecuaciones (4.76)-(4.78), es decir, $(\tilde{\gamma}, \tilde{\kappa}, \tilde{\beta})$ es nuevamente un triple de Poisson*

Demostración. Sean (γ, κ, β) un triple de Poisson (fijo) y $(\tilde{\gamma}, \tilde{\kappa}, \tilde{\beta})$ una terna arbitraria. Primero, las conexiones de Ehresmann γ y $\tilde{\gamma}$ están relacionadas por una 1-forma $\Xi \in \Omega^1(M; \mathbb{V})$ que satisface la condición (2.8). Ahora, si se defina la 1-forma vertical $\tilde{\beta} \in \Gamma \mathbb{H}^\circ$ por

$$\tilde{\beta} := \beta - \Xi^* \beta, \quad (4.85)$$

entonces $\tilde{\beta}$ satisface la condición $\tilde{\beta}|_{\mathbb{V}} = \beta|_{\mathbb{V}}$ y la ecuación $d_{0,1}^{\tilde{\gamma}}\tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} = 0$. Ahora, asumiendo que

$$\Xi = -P_{\beta}^{\natural} \circ (d_{0,1}\mu)^{\flat}, \quad (4.86)$$

para alguna 1-forma horizontal $\mu \in \Gamma\mathbb{V}^{\circ}$, la condición (2.8) se satisface y se sigue que γ y $\tilde{\gamma}$ se relacionan por (4.84). Aún más, se sigue de (4.86) que $\Xi^*\beta = 0$ y en consecuencia, por (4.85), la última condición en (4.84) se cumple. Otra consecuencia de (4.86) es que $\tilde{\gamma}$ es una conexión de Poisson para P_{β} . Esto es equivalente a que la condición (4.77) se satisfaga para la terna en (4.84). Finalmente, el hecho que la terna $(\tilde{\gamma}, \tilde{\kappa}, \tilde{\beta})$ satisface (4.78) se sigue de la regla de transición en (2.22) para la curvatura de γ y la relación $\mathbf{i}_{\text{Curv}^{\gamma}(u_1, u_2)}\Omega^{\mathbb{V}} = -\Omega^{\mathbb{H}}(\text{hor}^{\gamma} u_1, \text{hor}^{\gamma} u_2) \varrho$, para cualesquiera $u_1, u_2 \in \Gamma \text{T}B$. \square

A continuación se muestra que la familia de transformaciones (4.83) para triples (de Poisson) inducen transformaciones gauge entre las correspondientes estructuras de Poisson de casi acoplamiento.

Sean $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ y $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}_H + \tilde{\Pi}_V$ dos tensores de Poisson de casi acoplamiento asociados a los triples (γ, κ, β) y $(\tilde{\gamma}, \tilde{\kappa}, \tilde{\beta})$ respectivamente. Supóngase que estos triples están relacionados por una transformación de la forma (4.83) para algún par (μ, c) . Entonces, $\Pi_V = \tilde{\Pi}_V = -\mathbf{i}_{\beta}Q_V$, pues $\beta = \tilde{\beta}$. Por tanto la transformación $\Pi \mapsto \tilde{\Pi}$ modifica solamente la componente horizontal de Π por $\Pi_H \mapsto \tilde{\Pi}_H = -\tilde{\kappa}Q_H$. Se sigue de aquí y de la segunda relación en (4.84) que el dominio de definición del tensor de Poisson transformado $\tilde{\Pi}$ es el abierto en M dado por

$$\text{Dom}(\tilde{\Pi}) := \{p \in M \mid 1 - \kappa(p)(\varkappa_{\mu}(p) - c(p)) \neq 0\}.$$

Aún más, es claro que $\{\tilde{\kappa} = 0\} = \{\kappa = 0\}$. Tomando en cuenta la regla de transición para los levantamientos horizontales, $\text{hor}^{\tilde{\gamma}}u = \text{hor}^{\gamma}u + \Pi_V^{\natural}(d\langle \mu, u \rangle)$, se concluye que las distribuciones características de Π y $\tilde{\Pi}$ coinciden, es decir, $\mathcal{C}^{\Pi} = \mathcal{C}^{\tilde{\Pi}}$. Ahora, sean (\mathcal{S}, ω) y $(\mathcal{S}, \tilde{\omega})$ las foliaciones simplécticas en el abierto $\text{Dom}(\tilde{\Pi})$ con formas foliadas (simplécticas) ω y $\tilde{\omega}$ inducidas por Π y $\tilde{\Pi}$ respectivamente. Entonces, se puede probar que la diferencia entre $\tilde{\omega}$ and ω es el pullback a la foliación \mathcal{S} de la 2-forma global $\lambda := -d\mu + c\Omega^{\mathbb{H}}$ en M . En otras palabras, para cada hoja $\iota_S : S \hookrightarrow E$ de \mathcal{S} , se tiene que $\tilde{\omega}_S - \omega_S = \iota_S^*\lambda$. Por lo tanto, $\tilde{\Pi}$ es el resultado de una transformación gauge del tensor de Poisson Π vía la 2-forma λ , la cual es cerrada a lo largo de las hojas de \mathcal{S} . Cabe mencionar que la cerradura (global) de λ es equivalente a la condición $c \in \pi^*C_B^{\infty}$. Notemos que el complemento $M \setminus \text{Dom}(\tilde{\Pi})$ consiste de todos los puntos $p \in M$ en los cuales la 2-forma $\iota_{S_p}^*\lambda + \omega_{S_p}$ se torna degenerada, donde S_p es la hoja simpléctica por un punto p . O de manera equivalente, la condición $1 - \kappa(\varkappa_{\mu} - c) \neq 0$ no es más que la condición (puntual) de no degeneración (4.33)..

Deformaciones Infinitesimales. Tomando como herramienta la familia de transformaciones gauge (4.83) se presenta una familia de deformaciones infinitesimales de un tensor de Poisson de casi acoplamiento dado.

Sea (γ, κ, β) un triple de Poisson. Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, se tiene de manera trivial que la transformación

$$m_\varepsilon : (\gamma, \kappa, \beta) \mapsto (\gamma, \varepsilon\kappa, \varepsilon\beta) \quad (4.87)$$

preserva el conjunto de triples de Poisson. Es claro que $\Pi \mapsto \tilde{\Pi} = \varepsilon\Pi$ es la transformación de los correspondientes tensores de Poisson de casi acoplamiento. Como en el apartado anterior, sea $\mathcal{T}_{\mu,c}$ la transformación (4.83) inducida por un par (μ, c) que consiste de una 1-forma vertical $\mu \in \Gamma V^\circ$ y una función de Casimir $c \in C_M^\infty$ del tensor de Poisson vertical $\Pi_V = -\mathbf{i}_\beta Q_V$.

Proposición 4.5.29 *Dado un par (μ, c) y un tensor de Poisson de casi acoplamiento $\Pi = -\kappa Q_H - \mathbf{i}_\beta Q_V$ asociado a un triple (γ, κ, β) en M , la transformación*

$$m_{1/\varepsilon} \circ \mathcal{T}_{\mu,c} \circ m_\varepsilon \quad (4.88)$$

induce la familia ε -dependiente (suave) $\{\Pi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ de tensores de Poisson de casi acoplamiento

$$\Pi_\varepsilon = \frac{\kappa}{1 - \varepsilon\kappa(\varkappa_{\mu,\varepsilon} - c)} Q_H^{\gamma_\varepsilon} - \mathbf{i}_\beta Q_V, \quad (4.89)$$

donde $\gamma_\varepsilon(X) := \gamma(X) + \varepsilon \mathbf{i}_{d_{0,1}\mu \wedge \beta}(Q_V \wedge X)$, $Q_H^{\gamma_\varepsilon} \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{H}^{\gamma_\varepsilon}$ y

$$\varkappa_{\mu,\varepsilon} := \frac{d_{1,0}^\gamma \mu + \frac{\varepsilon}{2} \{\mu \wedge \mu\}_\beta}{\Omega^H},$$

con $X \in \Gamma TM$.

Demostración. Por la Proposición 4.5.28, la imágen bajo la transformación (4.83) de un triple de Poisson (γ, κ, β) es nuevamente un triple de Poisson. Luego, la composición (4.88) con la simetría (4.87) da lugar a un nuevo triple de Poisson $(\tilde{\gamma} = \gamma_\varepsilon, \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{1 - \varepsilon\kappa(\varkappa_{\mu,\varepsilon} - c)}, \tilde{\beta} = \beta)$ el cual induce la familia de tensores de Poisson de casi acoplamiento (4.89) \square

Topológicamente, por construcción, la foliación simpléctica de la familia de tensores de Poisson de casi acoplamiento (4.89) es la misma para todo $\varepsilon \neq 0$ y coinciden con la inducida por el tensor de Poisson Π . Las correspondientes formas simplécticas son dadas por $\omega_S + \iota_S^* \lambda^\varepsilon$, donde ω_S es la forma simpléctica de Π en una hoja S de la foliación y λ^ε es la 2-forma global $\lambda^\varepsilon = \varepsilon(-d\mu + c\Omega^H)$.

Ahora, como consecuencia de la Proposición 4.5.29 se presenta el siguiente corolario. Ver por ejemplo [2].

Corolario 4.5.30 *Si U es un subconjunto abierto de M con cerradura compacta, entonces existe $\delta > 0$ tal que para el tensor de Poisson de casi acoplamiento Π_ε (4.89) se tiene que $U \subseteq \text{Dom}(\Pi_\varepsilon)$, para todo $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$.*

En particular, si M is *compacto*, entonces para ε suficientemente pequeño, el tensor de Poisson Π_ε está bien definido en toda la variedad M y puede considerarse como una deformación del tensor de Poisson inicial, $\Pi = \Pi_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$. Aún más, usando el método de homotopía de Moser, si $c = 0$, entonces los tensores de Poisson Π y Π_ε son isomorfos.

Difeomorfismos que Preservan Fibras. Como se mencionó anteriormente, los difeomorfismos que preservan las fibras de $\pi : M \rightarrow B$ respetan la propiedad de casi acoplamiento. En consecuencia, existe una acción natural de difeomorfismos $g : M \rightarrow M$ que preservan las fibras de π en el conjunto de triples de Poisson dado por $g^*(\gamma, \kappa, \beta) := (g^*\gamma, g^*\kappa, g^*\beta)$. Por tanto, el pullback $g^*\Pi$ de un tensor de Poisson de casi acoplamiento Π asociado a un triple (γ, κ, β) es nuevamente un tensor de casi acoplamiento en M cuyo triple asociado es $g^*(\gamma, \kappa, \beta)$.

4.5.5. Haces triviales. Enfoque Coordinado

En este apartado, para un estudio coordinado de los tensores de Poisson de casi acoplamiento, se considera el caso de una variedad fibrada trivial de dimensión cinco la cual es producto de una 2-variedad simpléctica y una 3-variedad de Poisson orientable. Las fórmulas que aquí se presentan se obtiene por cálculo directo.

La variedad fibrada a considerar en este apartado será el producto $M = B \times N$ de

- (B, ω) una variedad simpléctica 2-dimensional,
- $(N, P_{\text{fib}}, \Omega^{\text{fib}})$ una variedad de Poisson orientada 3-dimensional equipada con un tensor de Poisson P_{fib} y una forma de volumen Ω^{fib} .

Si se denota por $\text{pr}_1 : M \rightarrow B$ la proyección canónica sobre el primer factor, entonces se tiene un *haz fibrado trivial*

$$\pi := \text{pr}_1 : M \longrightarrow B, \tag{4.90}$$

sobre la variedad B y con fibra típica N . Notemos que este haz fibrado resulta *orientable* debido a que el par $(\omega, \Omega^{\text{fib}})$ induce una forma de volumen descomponible (4.79) en el espacio total M dada por

$$\Omega = \pi^*\omega \wedge \text{pr}_2^*\Omega^{\text{fib}},$$

donde $\text{pr}_2 : M \rightarrow N$ denota la proyección canónica sobre el segundo factor.

Coordenadas. Para el cálculo coordinado a realizar se fijarán sistemas de coordenadas locales $x = (x^1, x^2)$ en B e $y = (y^1, y^2, y^3)$ en N adaptadas a π y tales que

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \quad \text{y} \quad \Omega^{\text{fib}} = dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3.$$

Sea $\gamma = (\gamma_i^a dx^i + dy^a) \otimes \frac{\partial}{\partial y^a}$ (2.5) una conexión de Ehresmann en M , con $i = 1, 2$ y $a = 1, 2, 3$. Por (2.16), la distribución horizontal $\mathbb{H} \subset \mathbb{T}M$ asociada a γ es generada por los levantamientos horizontales $\text{hor}_i^\gamma = \frac{\partial}{\partial x^i} - \gamma_i^a \frac{\partial}{\partial y^a}$ (2.15), respecto a γ , de los campos básicos $\partial/\partial x^i$ en B .

Forma de Volumen Descomponible. Por (4.79), se sigue que existe una única 3-forma vertical $\Omega^V \in \Gamma \wedge^3 \mathbb{H}^0$ tal que

$$\Omega = \pi^*\omega \wedge \Omega^V.$$

En coordenadas, $\pi^*\omega = dx^1 \wedge dx^2$ y $\Omega^V = \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3$, donde las 1-formas verticales $\eta^a = \gamma_i^a dx^i + dy^a$ (2.18) generan la distribución $\mathbb{H}^\circ \subset T^*M$ anulador de \mathbb{H} .

Triples de Poisson. Sea (γ, κ, β) una terna que consiste de una conexión de Ehresmann γ , una función escalar suave κ y una 1-forma vertical $\beta = \beta_a \eta^a$ en M definida por

$$\beta := \text{pr}_2^* \beta^{\text{fib}},$$

donde $\beta^{\text{fib}} = \beta_a dy^a$ es una 1-forma diferencial en N . Luego, por (4.46), esta terna induce el campo bivectorial de casi acoplamiento en M

$$\Pi = \kappa \text{hor}_1^\gamma \wedge \text{hor}_2^\gamma + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \beta_a \frac{\partial}{\partial y^b} \wedge \frac{\partial}{\partial y^c}, \quad a, b, c = 1, 2, 3. \quad (4.91)$$

donde ϵ_{abc} denota el símbolo de Levi-Civita 3-dimensional. Notemos que por el Teorema 4.5.4 todo campo bivectorial de casi acoplamiento en M es de esta forma.

Proposición 4.5.31 *El campo bivectorial de casi acoplamiento Π en (4.91) es un tensor de Poisson en M si y sólo si la terna (γ, κ, β) satisface las siguientes ecuaciones*

$$\mathfrak{S}_{(a,b,c)} \left(\frac{\partial \beta_a}{\partial y^b} - \frac{\partial \beta_b}{\partial y^a} \right) \beta_c = 0, \quad (4.92)$$

$$\kappa \left(\frac{\partial \beta_a}{\partial x^i} - \gamma_i^b \frac{\partial \beta_a}{\partial y^b} - \beta_b \frac{\partial \gamma_i^b}{\partial y^a} + \beta_a \frac{\partial \gamma_i^b}{\partial y^b} \right) = 0, \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial y^a} \beta_b - \frac{\partial \kappa}{\partial y^b} \beta_a + \epsilon_{abc} \kappa^2 \varrho^c = 0, \quad (4.94)$$

donde $\varrho^a = \frac{\partial \gamma_1^a}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_2^a}{\partial x^1} + \gamma_1^b \frac{\partial \gamma_2^a}{\partial y^b} - \gamma_2^b \frac{\partial \gamma_1^a}{\partial y^b}$ y el símbolo \mathfrak{S} denota la suma cíclica de los índices escritos debajo.

Por la Definición 4.5.2, una terna (γ, κ, β) que satisface las ecuaciones (4.92)-(4.94) se llama *triple de Poisson*. La ecuación (4.92) representa la identidad de Jacobi para el campo bivectorial vertical (global)

$$P_\beta = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \beta_a \frac{\partial}{\partial y^b} \wedge \frac{\partial}{\partial y^c}, \quad (4.95)$$

el cual induce el haz fibrado de Poisson $(M \xrightarrow{\pi} B, P_\beta)$. La correspondiente estructura de Poisson fibrada coincide con P_{fib} , el cual se puede pensar (localmente) como un tensor de Poisson x -parametrizado en N .

En lo que resta se asumirá que (γ, κ, β) es tal que satisfacen las ecuaciones (4.92)-(4.94), es decir, que es un triple de Poisson.

Rangos. Localmente, la distribución característica del tensor de Poisson Π en (4.91) es generada por

$$\mathcal{C}^\Pi = \text{span} \left\{ \kappa \text{hor}_i \right\} \oplus \text{span} \left\{ \epsilon_{abc} \beta_a \frac{\partial}{\partial y^b} \right\},$$

donde ϵ_{abc} denota el símbolo de Levi-Civita 3-dimensional. Luego, la matriz asociada a Π es dada por

$$\Pi \simeq \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \beta_3 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_3 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \beta_2 & -\beta_1 & 0 \end{array} \right)$$

En consecuencia, los rangos de este tensor de Poisson están caracterizados por

$$\begin{aligned} \{\text{rank } \Pi = 0\} &= \{\kappa = 0\} \cap \{\beta_a = 0, \text{ para toda } a\}, \\ \{\text{rank } \Pi = 2\} &= \{\kappa = 0\} \cap \{\beta_a \neq 0, \text{ para alguna } a\}, \\ \{\text{rank } \Pi = 4\} &= \{\kappa \neq 0\} \cap \{\beta_a \neq 0, \text{ para toda } a\}, \end{aligned}$$

con $a = 1, 2, 3$.

Corchetes de Poisson. Dadas dos funciones $f, g \in C_M^\infty$, el corchete de Poisson de estas funciones inducido por Π (4.91) es

$$\{f, g\} = \mathcal{L}_{\text{hor}_1} f \mathcal{L}_{\text{hor}_2} g - \mathcal{L}_{\text{hor}_2} f \mathcal{L}_{\text{hor}_1} g + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \beta_a \frac{\partial f}{\partial y^b} \frac{\partial g}{\partial y^c},$$

donde el término $\frac{1}{2} \epsilon_{abc} \beta_a \frac{\partial f}{\partial y^b} \frac{\partial g}{\partial y^c}$ es el corchete inducido por el tensor de Poisson (vertical) P_β (4.95), con ϵ_{abc} el símbolo de Levi-Civita 3-dimensional.

Campos Hamiltonianos. Dada una función $h \in C_M^\infty$, el campo Hamiltoniano $X_h = \mathbf{i}_{dh} \Pi$ asociado a esta función tiene por descomposición bigraduada $X_h = (X_h)_{1,0} + (X_h)_{0,1}$, respecto a la conexión de Ehresmann γ , donde

$$(X_h)_{1,0} = -\kappa (\mathcal{L}_{\text{hor}_2} h \text{ hor}_1 - \mathcal{L}_{\text{hor}_1} h \text{ hor}_2) \quad \text{y} \quad (X_h)_{0,1} = -\epsilon_{abc} \beta_a \frac{\partial h}{\partial y^b} \frac{\partial}{\partial y^c}.$$

A continuación, se construye de manera explícita la familia de tensores de Poisson de casi acoplamiento en (4.89). Para esto, sean

- $\kappa_0, c \in C_M^\infty$ Casimires fibrados de P_β , es decir, $\kappa_0, c|_{\{x\} \times N} \in \text{Casim}(N, P_{\text{fib}})$, $x \in B$;
- $\mu = \mu_i dx^i$ una 1-forma horizontal en M .

Deformaciones Infinitesimales. Si $\gamma = dy^a \otimes \frac{\partial}{\partial y^a}$ es la conexión de Ehresmann plana en M asociada a la distribución horizontal canónica $\mathbb{H}_{(x,y)} = \mathbb{T}_x B \oplus \{0\}$, entonces es claro que $(\gamma, \kappa_0, \beta)$ es un triple de Poisson en M . Luego, por la Proposición 4.5.29, la terna

$$(\gamma_\varepsilon, \kappa_\varepsilon, \beta)$$

define un triple de Poisson en M , donde

$$(\gamma_\varepsilon)_i^a = \varepsilon \epsilon^{abc} \frac{\partial \mu_i}{\partial y^b} \beta_c, \quad \kappa_\varepsilon = \frac{\kappa_0}{1 - \varepsilon \kappa_0 (\mathcal{L}_\mu - c)}, \quad \beta = \beta_a(y) \eta^a, \quad (4.96)$$

con $\text{hor}_i^{\gamma^\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \varepsilon \epsilon^{abc} \frac{\partial \mu_i}{\partial y^a} \beta_b \frac{\partial}{\partial y^c}$ y $\varkappa_{\mu,\varepsilon} = \frac{\partial \mu_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \mu_1}{\partial x^2} - \varepsilon \epsilon^{abc} \frac{\partial \mu_1}{\partial y^a} \beta_b \frac{\partial \mu_2}{\partial y^c}$.

En conclusión, los datos iniciales $(\kappa_0, c, \mu, \beta^{\text{fib}})$ inducen la familia de tensores de Poisson en M ε -dependientes dado por

$$\Pi_\varepsilon = \frac{\kappa_0}{1 - \varepsilon \kappa_0 (\varkappa_\mu - c)} \text{hor}_1^{\gamma^\varepsilon} \wedge \text{hor}_2^{\gamma^\varepsilon} + \epsilon^{abc} \beta_a(y) \frac{\partial}{\partial y^b} \wedge \frac{\partial}{\partial y^c}. \quad (4.97)$$

Subvariedades de Poisson. Supóngase que existe un punto $y_0 \in N$ que es un cero del tensor de Poisson fibrado P_{fib} , esto es, tal que $\beta_b(y_0) = 0$, $b = 1, 2, 3$. Supóngase además que $\mu_1(x, y_0) = \mu_2(x, y_0) = 0$ y $c(x, y_0) = 0$, para todo $x \in B$. Entonces, para cada ε fijo, el tensor de Poisson Π_ε en (4.97) está bien definido en un entorno U_ε de la sección $B \times \{y_0\}$. Luego, esta sección resulta una subvariedad de Poisson 2-dimensional de la variedad de Poisson $(U_\varepsilon, \Pi_\varepsilon)$ equipada con la estructura de Poisson $\Psi = \kappa_0(x, y_0) \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2}$, ver la Proposición 4.6.3.

Unimodularidad. A continuación se aplicará el criterio de unimodularidad dado en el Teorema 4.5.11 para la familia (4.97) de tensores de Poisson de casi acoplamiento. Para esto se asumirá que la 1-forma β^{fib} es cerrada, es decir, se cumple que $\frac{\partial \beta_a}{\partial y^b} = \frac{\partial \beta_b}{\partial y^a}$. Lo cual implica la unimodularidad de P_{fib} . A su vez, esto asegura la unimodularidad de la familia de tensores de Poisson Π_ε en (4.97) en el abierto $\text{Int } \mathcal{Z}(\kappa)$. Aún más, esta condición para β^{fib} asegura la unimodularidad de esta familia en el dominio de acoplamiento $M^\Pi = M \setminus \mathcal{Z}(\kappa)$. En efecto, por construcción, la 1-forma horizontal $\theta = \theta_i dx^i$ resulta trivial en este caso:

$$\theta_i = -\frac{\partial(\gamma_\varepsilon)_i^a}{\partial y^a} = \varepsilon \frac{\partial^2 \mu_i}{\partial y^a \partial y^b} P_{\text{fib}}^{ba} + \varepsilon \frac{\partial \mu_i}{\partial y^b} \frac{\partial P_{\text{fib}}^{ba}}{\partial y^a}.$$

Ahora, el primer término en la parte derecha de la última igualdad es cero. El segundo término también lo es debido a la condición de cerradura $\frac{\partial P_{\text{fib}}^{bc}}{\partial y^c} = \epsilon^{abc} \frac{\partial \beta_a}{\partial y^c} = 0$. En consecuencia, $\theta \equiv 0$. Luego, se cumple la condición (4.82) para $h \equiv 0$. Aún más, Π_ε satisface el inciso (ii) del Teorema 4.5.11 y la correspondiente forma de volumen invariante es dada por (4.68).

Con el siguiente ejemplo, además de dar una realización del Teorema 4.5.13, se presenta una respuesta a la pregunta de cuándo un abierto en una variedad diferencial es el dominio de acoplamiento de un tensor de Poisson.

Ejemplo 4.5.32 Sea $M = B \times \mathbb{R}_y^3 \xrightarrow{\pi} B$, con (B, ω) una superficie simpléctica compacta. Considere \mathbb{R}_y^3 equipado con el corchete cíclico de Lie-Poisson asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{so}^*(3)$, esto es, con el tensor de Poisson

$$P_{\beta^{\text{fib}}} = y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} \wedge \frac{\partial}{\partial y_3} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} \wedge \frac{\partial}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_2},$$

inducido por la 1-forma diferencial $\beta^{\text{fib}} = y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + y_3 dy_3$. Sea

$$\kappa_0(y) = \chi(\|y\|^2),$$

donde $\chi \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}$ es una función meseta con $\text{supp}\chi = [0, 1]$. Entonces, para arbitrarias c, μ y un ε suficientemente pequeño, (4.97) determina un tensor de Poisson de casi acoplamiento global bien definido en todo M con dominio de acoplamiento

$$M^{\Pi_{\varepsilon}} = B \times \{\|y\| < 1\}.$$

Notemos que en este caso M es una variedad fibrada orientada con forma de volumen descomponible $\pi^*\omega \wedge \text{pr}_2^*\Omega^{\text{fib}}$, siendo en este caso Ω^{fib} la forma de volumen euclídea en \mathbb{R}_y^3 . En este caso, todas las hipótesis del Teorema 4.5.13 se cumplen y la condición (4.82) se satisface para $h = 0$ y $K = (1 - \varepsilon \kappa_0(\mathcal{X}_{\mu} - c))^{-1}$. Por lo tanto, Π_{ε} es unimodular en todo M y la correspondiente forma de volumen global es dada por

$$\Omega_{\varepsilon}^{\text{inv}} = (1 - \varepsilon \kappa_0(\mathcal{X}_{\mu} - c)) \pi^*\omega \wedge \text{pr}_2^*\Omega^{\text{fib}}.$$

◁

4.6. Subvariedades de Poisson y Equivalencia

El problema a tratar en esta sección es el de la equivalencia entre tensores de Poisson en una (misma) variedad diferencial. Nuestro objetivo es dar una respuesta a este problema a nivel semilocal, concretamente, alrededor de subvariedades de Poisson. Una aproximación a este objetivo es el Teorema 4.6.4 el cual asegura la equivalencia (semilocal) entre dos tensores de Poisson que comparten una hoja simpléctica en común.

Dados dos tensores de Poisson Π y Π' en M , el problema a estudiar se refiere a la relación binaria de equivalencia

$$\phi^*\Pi' = \Pi, \quad \phi \in \text{Diff}(M). \tag{4.98}$$

Una herramienta para resolver este problema, al menos localmente, es el método de homotopía de Moser el cual se explicará en líneas posteriores. Primero algunos hechos básicos respecto a subvariedades de Poisson.

En esta sección M será una variedad diferencial arbitraria, no necesariamente fibrada, salvo que se especifique lo contrario.

Subvariedades de Poisson. Una subvariedad inmersa $N \subset M$ se dice ser una *subvariedad de Poisson* de (M, Π) si

$$\Pi^{\sharp}(\mathbb{T}_N^*M) \subseteq \mathbb{T}N. \tag{4.99}$$

Notemos que esta condición asegura que Π sea tangente a la subvariedad N . En consecuencia, existe una *única* estructura de Poisson en N tal que la inclusión $N \hookrightarrow M$ es un morfismo de Poisson. En particular, se tiene que la subvariedad N hereda una foliación simpléctica. La condición (4.99) es una condición puntual, por tanto, las subvariedades de Poisson pueden ser de diversa naturaleza, no necesariamente abiertas. Claramente las hojas de la foliación simpléctica inducida por Π son subvariedades de Poisson de M . También, cada subconjunto *abierto* de M es una subvariedad de Poisson.

Ejemplo 4.6.1 Las *fibras* de una variedad de Poisson fibrada dotada con un tensor de Poisson de *casi acoplamiento* Π son subvariedades de Poisson. En este caso el tensor de Poisson en cada fibra es la restricción a ella de la componente vertical de Π . \triangleleft

Ejemplo 4.6.2 El ecuador $\{h = 0\}$ de la esfera \mathbb{S}^2 dotado con el tensor de Poisson cero es una subvariedad de Poisson de (\mathbb{S}^2, Π) , donde $\Pi = h \partial_h \wedge \partial_\theta$, con h la función de altura y θ la coordenada angular en la 2-esfera. \triangleleft

Caso de Casi Acoplamiento. A continuación se presenta un criterio para que una subvariedad en una variedad fibrada obtenida como imagen de una sección suave sea una subvariedad de Poisson.

Proposición 4.6.3 Sean $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$ un tensor de Poisson de casi acoplamiento en una variedad fibrada M . Si $s : B \rightarrow M$ es una sección suave de π , entonces la imagen de esta sección $s(B) \subset M$ es una subvariedad de Poisson de (M, Π) si y sólo si

$$\Pi_H^\natural(\mathbb{V}^\circ|_{s(B)}) \subseteq \mathbb{T}(s(B)), \quad (4.100)$$

$$\Pi_V^\natural|_{s(B)} = 0.$$

Demostración. Sean Π un tensor de Poisson de casi acoplamiento con conexión adaptada γ en M . Primero, notemos que por definición es $\mathbb{T}(s(B)) \subseteq \mathbb{H}^\gamma$, ya que $\mathbb{T}(s(B)) = \text{span}\{\text{hor}^\gamma u \mid u \in \Gamma \mathbb{T}B\}$. Así, se tiene que la condición de subvariedad de Poisson (4.99)

$$\Pi^\natural(\mathbb{T}_{s(B)}^* M) = \Pi^\natural(\mathbb{V}^\circ \oplus \mathbb{H}^\circ|_{s(B)}) = \Pi_H^\natural(\mathbb{V}^\circ|_{s(B)}) + \Pi_V^\natural(\mathbb{H}^\circ|_{s(B)}) \subseteq \mathbb{T}(s(B)),$$

es equivalente en este caso a las dos condiciones en (4.100), por ser $\Pi_V^\natural(\mathbb{H}^\circ|_{s(B)}) \subseteq \mathbb{V}|_{s(B)}$. \square

Notemos que la condición (4.100) equivale a decir que la componente horizontal Π_H de Π es tangente a la subvariedad $s(B)$. Por tanto, la restricción $\Pi_H|_{s(B)}$ está bien definida y determina el tensor de Poisson en $s(B)$ que hace a la inclusión $s(B) \hookrightarrow M$ un morfismo de Poisson. Es claro que la condición (4.100) se satisface si $\mathbb{H}^\gamma|_{s(B)} = \mathbb{T}(s(B))$ para alguna conexión de Ehresmann γ adaptada a Π .

Método de Homotopía de Moser. Para la equivalencia (4.98) entre dos tensores de Poisson Π y Π' en una variedad M , el método de homotopía de Moser para campos bivectoriales [73] se puede resumir en los siguientes tres pasos:

1. Construir una curva suave $\{\Pi_t\}_{t \in [0,1]}$ de tensores de Poisson que conecte a Π y Π' ,

$$\Pi_0 = \Pi \quad \text{y} \quad \Pi_1 = \Pi'.$$

2. Resolver la *ecuación de homotopía* para un campo vectorial Z_t dependiente del tiempo en M ,

$$\mathcal{L}_{Z_t} \Pi_t = -\frac{d\Pi_t}{dt}. \quad (4.101)$$

3. El flujo Fl_{Z_t} del campo vectorial Z_t al tiempo 1 proporciona la equivalencia (4.98) deseada,

$$\phi := \text{Fl}_{Z_t}^s \Big|_{s=1},$$

donde

$$\frac{d\text{Fl}_{Z_t}^s}{ds} = Z_t \circ \text{Fl}_{Z_t}^s, \quad \text{Fl}_{Z_t}^0 = \text{id}_M.$$

Se dirá que un abierto $U \subseteq M$ es el *dominio de definición* del flujo Φ del campo vectorial Z_t , si la función $\Phi^t : U \rightarrow M$ está bien definida para todo $t \in [0, 1]$. Por esto, en general, la equivalencia (4.98) se logra de manera (semi) local.

Interpretación Cohomológica. Como consecuencia de la identidad de Jacobi $[[\Pi_t, \Pi_t]] = 0$, para cada $t \in [0, 1]$, se tiene que el campo bivectorial dependiente del tiempo $d\Pi_t/dt$ es un 2-cociclo del operador de cofrontera δ_{Π_t} ,

$$\delta_{\Pi_t} \left(\frac{d\Pi_t}{dt} \right) := [[\Pi_t, \frac{d\Pi_t}{dt}]] = 0,$$

con $\delta_{\Pi_t} : \Gamma \wedge^\bullet \text{TM} \rightarrow \Gamma \wedge^{\bullet+1} \text{TM}$ el operador adjunto de Π respecto al corchete de Schouten-Nijenhuis que origina el complejo de Lichnerowicz-Poisson.

Así, la solubilidad de la ecuación de homotopía (4.101), equivale a que el 2-cociclo $d\Pi_t/dt$ sea una 2-cofrontera de δ_{Π_t} para cada t :

$$\frac{d\Pi_t}{dt} = -\delta_{\Pi_t}(Z_t).$$

De esta manera el paso 2 en el método de homotopía de Moser (4.101) está íntimamente ligado con el estudio de las deformaciones infinitesimales de cada tensor de Poisson Π_t .

Caso de Casi Acoplamiento. Para una familia t -parametrizada de tensores de Poisson de casi acoplamiento (4.2) respecto a una conexión de Ehresmann γ en M ,

$$\Pi_t = \Pi_{H_t} + \Pi_{V_t},$$

la ecuación de homotopía de Moser (4.101) admite una factorización en tres ecuaciones independientes:

$$[[Z_t, \Pi_{H_t}]]_{2,0} + \frac{d\Pi_{H_t}}{dt} = 0, \quad (4.102)$$

$$[[Z_t, \Pi_{H_t}]]_{1,1} + [[(Z_t)_{1,0}, \Pi_{V_t}]]_{1,1} = 0 \quad (4.103)$$

$$[[Z_t, \Pi_{V_t}]]_{0,2} + \frac{d\Pi_{V_t}}{dt} = 0, \quad (4.104)$$

donde la bigraduación es con respecto a la conexión γ .

Para el caso de ser Π un tensor de Poisson de *acoplamiento* (4.5) la ecuación (4.104) es equivalente a

$$\llbracket (Z_t)_{0,2}, \Pi_{V_t} \rrbracket_{0,2} + \frac{d\Pi_{V_t}}{dt} = 0. \quad (4.105)$$

Este hecho, que se desprende por ser γ una conexión de Poisson en el caso de acoplamiento, implica que, bajo ciertas condiciones, para que dos tensores de Poisson de acoplamiento sean equivalentes (4.98) es necesaria la equivalencia entre sus respectivas componentes verticales. En el caso de casi acoplamiento ya no se asegura que γ posea la propiedad de ser de Poisson globalmente y por tanto la ecuación (4.105) no se cumple en general, salvo en el dominio de acoplamiento. Así, en este caso surge el problema de extender la conexión de Poisson γ del dominio de acoplamiento a una conexión de Poisson en todo M .

Equivalencia Alrededor de Hojas Simplécticas. El problema de determinar si dos tensores de Poisson en una variedad diferencial son isomorfos (globalmente) no es trivial. Por ello, resulta favorable tener respuestas a nivel semilocal. El teorema a presentar es un resultado desde este enfoque utilizando la equivalencia gauge (4.33) entre tensores de Poisson.

Teorema 4.6.4 *Sean Π y Π' dos tensores de Poisson en una variedad diferencial los cuales poseen una hoja simpléctica común*

$$(S, \omega_S). \quad (4.106)$$

Si Π y Π' son gauge equivalentes por medio de una 2-forma cerrada en una vecindad (abierto) de S , entonces Π y Π' son isomorfos alrededor de S .

Para la demostración de este teorema primero se presentan algunos lemas auxiliares. Antes, recordemos que el morfismo haces vectoriales Π^\sharp en (1.11) se puede extender a un morfismo de álgebras exteriores

$$\natural_\Pi : \Gamma \wedge^k \mathbb{T}^*M \longrightarrow \Gamma \wedge^k \mathbb{T}M, \quad (4.107)$$

definido, para cada k -forma diferencial ζ en M , por

$$(\natural_\Pi \zeta)(\alpha_1, \dots, \alpha_k) := (-1)^k \zeta(\Pi^\sharp \alpha_1, \dots, \Pi^\sharp \alpha_k),$$

para cualesquiera $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Gamma \mathbb{T}^*M$. Además, se sigue directamente de esta definición que

$$\delta_\Pi \circ \natural_\Pi = -\natural_\Pi \circ d, \quad (4.108)$$

donde δ_Π es el operador de cohomología definido en (1.12) y d la diferencial exterior para formas. En otras palabras, la función en (4.107) es un morfismo de complejos cocadena.

Lema 4.6.5 *Fijemos en M los siguiente objetos:*

- *un campo bivectorial Π ,*
- *una 2-forma diferencial λ ,*

- una 1-forma diferencial β .

Supongamos que para todo $t \in [0, 1]$ el morfismo de haces vectoriales

$$\left(\text{id}_{\mathbb{T}^*M} - t \lambda^b \circ \Pi^{\natural}\right) : \mathbb{T}^*M \longrightarrow \mathbb{T}^*M \quad \text{es invertible.} \quad (4.109)$$

Entonces, las transformaciones gauge t -dependientes

$$\Pi_t^{\natural} = \Pi^{\natural} \circ \left(\text{id}_{\mathbb{T}^*M} - t \lambda^b \circ \Pi^{\natural}\right)^{-1} \quad (4.110)$$

definen una curva suave $\{\Pi_t\}_{t \in [0,1]}$ de campos bivectoriales en M que conectan a Π y a la transformación λ -gauge $\tilde{\Pi} = \Pi_1$ de Π . Aún más, los campos vectoriales t -dependientes

$$Z_t := \Pi_t^{\natural}(\beta) \quad (4.111)$$

satisfacen que

$$\mathcal{L}_{Z_t} \Pi_t + \frac{d\Pi_t}{dt} = \natural_{\Pi_t}(\text{d}\beta - \lambda). \quad (4.112)$$

Demostración. Es claro, por la definición (4.33), que para cada t , los morfismos en (4.110) definen una transformación gauge de Π . Ahora, usando (4.108), se sigue que

$$\mathcal{L}_{Z_t} \Pi_t = \mathcal{L}_{\Pi_t^{\natural} \beta} \Pi = \llbracket \Pi^{\natural} \beta, \Pi \rrbracket = -\delta_{\Pi}(\Pi^{\natural} \beta) = \natural_{\Pi}(\text{d}\beta).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Pi_t}{dt}\right)^{\natural} &= \frac{d\Pi_t^{\natural}}{dt} = \Pi^{\natural} \circ \frac{d}{dt} \left(I - t \lambda^b \circ \Pi^{\natural}\right)^{-1} \\ &= \Pi^{\natural} \circ \left(I - t \lambda^b \circ \Pi^{\natural}\right)^{-1} \circ \lambda^b \circ \Pi^{\natural} \circ \left(I - t \lambda^b \circ \Pi^{\natural}\right)^{-1} \\ &= \Pi_t^{\natural} \circ \lambda^b \circ \Pi_t^{\natural}, \end{aligned}$$

Notemos que, por definición, es $\langle \beta, (\natural_{\Pi_t} \lambda)^{\natural}(\alpha) \rangle = \langle \beta, -(\Pi_t^{\natural} \circ \lambda^b \circ \Pi_t^{\natural})(\alpha) \rangle$, para cualesquiera 1-formas α y β en M . Esto equivale a que $(\natural_{\Pi_t} \lambda)^{\natural} = -\Pi_t^{\natural} \circ \lambda^b \circ \Pi_t^{\natural}$. En consecuencia, se sigue que $d\Pi_t/dt = -\natural_{\Pi_t} \lambda$. \square

Lema 4.6.6 Sean Π un campo bivectorial de Poisson y λ una 2-forma diferencial en M tales que:

- (i) satisfacen la condición de no-degeneración (4.109),
- (ii) existe una 1-forma diferencial β en M tal que

$$i_S^* \lambda = \text{d}(i_S^* \beta), \quad (4.113)$$

para cada hoja simpléctica S of Π . Entonces, la fórmula (4.110) define una curva suave de estructuras de Poisson $\{\Pi_t\}_{t \in [0,1]}$ con punto inicial Π . Aún más, el campo vectorial t -dependiente Z_t en (4.111) satisface la ecuación de homotopía $\mathcal{L}_{Z_t} \Pi_t + \frac{d\Pi_t}{dt} = 0$.

Demostración. La condición (4.113) implica que el pullback de la 2-forma λ a cada hoja simpléctica S de Π es una 2-forma exacta, en consecuencia, λ es cerrada en cada hoja simpléctica de Π , es decir, es \mathcal{F}_Π -cerrada. Así, cada Π_t es un tensor de Poisson en M . Ahora, tomando en cuenta que

$$\ker \Pi_t^\sharp = (D^\Pi)^\circ, \quad \forall t \in [0, 1]; \quad (4.114)$$

se concluye que $i_S^*(\lambda - d\beta) = 0$ es equivalente a $\sharp_{\Pi_t}(d\beta - \lambda) = 0$. \square

Demostración (del Teorema 4.6.4). Esta demostración la dividiremos en tres pasos.

Paso 1. Fijemos un subhaz vectorial $\mathcal{L} \subset \mathbb{T}_S M$ transversal a la hoja simpléctica S , es decir, se tiene que $\mathbb{T}_S M = \mathbb{T}S \oplus \mathcal{L}$ y $\mathbb{T}_S^* M = \mathcal{L}^0 \oplus \mathbb{T}S^0$. Luego, por construcción y de (4.114), se sigue que

$$\Pi^\sharp(\mathbb{T}S^0) = 0 \quad \text{y} \quad \Pi^\sharp(\mathcal{L}^0) = \mathbb{T}S.$$

La condición de λ -gauge equivalencia entre los tensores de Poisson Π y Π' y la hipótesis (4.106) implican que $i_S^* \lambda = 0$, o equivalentemente, que $\lambda^\flat(\mathbb{T}S) \subseteq (\mathbb{T}S)^0$. Así, en una carta en M , se puede hacer la identificación

$$(\text{id}_{\mathbb{T}^* M} - t \lambda_p^\flat \circ \Pi_p^\sharp) \simeq \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & I \end{pmatrix}, \quad \forall p \in S, t \in [0, 1].$$

Por tanto, la condición de no degeneración (4.109) se cumple en un abierto U de la hoja S en M . Luego, por el Lema 4.6.6, el tensor de Poisson Π y la 2-forma diferencial λ inducen una curva suave $t \mapsto \Pi_t$ de tensores de Poisson.

Paso 2. Aplicando el *Lema de Poincaré* (generalizado) [41] a la 2-forma cerrada λ y cortando U si es necesario, se sigue que $\lambda = d\beta$ para alguna 1-forma β en U con la propiedad $i_S^* \beta = 0$. Así, por el Lema 4.6.6, se tiene una solución $Z_t = \Pi_t^\sharp(\beta)$ a la ecuación de homotopía (4.101) que satisface

$$Z_t|_S = 0, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (4.115)$$

Paso 3. Finalmente, por (4.115) y el Lema “Flow Box”, se puede fijar U de tal manera que el flujo $\text{Fl}_{Z_t}^t$ del campo vectorial Z_t está bien definido en U para todo $t \in [0, 1]$. Esto estabiliza la familia de tensores de Poisson $\{\Pi_t\}_{t \in [0, 1]}$. \square

Capítulo 5

Estructuras de Dirac de Casi Acoplamiento

Análogamente a lo que sucede con los tensores de Poisson, se pueden definir distintas compatibilidades entre estructuras de Dirac y estructuras fibradas. Concretamente, en [66] I. Vaisman estableció la noción de estructura de Dirac de casi acoplamiento. En este capítulo se estudia una clase particular de este tipo de estructuras de Dirac y se presentan de manera más detallada algunos resultados obtenidos en [67] así como un criterio más general que garantiza la invarianza de la propiedad de casi acoplamiento para transformaciones gauge de estructuras de Dirac.

5.1. Estructuras de Dirac

Sea M una variedad diferencial. Recordemos que el haz tangente y contangente de M se denotan por $\mathbb{T}M$ y \mathbb{T}^*M , respectivamente. El *haz de Pontryagin* en M se define por

$$\mathbb{T}M := \mathbb{T}M \oplus \mathbb{T}^*M. \quad (5.1)$$

Notemos que el rango de este haz vectorial es $\text{rank } \mathbb{T}M = 2 \dim M$.

El producto interior de campos vectoriales y formas diferenciales induce de manera canónica una *forma bilineal* simétrica en el haz de Pontryagin definida por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{T}M \times \mathbb{T}M \rightarrow C_M^\infty, \quad \langle X_1 \oplus \alpha_1, X_2 \oplus \alpha_2 \rangle := \mathbf{i}_{X_1} \alpha_2 + \mathbf{i}_{X_2} \alpha_1. \quad (5.2)$$

Para cualquier subespacio $D \subseteq \mathbb{T}M$ se define el *complemento ortogonal* de D respecto a la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ por

$$D^\perp := \{ z \in \mathbb{T}M \mid \langle z, \tilde{z} \rangle = 0, \forall \tilde{z} \in D \}.$$

Definición 5.1.1 *Un subespacio $D \subseteq \mathbb{T}M$ se llama una estructura casi-Dirac si es un subespacio isotrópico maximal (Lagrangiano) respecto a la forma bilineal en (5.2), es decir, si*

$$D^\perp = D. \quad (5.3)$$

D se llama estructura de Dirac si cumple (5.3) y además satisface

$$\mathfrak{S}_{(1,2,3)} \langle \mathcal{L}_{X_1} \alpha_2, X_3 \rangle = 0, \quad (5.4)$$

para cualesquier $X_i \oplus \alpha_i \in \mathbb{T}M$, $i = 1, 2, 3$. Donde el símbolo \mathfrak{S} denota la suma cíclica respecto a los subíndices.

La ecuación (5.4) es conocida también como condición de integrabilidad para D , ver por ejemplo [18]. Esta terminología se puede justificar utilizando el corchete de Courant.

Se define el *corchete de Courant* [13] en $\mathbb{T}M$ por

$$[[X_1 \oplus \alpha_1, X_2 \oplus \alpha_2]] := [X_1, X_2] \oplus (\mathcal{L}_{X_1} \alpha_2 - \mathcal{L}_{X_2} \alpha_1 + \text{di}_{X_2} \alpha_1), \quad (5.5)$$

para cualesquiera $X_1 \oplus \alpha_1, X_2 \oplus \alpha_2 \in \mathbb{T}M$.

Es claro que el corchete de Courant es \mathbb{R} -bilineal pero en general no es antisimétrico y por tanto no define una estructura de algebra de Lie en $\mathbb{T}M$. De hecho, el corchete de Courant es antisimétrico si y solamente si $d\langle X_1 \oplus \alpha_1, X_2 \oplus \alpha_2 \rangle = 0$, para cualesquiera $X_1 \oplus \alpha_1, X_2 \oplus \alpha_2 \in \mathbb{T}M$. Esto como parte de las consecuencias de la siguiente proposición.

Lema 5.1.2 *El corchete de Courant posee las siguientes propiedades:*

- *transposición de argumentos,*

$$[[z_2, z_1]] = -[[z_1, z_2]] + 0 \oplus d\langle z_1, z_2 \rangle; \quad (5.6)$$

- *derivación del corchete,*

$$[[z_1, [[z_2, z_3]]]] = [[[[z_1, z_2], z_3]] + [[z_2, [[z_1, z_3]]]]; \quad (5.7)$$

- *forma bilineal con un corchete,*

$$\langle [[z_1, z_2], z_3 \rangle = \left(\mathfrak{S}_{(1,2,3)} \langle \mathcal{L}_{X_1} \alpha_2, X_3 \rangle \right) - \mathcal{L}_{X_2} \langle z_1, z_3 \rangle; \quad (5.8)$$

para cualesquiera $z_i = X_i \oplus \alpha_i \in \mathbb{T}M$ arbitrarios, con $i = 1, 2, 3$.

Cabe mencionar que (5.7) no significa que el corchete de Courant satisface la identidad de Jacobi. De hecho se tiene que

$$\mathfrak{S}_{(1,2,3)} [[[[z_1, z_2], z_3]]] = 0 \oplus \mathfrak{S}_{(1,2,3)} d(\langle \mathcal{L}_{X_1} \alpha_2, X_3 \rangle - \langle \mathcal{L}_{X_1} \alpha_3, X_2 \rangle).$$

Proposición 5.1.3 *Una estructura casi-Dirac $D \subset \mathbb{T}M$ es una estructura de Dirac si y sólo si su espacio de secciones es cerrado respecto al corchete de Courant, $[[\Gamma D, \Gamma D]] \subseteq \Gamma D$.*

Demostración. Por (5.8) se tiene que

$$\langle [[z_1, z_2], z_3] \rangle = \underset{(1,2,3)}{\mathfrak{S}} \langle \mathcal{L}_{X_1} \alpha_2, X_3 \rangle.$$

para cualesquiera $z_i = X_i \oplus \alpha_i \in \Gamma D = \Gamma D^\perp$, con $i = 1, 2, 3$. De esta igualdad y por (5.4) se sigue la afirmación de esta proposición. \square

5.2. Propiedad de Casi Acoplamiento

En lo que resta de este capítulo $\pi : M \rightarrow B$ denotará una variedad fibrada. Recordemos que $\mathbb{V} = \ker d\pi$ es la distribución vertical de π y que dada una conexión de Ehresmann $\gamma \in \Omega^1(M; \mathbb{V})$ la distribución horizontal asociada a esta conexión se denota por $\mathbb{H} \equiv \mathbb{H}^\gamma = \ker \gamma$.

Dada una estructura casi-Dirac D en M , se define una distribución singular suave en M [66], asociada a D y a la estructura fibrada π , por

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}(D, \pi) := \{ X \in \mathbb{T}M \mid \exists \eta \in \mathbb{V}^\circ \text{ tq. } X \oplus \eta \in D \}. \quad (5.9)$$

- Una estructura casi-Dirac D en M se llama de *parcialmente acoplada* si

$$\mathbf{H} \cap \mathbb{V} = \{0\}.$$

Un ejemplo natural de esta clase de estructuras de casi-Dirac lo proporcionan los campos bivectoriales parcialmente acoplados. Para ver esto, primero notemos que dado un campo bivectorial Π en M , si

$$D^\Pi = \text{Graf}(\Pi) := \{ \Pi^\sharp(\alpha) \oplus \alpha \mid \alpha \in \mathbb{T}^*M \} \subset \mathbb{T}M \quad (5.10)$$

es la estructura casi-Dirac en M dada por la gráfica de Π , entonces

$$\mathbf{H}(D^\Pi, \pi) = \Pi^\sharp(\mathbb{V}^\circ). \quad (5.11)$$

Con esto es claro que si Π es parcialmente acoplado, ver (4.1), entonces D^Π es una estructura casi-Dirac parcialmente acoplada.

Definición 5.2.1 *Una estructura casi-Dirac D en M se llama de casi acoplamiento si existe una conexión de Ehresmann γ en M tal que*

$$\mathbf{H}(D, \pi) \subseteq \mathbb{H}^\gamma. \quad (5.12)$$

En general, existen distintas conexiones de Ehresmann que satisfacen la condición (5.12). Cuando sea necesario especificar alguna se dirá que D es una estructura casi-Dirac de casi acoplamiento *vía* γ , por ejemplo, y a esta conexión se le llamará una conexión de Ehresmann *adaptada a* D .

Finalmente, si la distribución \mathbf{H} en (5.12) define una distribución horizontal en M , la estructura casi-Dirac D se dirá de *acoplamiento*.

A continuación se presentan propiedades generales de las estructuras casi-Dirac de casi acoplamiento que serán de utilidad para la demostración de resultados posteriores.

Lema 5.2.2 *Si D es una estructura casi-Dirac de casi acoplamiento en M , entonces es $D \cap (\mathbb{V} \oplus \{0\}) = 0$.*

Demostración. Sea γ una conexión de Ehresman en M adaptada a D . Si $v \oplus 0 \in D \cap (\mathbb{V} \oplus \{0\})$, en particular es $v \in \mathbb{V}$. Por ser $0 \in \mathbb{V}^\circ$, se sigue que $v \in \mathbf{H}$. Luego, por la hipótesis (5.12), es $v \in \mathbb{H}^\gamma$. Por tanto, se tiene que $v = 0$. \square

Ahora, dada una conexión de Ehresmann γ en M , las descomposiciones (2.1) y (2.2) inducen la siguiente descomposición del haz de Pontryagin

$$\mathbb{T}M \simeq (\mathbb{H} \oplus \mathbb{V}^\circ) \oplus (\mathbb{V} \oplus \mathbb{H}^\circ), \quad (5.13)$$

Con esto, se definen los subhaces haces vectoriales de $\mathbb{T}M$

$$D_H := D \cap (\mathbb{H} \oplus \mathbb{V}^\circ) \quad \text{y} \quad D_V := D \cap (\mathbb{V} \oplus \mathbb{H}^\circ), \quad (5.14)$$

los cuales se pueden pensar como las “componentes” horizontal y vertical de la estructura casi-Dirac D respectivamente. Se sigue directamente de la definición que

$$D_H \cap D_V = \{0\}. \quad (5.15)$$

También, de manera inmediata se obtiene que

$$D_H \subseteq D_H^\perp \quad \text{en} \quad \mathbb{H} \oplus \mathbb{V}^\circ \quad \text{y} \quad D_V \subseteq D_V^\perp \quad \text{en} \quad \mathbb{V} \oplus \mathbb{H}^\circ. \quad (5.16)$$

Lema 5.2.3 *Sea D es una estructura casi-Dirac de casi acoplamiento *vía* una conexión de Ehresmann γ en M , entonces*

- (1) $D_V \cap (\mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^\circ) = \{0\}$,
- (2) $D_H = D \cap (\mathbb{T}M \oplus \mathbb{V}^\circ)$,
- (3) $D_H \cap (\mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^\circ) = D \cap (\mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^\circ) = D \cap (\{0\} \oplus \mathbb{V}^\circ)$,
- (4) $D_H^\perp = D_H$ en $\mathbb{H} \oplus \mathbb{V}^\circ$, en particular, $\text{rank } D_H = \text{rank } \mathbb{H}$,

(5) $D_V^\perp = D_V$ en $\mathbb{V} \oplus \mathbb{H}^\circ$, en particular, $\text{rank } D_V = \text{rank } \mathbb{V}$,

donde D_H y D_V están definidos en (5.14).

Demostración. Sea γ una conexión de Ehresman en M adaptada a D en el sentido (5.12).

(1) Notemos que $(\mathbb{V} \oplus \mathbb{H}^\circ) \cap (\mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^\circ) = \mathbb{V} \oplus \{0\}$. Así, por el Lema 5.2.2, es $D_V \cap (\mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^\circ) = D \cap (\mathbb{V} \oplus \{0\}) = 0$. (2) Primero, por la definición de D_H en (5.14), es inmediato que $D_H \subseteq D \cap (\mathbb{T}M \oplus \mathbb{V}^\circ)$. Ahora, se probará que $D \cap (\mathbb{T}M \oplus \mathbb{V}^\circ) \subseteq D_H$. Sea $X \oplus \eta \in D \cap (\mathbb{T}M \oplus \mathbb{V}^\circ)$. En particular, es $X \in \mathbf{H}$, por ser $\eta \in \mathbb{V}^\circ$. Luego, por (5.12), es $X \in \mathbb{H}$. Así, se tiene que $X \oplus \eta \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{V}^\circ$ y por tanto es $X \oplus \eta \in D_H$. (3) Es consecuencia inmediata del inciso (2) y las contenciones $\{0\} \oplus \mathbb{V}^\circ \subset \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^\circ \subset \mathbb{T}M \oplus \mathbb{V}^\circ$. (4) Por (5.16), se tiene que D_H es un subespacio isotrópico de $\mathbb{H} \oplus \mathbb{V}^\circ$. Ya que $\dim(\mathbb{H} \oplus \mathbb{V}^\circ) = 2 \dim \mathbb{H}$, es $\dim D_H \leq \dim \mathbb{H}$. Ahora, por el inciso (3) y observando que $\dim(D + \mathbb{T}M \oplus \mathbb{V}^\circ) \leq 2 \dim M$, se sigue que $\dim D_H \geq \dim \mathbb{H}$. Por tanto, $\dim D_H = \dim \mathbb{H}$. En consecuencia, $D_H^\perp = D_H$ en $\mathbb{H} \oplus \mathbb{V}^\circ$. (5) Primero, de (5.16), se sigue que $\dim D_V \leq \dim \mathbb{V}$. Ahora, se probará que $\dim \mathbb{V} \leq \dim D_V$. Para esto, sea $S \subseteq D$ tal que $D = D_H \oplus S$. Notemos que por el inciso (4) es $\dim S = \dim \mathbb{V}$. Ahora, relativas a la descomposición (5.13), consideremos las proyecciones (lineales) $\text{pr}_H : \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{H} \oplus \mathbb{V}^\circ$ y $\text{pr}_V : \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{V} \oplus \mathbb{H}^\circ$. Así, dado $s \in S$, se tiene una descomposición única $s = \text{pr}_H(s) + \text{pr}_V(s)$. Notemos que $0 = \langle s, w \rangle = \langle \text{pr}_H(s), w \rangle$, para todo $w \in D_H$. Esto implica que $\text{pr}_H(s) \in D_H^\perp \cap (\mathbb{H} \oplus \mathbb{V}^\circ)$. Luego, por el inciso (4), se sigue que $\text{pr}_H(s) \in D_H$. En consecuencia, $s - \text{pr}_H(s) \in D_V$. Ahora, si se define el subespacio $\tilde{S} := \text{span}\{s - \text{pr}_H(s) \mid s \in S\}$ es claro que $\tilde{S} \subseteq D_V$ y $D = D_H \oplus \tilde{S}$. En particular, $\dim \tilde{S} = \dim \mathbb{V}$. Mostrando así que $\dim \mathbb{V} \leq \dim D_V$. Con lo cual es $\dim D_V = \dim \mathbb{V}$, lo que implica que $D_V^\perp = D_V$ en $\mathbb{V} \oplus \mathbb{H}^\circ$. \square

Notemos que por el inciso (2) del lema anterior se tiene que $\mathbf{H} = \text{pr}_{\mathbb{T}M}(D_H)$, donde $\text{pr}_{\mathbb{T}M} : \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}M$ es la proyección canónica al haz tangente de M .

A continuación se muestra que los campos bivectoriales de casi acoplamiento inducen de manera natural estructuras casi-Dirac de casi acoplamiento.

Gráfica de Campos Bivectoriales de Casi Acoplamiento. Sea Π un campo bivectorial de casi acoplamiento en M , ver (4.2). Luego, si D^Π es la gráfica de Π definida en (5.10), como consecuencia de (5.11), las nociones de casi acoplamiento para campos bivectoriales (4.2) y estructuras de Dirac (5.9) coinciden.

Recordemos que, por el Teorema 4.1.17, Π admite una única descomposición bigraduada $\Pi = \Pi_H + \Pi_V$, donde $\Pi_H \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{H}$ y $\Pi_V \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}$. Como consecuencia de esta descomposición se tiene que las distribuciones asociadas a D^Π definidas por (5.14) son, respectivamente,

$$D_H^\Pi = C_H^\Pi \oplus \mathbb{V}^\circ \quad \text{y} \quad D_V^\Pi = C_V^\Pi \oplus \mathbb{H}^\circ,$$

donde C_H^Π y C_V^Π son las componentes horizontal y vertical de la distribución característica de Π definidas en (4.23). Notemos que de manera equivalente se tiene que

$$D_H^\Pi = \text{Graf}(\Pi_H|_{\mathbb{V}^\circ}) \quad \text{y} \quad D_V^\Pi = \text{Graf}(\Pi_V|_{\mathbb{H}^\circ}). \quad (5.17)$$

Corolario 5.2.4 Sean Π un campo bivectorial en M y D^Π la estructura casi-Dirac dada por su gráfica definida en (5.10). Entonces,

- D^Π es parcialmente acoplado si y solamente si Π lo es,
- D^Π es de casi acoplamiento si y solamente si Π lo es,
- D^Π es de acoplamiento si y solamente si Π lo es,

Demostración. Es consecuencia directa de (5.11). □

5.2.1. Resultados Básicos

En este apartado se presentan algunos resultados para la familia de estructuras casi-Dirac de casi acoplamiento. El primero de ellos es una caracterización de estas estructuras.

Proposición 5.2.5 Sea M una variedad fibrada y D una estructura casi-Dirac en M . Si D es de casi acoplamiento, entonces

$$D = D_H \oplus D_V, \quad (5.18)$$

donde D_H y D_V están definidos en (5.14).

Demostración. Sea γ una conexión de Ehresmann en M adaptada a D . Por propiedades generales en espacios vectoriales se tiene que $(D \cap (\mathbb{H} \oplus \mathbb{V}^\circ)) \oplus (D \cap (\mathbb{V} \oplus \mathbb{H}^\circ)) \subseteq D \cap \mathbb{T}M$. O equivalentemente, $D_H \oplus D_V \subseteq D$. Luego, por los incisos 4 y 5 del Lema 5.2.3, se tiene que $\dim D_H + \dim D_V = \dim D$. Por tanto, es $D = D_H \oplus D_V$. □

Corolario 5.2.6 Para una estructura casi-Dirac de casi acoplamiento D , la condición (5.9) es equivalente a la descomposición (5.18) si y solamente si

$$D_V \cap (\mathbb{V} \oplus \{0\}) = \{0\}. \quad (5.19)$$

Por este corolario, la intersección en el lado izquierdo de la igualdad en (5.19) se puede pensar como una medida de la obstrucción a la equivalencia entre (5.9) y (5.18). Como a continuación se muestra, para el caso de campos bivectoriales de casi acoplamiento (5.19) se cumple de manera automática.

Ejemplo 5.2.7 Para la estructura casi-Dirac de casi acoplamiento en (5.10) dada por la gráfica de Π (de casi acoplamiento) las condiciones (5.9) y (5.18) son equivalentes. Esto se debe a que (5.19) se cumple por ser en este caso D_V la gráfica de un campo bivectorial vertical, ver (5.17). Otra manera de ver esto es observando que $\text{Graf}(\Pi) = \text{Graf}(\Pi_H|_{\mathbb{V}^\circ}) \oplus \text{Graf}(\Pi_V|_{\mathbb{H}^\circ})$.

◁

Ejemplo 5.2.8 Sea γ una conexión de Ehresmann en M . Entonces, la gráfica $\text{Graf}(\sigma) = \{X \oplus \sigma^b(X) \mid X \in \mathbb{T}M\}$, de una 2-forma horizontal $\sigma \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}^\circ$, es una estructura casi-Dirac en M que admite una descomposición $D^\sigma = D_H^\sigma \oplus D_V^\sigma$, donde $D_H^\sigma = \text{Graf}(\sigma|_{\mathbb{H}^\gamma})$ y $D_V^\sigma = \text{Graf}(\sigma|_{\mathbb{V}})$. Sin embargo, en este caso se tiene que $\mathbf{H}(D^\sigma, \pi) = \mathbb{T}M$, lo que implica que no existe conexión de Ehresmann que satisfaga la condición (5.9). Por tanto, D^σ no es de casi acoplamiento. \triangleleft

Nota 5.2.9. En [66] I. Vaismann define una estructura casi-Dirac de casi acoplamiento como aquella que admite una descomposición como en (5.18). Por lo ilustrado en los dos ejemplos anteriores, (5.18) y la definición (5.12) aquí presentada no son equivalentes. Por la Proposición 5.2.5, es claro que (5.12) implica la definición presentada por I. Vaismann. \triangleleft

A continuación se presenta uno de los principales resultados de este apartado.

Teorema 5.2.10 *Sea M una variedad fibrada. Si D es una estructura casi-Dirac de casi acoplamiento vía una conexión de Ehresmann γ , entonces existe un campo bivectorial vertical, $P \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}$, tal que*

$$D_V = \text{Graf}(P|_{\mathbb{H}^\circ}) = \{P^b(\mu) \oplus \mu \mid \mu \in \mathbb{H}^\circ\}. \quad (5.20)$$

Aún más, si D es una estructura de Dirac, entonces P es un tensor de Poisson vertical.

Para la demostración de este teorema se presentan primero algunos lemas auxiliares.

Lema 5.2.11 *Sea D una estructura casi-Dirac en M . Entonces, el (subhaz) anulador de la distribución $\mathbf{H}(D, \mathcal{F})$ definida en (5.9) es*

$$\mathbf{H}^\circ = \{\alpha \in \mathbb{T}^*M \mid \exists v \in \mathbb{V} \text{ tq. } v \oplus \alpha \in D\}. \quad (5.21)$$

Demostración. Sea $A = \{\alpha \in \mathbb{T}^*M \mid \exists v \in \mathbb{V} \text{ tq. } v \oplus \alpha \in D\}$. Primero, se probará que $\mathbf{H}^\circ \subseteq A$. Para esto supóngase que $\mathbf{H}^\circ \not\subseteq A$ y sea $\alpha \in A$ tal que $\alpha \notin \mathbf{H}^\circ$. Luego, existe $v \in \mathbb{V}$ tal que $v \oplus \alpha \in D$ y $\langle \alpha, X \rangle \neq 0$ para algún $X \in \mathbf{H}$. Ahora, para este X existe $\eta \in \mathbb{V}^\circ$ tal que $X \oplus \eta \in D$. Luego, $0 = \langle v \oplus \alpha, X \oplus \eta \rangle = \langle \alpha, X \rangle + \langle \eta, v \rangle = \langle \alpha, X \rangle$. Pero esto contradice el hecho que $\langle \alpha, X \rangle \neq 0$. Por tanto es $\mathbf{H}^\circ \subseteq A$. Ahora, se probará que $A \subseteq \mathbf{H}^\circ$. Dado $\alpha \in A$, existe $v \in \mathbb{V}$ tal que $v \oplus \alpha \in D$. Ahora, sea $X \in \mathbf{H}$ un elemento arbitrario. Para este X existe $\eta \in \mathbb{V}^\circ$ tal que $X \oplus \eta \in D$. Luego, $0 = \langle v \oplus \alpha, X \oplus \eta \rangle = \langle \alpha, X \rangle + \langle \eta, v \rangle = \langle \alpha, X \rangle$. De esto se sigue que $\langle \alpha, X \rangle = 0$ para cualquier $X \in \mathbf{H}$, es decir, $\alpha \in \mathbf{H}^\circ$. Por tanto, $A \subseteq \mathbf{H}^\circ$. \square

Corolario 5.2.12 *Si D es de casi acoplamiento, entonces para cada $\alpha \in \mathbf{H}(D, \mathcal{F})^\circ$ existe un único $v \in \mathbb{V}$ tal que $v \oplus \alpha \in D$.*

Demostración. Dado $\alpha \in \mathbf{H}^\circ$, por definición, existe $v \in \mathbb{V}$ tal que $v \oplus \alpha \in D$. Supóngase que existe $\tilde{v} \in \mathbb{V}$ tal que $\tilde{v} \oplus \alpha \in D$. Luego, es $(v - \tilde{v}) \oplus 0 \in D$ y por el Lema 5.2.2 se tiene que $(v - \tilde{v}) \oplus 0 = 0$. Por tanto, $v = \tilde{v}$.

Corolario 5.2.13 *Cada estructura casi-Dirac de casi acoplamiento en una variedad fibrada M induce un campo bivectorial vertical en M .*

Demostración. Sea D una estructura casi-Dirac de casi acoplamiento vía una conexión de Ehresmann γ en M . Dado $\mu \in \mathbb{H}^\circ$, por (5.9), es $\mu \in \mathbb{H}^\circ$. Luego, por el Corolario 5.2.12, existe un único $v \in \mathbb{V}$ tal que $v \oplus \mu \in D$. El hecho de que este v sea único induce un morfismo de haces vectoriales $P^\natural : \mathbb{H}^\circ \rightarrow \mathbb{V}$ definido por $\mu \mapsto P^\natural(\mu) := v$. Este morfismo de haces determina una función \mathbb{R} -bilineal y antisimétrica

$$P : \mathbb{H}^\circ \times \mathbb{H}^\circ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\mu_1, \mu_2) \longmapsto P(\mu_1, \mu_2) := \langle \mu_1, P^\natural(\mu_2) \rangle.$$

La \mathbb{R} -bilinealidad de P es clara y la antisimetría se tiene por ser $P^\natural(\mu_i) \oplus \mu_i \in D$. En efecto, $P(\mu_2, \mu_1) = \langle \mu_2, P^\natural(\mu_1) \rangle = -\langle \mu_1, P^\natural(\mu_2) \rangle = -P(\mu_1, \mu_2)$. Además, declarando que $i_\eta P = 0$, para todo $\eta \in \mathbb{V}^\circ$, se tiene que la función P induce un campo bivectorial vertical en M : $P \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}$. \square

Demostración (del Teorema 5.2.10). Por ser D de casi acoplamiento, debido al Corolario 5.2.13, existe un campo bivectorial vertical $P \in \Gamma \wedge^2 \mathbb{V}$ inducido por D . A continuación, se probará que la gráfica de P , en \mathbb{H}° , coincide con D_V . Por definición, se tiene que

$$\text{Graf}(P|_{\mathbb{H}^\circ}) = \{P^\natural(\mu) \oplus \mu \mid \mu \in \mathbb{H}^\circ\} = \{v \oplus \mu \in D \mid v \in \mathbb{V}, \mu \in \mathbb{H}^\circ\} \subseteq D \cap (\mathbb{V} \oplus \mathbb{H}^\circ) = D_V.$$

Notemos que $\dim(\text{Graf}(P|_{\mathbb{H}^\circ})) = \dim \mathbb{H}^\circ = \dim \mathbb{V}$. Luego, por el inciso (5) de Lema 5.2.3, se sigue que

$$\text{Graf}(P|_{\mathbb{H}^\circ}) = D_V. \quad (5.22)$$

Ahora, se probará que si D es una estructura de Dirac, entonces P es un tensor de Poisson. Sean $z_i = P^\natural(\mu_i) \oplus \mu_i \in \Gamma D_V$, con $\mu_i \in \Gamma \mathbb{H}^\circ$ para $i = 1, 2$. Por ser D una estructura de Dirac se tiene que $[[z_1, z_2]] \in D$, con $[[,]]$ el corchete de Courant definido en (5.5). Para verificar esta afirmación primero notemos que

$$[[P^\natural(\mu_1) \oplus \mu_1, P^\natural(\mu_2) \oplus \mu_2]] = [P^\natural(\mu_1), P^\natural(\mu_2)] \oplus \{\mu_1, \mu_2\}_P \in D, \quad (5.23)$$

donde $\{, \}_P$ denota el corchete para 1-formas diferenciales en M inducido por P :

$$\{\alpha_1, \alpha_2\}_P = \mathcal{L}_{P^\natural(\alpha_1)}\alpha_2 - \mathcal{L}_{P^\natural(\alpha_2)}\alpha_1 + \text{di}_{P^\natural(\alpha_2)}\alpha_1$$

Notemos que $[P^\natural(\mu_1), P^\natural(\mu_2)] \in \Gamma \mathbb{V}$, por ser $P^\natural(\mu_i) \in \Gamma \mathbb{V}$. Para probar que P es un tensor de Poisson se probará que $[P^\natural(\alpha_1), P^\natural(\alpha_2)] = P^\natural(\{\alpha_1, \alpha_2\}_P)$, para todo $\alpha_i \in \Gamma \mathbb{T}^*M$. Para esto es suficiente mostrar que esta igualdad se cumple para las secciones de \mathbb{V}° y \mathbb{H}° . En efecto, primero, se tiene que $[P^\natural(\mu_1), P^\natural(\mu_2)] = P^\natural(\{\mu_1, \mu_2\}_P)$, para toda $\mu_i \in \Gamma \mathbb{H}^\circ$. Esto como consecuencia de lo siguiente: dado $v \oplus \alpha \in D \cap (\mathbb{V} \oplus \mathbb{T}^*M)$, por la descomposición $D = D_H \oplus \text{Graf}(P|_{\mathbb{H}^\circ})$, se tiene que $v \oplus \alpha = h \oplus \eta + P^\natural(\mu) \oplus \mu$ para alguna $h \oplus \eta \in D_H$ y $\mu \in \mathbb{H}^\circ$. De esto se sigue que debe ser $h = 0$, $v = P^\natural(\mu)$ y $\alpha = \eta + \mu$. Como, $P^\natural(\alpha) = P^\natural(\mu)$, se tiene que $v \oplus \alpha = P^\natural(\alpha) \oplus \alpha \in \text{Graf } P$. Aplicando esto a $[P^\natural(\mu_1), P^\natural(\mu_2)] \oplus \{\mu_1, \mu_2\}_P \in D \cap (\mathbb{V} \oplus \mathbb{T}^*M)$ se sigue que $[P^\natural(\mu_1), P^\natural(\mu_2)] = P^\natural(\{\mu_1, \mu_2\}_P)$. Para el siguiente caso se tiene que $[P^\natural(\eta_1), P^\natural(\eta_2)] = 0$ y $P^\natural(\{\eta_1, \eta_2\}_P) = 0$, para toda $\eta_1, \eta_2 \in \Gamma \mathbb{V}^\circ$. Esto es por ser $P^\natural(\eta_i) = 0$. Finalmente, de manera análoga, se prueba que $[P^\natural(\mu), P^\natural(\eta)] = 0$ y $P^\natural(\{\mu, \eta\}_P) = 0$, para cualesquiera $\eta \in \Gamma \mathbb{V}^\circ, \mu \in \Gamma \mathbb{H}^\circ$. En conclusión, $[P^\natural(\alpha_1), P^\natural(\alpha_2)] = P^\natural(\{\alpha_1, \alpha_2\}_P)$, para toda $\alpha_i \in \Gamma \mathbb{T}^*M$. Por lo tanto, P es un tensor de Poisson. \square

Corolario 5.2.14 *Si D es una estructura de Dirac de casi acoplamiento en M , entonces D_V en (5.17) es cerrado bajo el corchete de Courant, es decir, $[[\Gamma D_V, \Gamma D_V]] \subseteq \Gamma D_V$.*

Demostración. Es consecuencia directa de (5.23). \square

Transformaciones Gauge. Análogamente a lo que sucede para el caso de campos bivectoriales de casi acoplamiento, surge de manera natural el problema de encontrar condiciones bajo las cuales las llamadas transformaciones gauge para estructuras de casi-Dirac preservan la propiedad de casi acoplamiento.

Sea D una estructura casi-Dirac en M no necesariamente de casi acoplamiento. Recordemos que dada una 2-forma diferencial $\lambda \in \Gamma \wedge^2 T^*M$ la distribución en $\mathbb{T}M$

$$\bar{D} = \{X \oplus (\alpha - \mathbf{i}_X \lambda) \mid X \oplus \alpha \in D\} \quad (5.24)$$

es una (nueva) estructura de casi-Dirac en M . En este contexto, a la función $\tau_\lambda : D \mapsto \bar{D}$ se le llama la *transformación gauge* de D asociada a la 2-forma λ , o más brevemente, la transformación λ -gauge de D .

Si D es una estructura de Dirac y λ es una forma diferencial cerrada, entonces \bar{D} es nuevamente una estructura de Dirac en M .

Nota 5.2.15. En general, las transformaciones gauge de estructuras casi-Dirac están definidas en cualquier variedad diferencial, no necesariamente fibradas. \triangleleft

Teorema 5.2.16 *Sea $D = D_H \oplus \text{Gráf}(P|_{\mathbb{H}^\circ})$ una estructura casi-Dirac de casi acoplamiento vía una conexión de Ehresmann γ en M . Si $\lambda = \lambda_{2,0} + \lambda_{1,1} + \lambda_{0,2}$ es una 2-forma diferencial tal que el operador*

$$(\text{id}_{T^*M} - \lambda_{0,2}^b \circ P^\natural) \Big|_{\mathbb{H}^\circ} : \mathbb{H}^\circ \rightarrow \mathbb{H}^\circ \quad \text{es invertible,} \quad (5.25)$$

entonces la transformación λ -gauge de D definida en (5.24) es de casi acoplamiento vía la conexión de Ehresmann

$$\tilde{\gamma} = \gamma - (\text{id}_{TM} - P^\natural \circ \lambda_{0,2}^b)^{-1} \circ P^\natural \circ \lambda_{1,1}^b.$$

Aún más, la condición (5.25) es independiente de γ .

Demostración. Primero, por (5.14) y (5.20), la estructura casi-Dirac de casi acoplamiento D es descrita por

$$D = \left\{ h \oplus \eta + P^\natural \mu \oplus \mu \mid h \oplus \eta \in D_H, \mu \in \mathbb{H}^\circ \right\} = \left\{ (h + P^\natural \mu) \oplus (\eta + \mu) \mid h \oplus \eta \in D_H, \mu \in \mathbb{H}^\circ \right\},$$

donde $h \in \mathbb{H}$ y $\eta \in \mathbb{V}^\circ$. Luego, por (5.24), se tiene que la transformación λ -gauge de D es dada por

$$\bar{D} = \left\{ (h + P^\natural \mu) \oplus (\eta - \lambda_{2,0}^b h - \lambda_{1,1}^b P^\natural \mu + \mu - \lambda_{1,1}^b h - \lambda_{0,2}^b P^\natural \mu) \mid h \oplus \eta \in D_H, \mu \in \mathbb{H}^\circ \right\}.$$

Así, utilizando esta descripción, se tiene que

$$\bar{D} \cap (\mathbb{T}M \oplus \mathbb{V}^\circ) = \bar{D} \cap \left\{ \mu - \lambda_{1,1}^b h - \lambda_{0,2}^b P^\natural \mu = 0 \right\} = \bar{D} \cap \left\{ (I - \lambda_{0,2}^b \circ P^\natural) \mu = \lambda_{1,1}^b h \right\},$$

con $I \equiv \text{id}_{\mathbb{T}^*M}$. Ahora, por la hipótesis (5.25), es

$$\begin{aligned} \bar{D} \cap (\mathbb{T}M \oplus \mathbb{V}^\circ) &= \bar{D} \cap \left\{ \mu = (I - \lambda_{0,2}^b \circ P^\natural)^{-1} \circ \lambda_{1,1}^b(h) \right\} \\ &= \left\{ (h + \Xi(h)) \oplus (\eta - (\lambda_{2,0}^b - \lambda_{1,1}^b \circ \Xi)(h)) \mid h \in \mathbf{H}, \eta \in \mathbb{V}^\circ \right\}. \end{aligned}$$

donde se ha definido $\Xi := P^\natural \circ (I - \lambda_{0,2}^b \circ P^\natural)^{-1} \circ \lambda_{1,1}^b$. En consecuencia, por (5.9), se tiene que

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(\bar{D}, \pi) = \{ h + \Xi(h) \mid h \in \mathbf{H}(D, \pi) \} = (\text{id}_{\mathbb{T}M} + \Xi)(\mathbf{H}). \quad (5.26)$$

Ahora, por otro lado, notemos que por definición es $\text{Im } \Xi \subseteq \mathbb{V} \subseteq \ker \Xi$. Por tanto, $\tilde{\gamma} = \gamma - \Xi$ define una conexión de Ehresmann en M . Así, por hipótesis y (2.9), se sigue que

$$\bar{\mathbf{H}} = (\text{id}_{\mathbb{T}M} + \Xi)(\mathbf{H}) \subseteq (\text{id}_{\mathbb{T}M} + \Xi)(\mathbb{H}) = \tilde{\mathbb{H}},$$

con $\tilde{\mathbb{H}}$ la distribución horizontal inducida por $\tilde{\gamma}$. Por lo tanto, \bar{D} es una estructura casi-Dirac de casi acoplamiento vía $\tilde{\gamma}$. \square

Si bien con esta proposición se presenta una familia de 2-formas diferenciales λ cuya transformación gauge asociada preserva la propiedad de casi acoplamiento para estructuras de (casi) Dirac, aún queda por estudiar el caso general, esto es, formular un resultado análogo para una 2-forma diferencial λ arbitraria.

Corolario 5.2.17 *Sea $D = D_H \oplus \text{Graf}(P|_{\mathbb{H}^\circ})$ una estructura casi-Dirac de casi acoplamiento vía una conexión de Ehresmann γ en M . Si $\lambda = \lambda_{2,0} + \lambda_{1,1}$ es una 2-forma diferencial cerrada en M , entonces la transformación λ -gauge de D definida en (5.24) es de casi acoplamiento.*

Corolario 5.2.18 *Sea D una estructura casi-Dirac de casi acoplamiento en M . Dada una 1-forma horizontal $\mu \in \Gamma \mathbb{V}^\circ$, la transformación $(-d\mu)$ -gauge de D es nuevamente una estructura casi-Dirac de casi acoplamiento en M . Aún más, si D es una estructura de Dirac, entonces transformación $(-d\mu)$ -gauge es una estructura de Dirac.*

Bibliografía

- [1] A. Abouqateb and M. Boucetta. *The modular class of a regular Poisson manifold and the Reeb class of its symplectic foliation*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **337**, 1, 6166 (2003)
- [2] M. Avendaño-Camacho and Yu. Vorobiev. *Deformations of Poisson structures on fibered manifolds and adiabatic slow-fast systems*. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **14** (2017)
- [3] K. H. Bhaskara and K. Viswanath. *Calculus on Poisson manifolds*. Bull.London Math.Soc. **20**, 68-72 (1988)
- [4] K. H. Bhaskara and K. Viswanath. *Poisson algebras and Poisson manifolds*. Pitman Research Notes in Mathematics
- [5] M. Banchi. *Rank and border rank of real ternary cubics*. Boll. Unione Mat. Ital. **8**, 65-80 (2015)
- [6] O. Brahic and R. L. Fernandes. *Poisson fibrations and fibered symplectic groupoids*. Contemporary Mathematics., AMS, Providence, R.I., **450**, 41-60 (2008)
- [7] O. Brahic. *On the infinitesimal Gauge Systems of Closed Forms*. arXiv:1010.2189, (2010).
- [8] O. Brahic and R. L. Fernandes. *Integration of Coupling Dirac Structures*. arXiv:1409.7899, (2014).
- [9] H. Bursztyn, O. Radko, *Gauge equivalence of Dirac structures and symplectic groupoids*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **53**, 309-337 (2003)
- [10] F. Cantrijn and B. Langerock. *Generalised Connections Over a Vector Bundle Map*. Differential Geom. Appl. **18**, 295317 (2003)
- [11] J. F. Carinena, A. Ibort, G. Marmo and A. M. Perelomov. *On the geometry of Lie algebras and Poisson tensors*. J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 7425-49 (1994)
- [12] V. Cortés, M. Dyckmanns and D. Lindemann. *Classification of complete projective special real surfaces*. Proc. London Math. Soc. **109** no. 3, 423-445 (2014)
- [13] T. J. Courant. *Dirac manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. **319**, 631-661 (1990)
- [14] M. Crainic and R. L. Fernandes. *Stability of symplectic leaves*. Invent. Math. **180** no. 3, 481-533 (2010)

- [15] M. Crainic, I. Marcu. *A normal form theorem around symplectic leaves*. J. Differential Geom. **92**, 417-461 (2012)
- [16] P. A. Damianou, F. Petalidou. *Poisson brackets with prescribed Casimirs*. Canad. J. Math. **64**, 991-1018 (2012)
- [17] B. L. Davis and A. Wade. *Nonlinearizability of certain Poisson structures*. Travaux Mathematiques **16**, 69-85 (2005)
- [18] I. Dorfman. *Dirac structures and integrability of nonlinear evolution equations*. John Wiley & Sons, (1993)
- [19] B. A. Dubrovin, M. Giordano, G. Marmo and A. Simoni. *Poisson Brackets on presymplectic manifolds*. Intern. J. Moden Phys. **8**, 3747-3771 (1993)
- [20] J.-P. Dufour and A. Haraki. *Rotationnels et structures de Poisson quadratiques*. C. R. Acad. Sci. Paris **312**, Serie I, 137-140 (1991).
- [21] J. P. Dufour and N. T. Zung. *Poisson Structures and their Normal Forms*. Progress in Mathematics, **242**, Birkhäuser Verlag, Basel, (2005).
- [22] J. P. Dufour and A. Wade. *On the local structure of Dirac manifolds*. Compositio Mathematica. **144** no. 3, 774-786 (2008)
- [23] C. Ehresmann. *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*. Séminaire Bourbaki, **1**, 153-168 (1948-1951)
- [24] F. Etayo. *A coordinate-free survey on pseudo-connections*. Rev. Acad. Canar. Cienc. **5**, 125137 (1993)
- [25] M. Evangelista-Alvarado, P. Suárez-Serrato, J. Torres-Orozco and R. Vera. *On Bott-Morse Foliations and their Poisson Structures in Dimension 3*. arXiv:1801.09735 [math.SG]
- [26] R. L. Fernandes. *Connections in Poisson geometry I: Holonomy and invariants*. J. Differential Geom. **54** no. 2, 303-365 (2000)
- [27] R. L. Fernandes. *Lie Algebroids, Holonomy, and characteristic classes*. Adv. in Math. **170**, 119-179 (2002)
- [28] R. Flores-Espinoza. *On Poisson structures on \mathbb{R}^4* . arXiv:1306.5254 [math-ph]
- [29] L. C. Garcia-Naranjo, P. Suárez-Serrato and R. Vera. *Poisson Structures on Smooth 4-manifolds*. Lett. Math. Phys. **105**, 1533-1550 (2015)
- [30] V. L. Ginzburg and A. Weinstein. *Lie-Poisson Structure On Some Poisson Lie Groups*. J. Amer. Math. Soc **5** no. 2, 445-453 (1992)
- [31] J. Grabowski, G. Marmo and A. M. Perelomov. *Poisson structures: towards a classification*. Mod. Phys. Lett. A **18**, 1719-33 (1993)

- [32] V. Guillemin, E. Miranda and A. R. Pires. *Codimension one symplectic foliations and regular Poisson structures*. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society **42** no. 4, 607-623 (2011)
- [33] V. Guillemin, E. Lerman and S. Sternberg. *Symplectic fibrations and multiplicity diagrams*. Cambridge Univ. Press., Cambridge, (1996).
- [34] H. Gumral and Y. Nutku. *Poisson structures of dynamical systems with three degrees of freedom*. J. Math. Phys. **34** (1993)
- [35] S. Hurder. *The Godbillon measure of amenable foliations*. J. Differential Geom. **23**, 3, 347365 (1986)
- [36] F. Kamber and P. Tondeur. *Foliated bundles and characteristic classes*. Lecture Notes in Math. **493** (Springer, Berlin, 1975).
- [37] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry I*. Interscience Publishers, New York - London (1963)
- [38] I. Kolar, P. W. Michor and J. Slovák. *Natural Operations in Differential Geometry*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1993)
- [39] J. L. Koszul. *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*. “Elie Cartan et les Math. d’Aujourd’hui”, Astérisque, hors-série, 251-271 (1985)
- [40] V. V. Kozlov. *Symmetries, Topology and resonances in Hamiltonian dynamics*. Udmurtian State University, Izhevsk, (1995); English Transl., Springer-Verlag, Berlin, (1995)
- [41] P. Libermann and C.-M. Marle. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Mathematics and Its Applications, **35**, Springer Netherlands, (1987).
- [42] A. Lichnerowicz. *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*. J. Differential Geom. **12**, 253-300 (1977)
- [43] Z. J. Liu and P. Xu. *On quadratic Poisson structures*. Lett. Math. Phys. **26**, 33-42 (1992)
- [44] K. C. H. Mackenzie. *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*. LMS Lecture Note Ser. **124**
- [45] I. Marcuț. *Normal forms in Poisson geometry*. arXiv:1301.4571 [math.DG]
- [46] I. Marcuț. *Rigidity around Poisson submanifolds*. Acta. Math. **213**, 137-198 (2014)
- [47] J. E. Marsden, R. Montgomery and T. Ratiu. *Reduction, symmetry and phases in mechanics*. Memoirs of AMS, Providence, **88** no. 436, 1-110 (1990)
- [48] P. W. Michor. *Remarks on the Frölicher-Nijenhuis Bracket*. Proceedings of the Conference on Differential Geometry and its Applications, Brno (1986) (D. Krupka and A. Svec, eds.), D. Reidel (1987), 197-220
- [49] P. W. Michor. *Remarks on the Schouten-Nijenhuis Bracket*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl. **16**, 208-215 (1987)

- [50] P. Michor. *Topics in differential geometry*. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence **93** (2008)
- [51] R. Montgomery, J. E. Marsden and T. Ratiu. *Gauged Lie-Poisson structures*. In: "Fluids and Plasmas: Geometry and Dynamics" (J.Marsden, ed.) Cont. Math. **28**, 101-114 (1984)
- [52] R. Montgomery. *The connection whose holonomy is the classical adiabatic angles of Hannay and Berry and its generalization to the non-integrable case*. Comm. Math. Phys. **120**, 269-294 (1988)
- [53] A. Pedroza, E. Velasco-Barreras and Yu. Vorobiev. *Unimodularity criteria for Poisson structures on foliated manifolds*. Lett. Math. Phys. **108**, 861-882 (2018)
- [54] O. Radko. *A classification of topologically stable Poisson structures on a compact oriented surface*. J. Symplectic Geom. **1**, 523-542 (2002)
- [55] J. A. Schouten. *Über Differentialkonkomitanten zweier kontravarianter Größen*. Indag. Math. **2**, 449-452 (1940)
- [56] P. Severa and A. Weinstein. *Poisson geometry with a 3-form background*. Progr. Theoret. Phys. Suppl. **144**, 145-154 (2001)
- [57] P. Stefan. *Accessible sets, orbits, and foliations with singularities*. Proc. London Math.Soc. (3) **29**, 699-713 (1974)
- [58] S. Sternberg. *Minimal coupling and the symplectic mechanics of a classical particle in the presence of a Young-Mills field*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74**, 5253-5254 (1977)
- [59] P. Suárez-Serrato and J. Torres-Orozco. *Poisson structures on wrinkled fibrations*. Bol. Soc. Mat. Mex. **22**, 263-280 (2016)
- [60] H. J. Sussmann. *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*. Trans. Amer Math. Soc. **180**, 171-188 (1973)
- [61] A. Tumanov. *Connections and propagation of analyticity for CR functions*. Duke Math. J. **73** no. 1, 1-24 (1994)
- [62] I. Vaisman. *Chohomology and differential forms*. M. Dekker, Inc., New York, (1973).
- [63] I. Vaisman. *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*. 206, Birkhäuser Basel, Boston (1994)
- [64] I. Vaisman. *Coupling Poisson and Jacobi structures on foliated manifolds*. International J.of Geometric Methods in Modern Physics **1** no. 5, 607-637 (2004)
- [65] I. Vaisman. *Poisson structures on foliated manifolds*. Travaux Mathématiques **16**, 139-161 (2005)
- [66] I. Vaisman. *Foliation-coupling Dirac structures*. J. of Geometry and Physics **56** no. 6, 917-938 (2006)
- [67] J. A. Vallejo and Yu. Vorobiev. *Invariant Poisson Realizations and the Averaging of Dirac Structures*. SIGMA **10**, 96-116 (2014)

- [68] J. A. Vallejo and Yu. Vorobiev. *G-Invariant Deformations of almost coupling Poisson Structures*. SIGMA **13** (2017)
- [69] E. Velasco-Barreras, Yu. Vorobiev. *On the splitting of infinitesimal Poisson automorphisms around symplectic leaves*. Differential Geometry and its Applications **59**, 12-34 (2018)
- [70] Yu. M. Vorobev and M. V. Karasev. *Poisson manifolds and their Schouten bracket*. Funct. Anal. Appl. **22**, 1-9 (1988)
- [71] Yu. Vorobiev. *Averaging of Poisson structures*. In: Geometric Methods in Physics, AIPC Proc. **1079**, 235-240 (2008)
- [72] Yu. Vorobjev. *Coupling tensors and Poisson geometry near a single symplectic leaf*. In: "Lie Algebroids and Related Topics in Differential Geometry", Banach Center Publ. **54**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 249-274 (2001)
- [73] Yu. Vorobjev. *Poisson equivalence over symplectic leaf*. Amer. Math. Soc. Transl. (2) **216**, 241-277 (2005)
- [74] A. Wade. *Poisson fiber bundles and coupling Dirac structures*. Annals of Global Analysis and Geometry **33** no. 3, 207-217 (2008)
- [75] A. Weinstein. *The local structure of Poisson manifolds*. J. Diff. Geom. **18**, 523-557 (1983)
- [76] A. Weinstein. *The modular automorphism group of a Poisson manifold*. J. Geom. Phys. **23**, 379-394 (1997)
- [77] S. K. Wong. *Field and particle equations for the classical Yang-Mills field and particles with isotopic spin*. Nuovo Cimento **65 A** no. 4, 689-694 (1970)
- [78] N. I. Zhukova. *The Ehresmann Connection for Foliations with Singularities and the Global Stability of Leaves*. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **10**, 45-56 (2004)
- [79] N. I. Zhukova. *Singular Foliations with Ehresmann Connections and Their Holonomy Groupoids*. "Geometry and Topology of Manifolds" Banach Center Publ. **76**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 471-490 (2007)